一类非仿射系统全局镇定控制器的设计[1)]

陆国平
（南通工学院应用数学系　南通　226007）
（E-mail：gplu@pub. nt. jsinfo. net）

摘　要　讨论一类多输入多输出非仿射系统的全局可镇定性，其中该系统的自治系统 Lyapunov 稳定. 利用 LaSalle 不变原理，得到系统全局可镇定的充分条件；基于分离原理和降阶观测器，给出了一类降阶动态输出反馈镇定控制器的设计.

关键词　全局渐近镇定性，非仿射系统，降阶动态输出反馈，分离原理
中图分类号　TP273.2

Global Stabilization for a Class of Non-Affine Systems

LU Guo-Ping
(*Department of Applied Mathematics, Nantong Institute of Technology, Nantong* 226007)
(*E-mail*: gplu@pub. *nt*. jsinfo. *net*)

Abstract　The global asymptotic stabilization is discussed for a class of MIMO non-affine nonlinear systems whose free dynamics are Lyapunov stable. Sufficient condition for constructing reduced-order dynamic output feedback controllers is developed. The technique is based on the Lyapunov stability approach, reduced-order observer design and the separation principle for bounded controllers. Asymptotic stability of the trivial solution is demonstrated using LaSalle's invariance principle.

Key words　Global asymptotic stabilization, non-affine nonlinear systems, reduced-order dynamic output feedback, separation principle

1　引言

基于全阶观测器，文献[1]提出了全阶镇定控制器的设计. 但如果物理过程中状态的维数很高，那么相应的全阶观测器的阶数也会很高，这意味着实现控制的代价很高. 为减小控制器的阶数，系统状态的一些信息可以直接从系统的输出得到，即不必给出系统状态每个分

1) 江苏省教育厅留学回国人员基金和南通工学院控制理论与控制工程重点学科基金资助
Supported by the Education Department of Jiangsu Province and NTIT Key Project for Control Theory and Control Engineering
收稿日期　2001-03-07　　收修改稿日期　2001-06-19
Received March 7, 2001; in revised form June 19, 2001

量的渐近估计，这样可降低观测器的阶数. 本文给出了一类多输入多输出非仿射线性系统全局可镇定的充分条件，得到一类降阶动态输出反馈镇定控制器的设计. 本文提出的控制器是建立在 Luenberger 降阶观测器的基础上. 全局渐近稳定性的证明方法是 LaSalle 不变原理和分离原理(即观测器和控制器可独立设计).

考虑下列类型的非仿射系统

$$\dot{x} = Ax + g(x)u + R(x,u)u,\quad y = Cx \tag{1}$$

其中 $x\in R^n$ 为系统状态，$y\in R^p$ 为系统的可测输出，$u\in R^m$ 为系统的控制输入，$A\in R^{n\times n}$ 和 $C\in R^{p\times n}$ 为常数矩阵，$\mathrm{rank}C=p$. $g(x)$ 和 $R(x,u)\in R^{n\times m}$ 为矩阵值函数.

文献中有关系统(1)全局镇定问题的讨论很少，特别是降阶动态输出反馈镇定控制器的设计问题. 解决系统(1)全局镇定问题的主要困难在于：1) 如何从一个关于状态和控制输入的隐式不等式中求解控制输入；2) 分离原理何时成立. 本文利用 Lyapunov 方法将相应的隐式不等式转化为显式不等式. 文献[1]讨论了全阶动态输出反馈镇定控制器或状态反馈控制器；文献[2]讨论了双线性系统镇定控制器的设计. 但这些文献所讨论的系统都可以看成是系统(1)的特殊情形. 此外，文献[1]基于摄动系统有界准则讨论镇定控制器的设计，而本文采用降阶观测器的设计方法和分离原理. 因此，本文并非文献[1,2]的平凡推广.

2 主要结论

本文的目的是构造下列降阶($(n-p)$阶)动态输出反馈控制镇定控制器

$$\dot{z} = h(z,y),\qquad u = u(z,y) \tag{2}$$

其中 $z\in R^{n-p}$ 是控制器的状态，$h(\mathbf{0},\mathbf{0})=\mathbf{0}$，$u(\mathbf{0},\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

本文的主要结果建立在以下两个基本假设基础上.

假设 1. 设 A 是 Lyapunov 稳定的，即存在正定常数矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 使得 $PA+A'P\leqslant 0$.

假设 2. 设 $R(x,u)=\sum_{i=1}^{m}u^{(i)}R_i(x,u)$，其中 $u=(u^{(1)}\ \ u^{(2)}\ \cdots\ u^{(m)})'\in R^m$. 假设 $g(x)$，$R_i(x,u)$ 满足以下 Lipschitz 条件：

$\|g(x)-g(z)\|\leqslant l\|x-z\|$，$\|R_i(x,u)-R_i(z,u)\|\leqslant L_i(u)\|x-z\|$，$\forall x,z\in R^n$，

其中 l 为正常数，$L_i(u)$ 为连续函数，$i=1,2,\cdots,m$.

引理 1. 若存在正定常数 c 使得 $\|u\|\leqslant c$，则 $\forall x,z\in R^n$，有

$$\|R(x,u)-R(z,u)\|\leqslant L_c\|u\|\ \|x-z\|,\quad \|R(z,u)\|\leqslant R_M(z)\|u\|,$$

其中 $c_{M_i}=\max_{\|u\|\leqslant c}L_i(u)$，$c_{R_i}=\max_{\|u\|\leqslant c}\|R_i(\mathbf{0},u)\|$，$\quad i=1,2,\cdots m$，

$$L_c=\max_{\|u\|\leqslant c}\Big[\sum_{i=1}^{m}L_i^2(u)\Big]^{\frac{1}{2}},\ R_M(z)=\Big[\sum_{i=1}^{m}(c_{M_i}\|z\|+c_{R_i})^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

假设

$$\Omega=\{x\in R^n: L_{Ax}^k(x'Px)=0,\ k=1,2,\cdots\},$$

$$S=\{x\in R^n: L_{Ax}^kL_\tau(x'Px)=0,\ \forall\tau\in F,\ k=0,1,2,\cdots\},$$

其中 $F=\mathrm{span}\{ad_{Ax}^kg_i(x): k=0,1,2,\cdots;\ 1\leqslant i\leqslant m\}$，参见文献[1].

下列定理为本文的主要结果，它给出了系统(1)降阶镇定控制器的设计.

定理 1. 在假设 1 和 2 下，若(C,A)可检测且 $\Omega\cap S=\{0\}$，则对于任意正常数 c，系统(1)可由常数 c 界定的降阶动态输出反馈控制器全局镇定.

证明. 由 C 满秩可得存在常数矩阵 $D\in R^{(n-p)\times n}$ 使得 $T=(C'\quad D')'\in R^{n\times n}$ 为满秩矩

阵. 设 $TAT^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$，其中 $A_{11}\in R^{p\times p}$，$A_{12}\in R^{p\times(n-p)}$，$A_{21}\in R^{(n-p)\times p}$，$A_{22}\in R^{(n-p)\times(n-p)}$.

类似文献[2]的证明可得(A_{12},A_{22})可检测，即存在常数矩阵 $L\in R^{(n-p)\times p}$和正定常数矩阵 $Q\in R^{(n-p)\times(n-p)}$使得 $QA_1+A_1'Q=-3I_{n-p}$，其中 $A_1=A_{22}+LA_{12}$. 为了方便起见，设 $S_1=LC+D$，$S=\begin{pmatrix}C\\ S_1\end{pmatrix}^{-1}$，$\boldsymbol{w}=S_1\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x}=S\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix}$. 因此，若能给出 $\boldsymbol{w}$ 的渐近估计，即可得到状态 $\boldsymbol{x}$ 的渐近估计. 下列动态输出反馈镇定控制器是基于 $\boldsymbol{w}$ 的估计或 $\boldsymbol{x}$ 的降阶观测器：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}=S_1[A\tilde{\boldsymbol{x}}+g(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}+R(\tilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}]\\ \boldsymbol{u}=-[\Phi(\tilde{\boldsymbol{x}})+\delta(\tilde{\boldsymbol{x}})I_m]^{-1}g'(\tilde{\boldsymbol{x}})P\tilde{\boldsymbol{x}}\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{z}\in R^{n-p}$为动态控制器的状态，$P>0$ 满足假设 1，$\tilde{\boldsymbol{x}}=S\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}$，$S_0=T^{-1}(0\quad I_{n-p})'$，

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{\boldsymbol{x}})&=g'(\tilde{\boldsymbol{x}})PS_0S_0'Pg(\tilde{\boldsymbol{x}})+\\ &\quad[l^2\|S_0\|^2\|P\|^2\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2+L_c\|S_0\|\|P\|\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2+R_M^2(\tilde{\boldsymbol{x}})\|S_0P\|+2R_M^2(\tilde{\boldsymbol{x}})\|P\|\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|]I_m,\\ \delta(\tilde{\boldsymbol{x}})&=\max(\alpha,c^{-1})\|g'(\tilde{\boldsymbol{x}})P\tilde{\boldsymbol{x}}\|+1,\qquad \alpha=a_1+\sqrt{a_1^2+a_2}\end{aligned}\tag{4}$$

$a_1=l\|S_0\|(\|PS_0\|+\|QS_1\|)$，$a_2=2L_c\|S_0\|(\|PS_0\|+\|QS_1\|)+\|PS_0\|+L_c\|S_0\|\|P\|$.

于是由式(3)和(4)可得控制输入 $\boldsymbol{u}$ 由 c 和 α^{-1}界定. 若 $\boldsymbol{z}\in R^{n-p}$看成 $\boldsymbol{w}$ 的估计，则 $\tilde{\boldsymbol{x}}=S\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}$可以看成是系统状态 $\boldsymbol{x}=S\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix}$的估计. 由式(1)可得

$$\dot{\boldsymbol{w}}=S_1[A\boldsymbol{x}+g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}+R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}]\tag{5}$$

设 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}$，则利用式(3)和(5)经过运算可得

$$\dot{\boldsymbol{e}}=A_1\boldsymbol{e}+S_1\Delta g\boldsymbol{u}+S_1\Delta R\boldsymbol{u}\tag{6}$$

其中 $\Delta g=g(\boldsymbol{x})-g(\tilde{\boldsymbol{x}})$，$\Delta R=R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-R(\tilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})$.

选择 Lyapunov 函数 $V=\boldsymbol{x}'P\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}'Q\boldsymbol{e}$，注意到 $\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{x}}+S_0\boldsymbol{e}$，则 V 沿闭环系统(1)和式(6)的全导数为

$$\begin{aligned}\dot V&=\boldsymbol{x}'(PA+A'P)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}'(QA_1+A_1'Q)\boldsymbol{e}+2\tilde{\boldsymbol{x}}'Pg(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}+2\tilde{\boldsymbol{x}}'P\Delta g\boldsymbol{u}+\\ &\quad 2\boldsymbol{e}'S_0'Pg(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{e}'S_0'P\Delta g\boldsymbol{u}+2\tilde{\boldsymbol{x}}'P\Delta R\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{e}'S_0'P\Delta R\boldsymbol{u}+\\ &\quad 2\boldsymbol{e}'S_0'PR(\tilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+2\tilde{\boldsymbol{x}}'PR(\tilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{e}'QS_1\Delta g\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{e}'QS_1\Delta R\boldsymbol{u}\end{aligned}\tag{8}$$

利用引理 1 经过计算可得式(3)，(4)和(8)意味着

$$\dot V\leqslant\boldsymbol{x}'(PA+A'P)\boldsymbol{x}-(1-2a_1\|\boldsymbol{u}\|-a_2\|\boldsymbol{u}\|^2)\|\boldsymbol{e}\|^2+2\tilde{\boldsymbol{x}}'Pg(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'\Phi(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}\tag{9}$$

其中 $2\tilde{\boldsymbol{x}}'Pg(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'\Phi(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}\leqslant-\tilde{\boldsymbol{x}}'Pg(\tilde{\boldsymbol{x}})[\Phi(\tilde{\boldsymbol{x}})+\delta(\tilde{\boldsymbol{x}})I_m]^{-1}g'(\tilde{\boldsymbol{x}})P\tilde{\boldsymbol{x}}\leqslant 0$. 因此由假设 1 和 $\|\boldsymbol{u}\|<\alpha^{-1}$得到$\dot V\leqslant 0$. 进一步，$\dot V=0$ 意味着 $\boldsymbol{x}'(PA+A'P)\boldsymbol{x}=0$，(即 $L_{A\boldsymbol{x}}V=0$)，$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$，$g'(\tilde{\boldsymbol{x}})P\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$. 此外，$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$ 意味着 $\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{x}}$. 于是 $L_gV=2\boldsymbol{x}'Pg(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$. 利用数学归纳方法可得 $\boldsymbol{x}\in\Omega\cap S=\{\boldsymbol{0}\}$. 故由LaSalle不变原理(参见文献[3])可得闭环系统的全局渐近稳定性.

证毕.

注. 文献[2]中所讨论的系统为系统(1)的特例. 文献[2]假设状态矩阵 A 有 n 个纯虚特征值且其中的假设(2)成立. 易证文献[2]的主要结果较定理 1 保守，本文可以看成是文献[2]的推广. 此外，文献[1]基于摄动系统有界准则讨论镇定控制器的设计，而本文采用降阶观测器的设计方法，因此本文的结果并非文献[1,2]的平凡推广.

References

1 Lin W. Global asymptotic stabilization of general nonlinear systems with stable free dynamics via passivity and bounded feedback. *Automatica*, 1996, **32**: 915～924

2 Lu G P, Zheng Y F. Global stabilizability of bilinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 1999, **25**(6): 820～823 (in Chinese)

3 Vidyasagar M. Nonlinear Systems Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1978

陆国平 南通工学院自动化系副教授，博士，曾任香港城市大学高级研究助理和高级研究员. 研究方向为非线性控制系统和时滞控制系统等.

(**LU Guo-Ping** Received the Ph. D. degree from East China Normal University, P. R. China, in 1998. He was a senior research associate at the City University of Hong Kong. He is currently an associate professor at the Department of automation, Nantong Institute of Technology, Jiangsu, P. R. China. His research interests include nonlinear control and robust control for time-delay systems.)

书 讯

科学出版社 2003 年出版了黄琳教授撰写的获中国科学院出版基金支持的专著《稳定性与鲁棒性的理论基础》一书. 作者在书中用统一的方法对控制系统中最基本最重要的两个问题，稳定性和鲁棒性进行了系统深入的阐述，包括时不变与时变线性系统、非线性系统的 Lyapunov 稳定性理论和方法；控制系统的结构性质与系统镇定；非线性控制系统的频域方法；参数不确定系统及 H∞控制等鲁棒性分析与综合的理论与方法等. 该书内容丰富，概念清晰，理论严谨，注重工程实际背景，对解决复杂的理论与应用问题具有现实的指导意义，是一本专著与教材相结合的较好著作.

该书可供系统与控制科学、力学、应用数学、工程科学及与之相关的应用科学领域的教学与科研人员阅读，亦可作为相关专业研究生的教材或教学参考书.

Book message

The Science Press published in 2003 the book "Theoretic Foundation of Stability and Robustness" written by Professor Huang Lin and supported by the Science Publishing Foundation of Chinese Academy of Sciences. In this book, the two most fundamental and important issues in control science: stability and robustness are treated in a systematic manner and in great depth within a unified framework. The book expounds the Lyapunov theory and methods of time-invariant linear systems, time-varying linear systems and nonlinear systems; the structure properties and stabilization of control systems; frequency-domain methods of nonlinear control systems; robustness analysis and synthesis theories and methods such as H_∞ control and parametric uncertain systems, etc. The book has very rich contents, well-clarified concepts and precisely expressed theories with highly emphasized practical background knowledge. It will be instructive for solving complicated theoretical and application problems and will be a good textbook as well as a monograph.

The book is intended for teachers and researchers in systems and control science, mechanics, applied mathematics, engineering science and related applied science areas. It may also be used as a text or reference for graduate-level course in the above mentioned scientific fields.