第 32 卷 第 5 期 自 动 化 学 报 Vol. 32, No. 5
2006 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA September, 2006

不确定离散模糊时滞系统的时滞相关 H_∞ 控制[1)]

陈志盛[1] 彭 可[2] 李勇刚[3] 张泰山[3]

[1](长沙理工大学能源与动力工程学院 长沙 410076)
[2](湖南师范大学工学院 长沙 410081)
[3](中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083)
(E-mail: czs9988@sina.com)

摘 要 研究了不确定离散 T-S 模糊时滞系统的稳定性分析与 H_∞ 控制问题. 通过构造适当的 Lyapunov 泛函, 给出了系统的时滞相关稳定新判据. 进而利用线性矩阵不等式方法, 研究了 H_∞ 模糊状态反馈控制器存在的充分条件, 并提出控制器优化设计的迭代算法.

关键词 T-S 模糊系统, 时滞相关, 鲁棒控制, 线性矩阵不等式
中图分类号 TP13

Delay-Dependent H_∞ Control for Uncertain Discrete-Time Delay Fuzzy Systems

CHEN Zhi-Sheng[1] PENG Ke[2] LI Yong-Gang[3] ZHANG Tai-Shan[3]

[1](*School of Energy and Power Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha* 410076)
[2](*College of Engineering, Hunan Normal University, Changsha* 410081)
[3](*School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha* 410083)
(E-mail: czs9988@sina.com)

Abstract Problems of stability and H_∞ control for discrete-time T-S fuzzy systems with state delay and uncertainties are discussed. A new delay-dependent stability criterion is first proposed by defining an appropriate Lyapunov function. Then, the sufficient conditions for the existence of H_∞ fuzzy state-feedback controller is investigated in terms of linear matrix inequality(LMI). Finally, an iterative algorithm is provided for the optimal design of the H_∞ controller.

Key words T-S fuzzy system, delay-dependent, robust control, linear matrix inequality

1 引言

利用 T-S 模糊模型对非线性系统进行建模和控制是目前控制理论研究的一个热点[1~4]. 近年来, 国内外学者开始关注 T-S 模糊时滞系统的时滞相关稳定性分析与综合问题, 并针

1) 国家自然科学基金 (60574030), 湖南省教育厅科研项目 (05C411) 联合资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60574030) and Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education (05C411)
收稿日期 2004-12-18 收修改稿日期 2006-5-27
Received December 18, 2004; in revised form May 27, 2006

对连续时间系统取得了一些成果，如 Li[5] 等和 Guan[6] 等分别给出了连续模糊时滞系统的时滞相关稳定性条件和保成本控制器设计方法. 但是，适用于离散模糊时滞系统的时滞相关研究成果目前还鲜见报道.

本文针对上述问题，考虑如下一类不确定离散 T-S 模糊时滞系统：

Plant rule i: IF $\xi_1(k)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $\xi_r(k)$ is M_{ir} THEN

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = (A_i + \Delta A_i(k))\boldsymbol{x}(k) + (A_{di} + \Delta A_{di}(k))\boldsymbol{x}(k-d) \\ \qquad\qquad + (B_i + \Delta B_i(k))\boldsymbol{u}(k) + B_{1i}\boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{z}(k) = C_i\boldsymbol{x}(k), \quad i = 1, 2, \cdots, q \end{cases} \tag{1}$$

其中 q 为模糊规则数，$\boldsymbol{\xi}(k) = \begin{bmatrix}\xi_1(k) & \cdots & \xi_r(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为前件变量，$M_{ij}(j = 1, \cdots, r)$ 为模糊集合，$\boldsymbol{x}(k) \in R^n$ 为系统状态，$\boldsymbol{u}(k) \in R^m$ 为控制输入， $\boldsymbol{w}(k) \in R^l$ 为扰动输入，$\boldsymbol{z}(k) \in R^p$ 为控制输出，$d > 0$ 为已知定常时滞，$\boldsymbol{x}(k) = 0, \forall d \leqslant k \leqslant 0$. 系统的时变不确定参数定义为：$\begin{bmatrix}\Delta A_i(k) & \Delta A_{di}(k) & \Delta B_i(k)\end{bmatrix} = DF(k)\begin{bmatrix}E_i & E_{di} & E_{bi}\end{bmatrix}$, 这里 D, E_i, E_{di} 和 E_{bi} 为已知的适维实矩阵， $F(k)$ 为扰动矩阵，且满足 $F^{\mathrm{T}}(k)F(k) \leqslant I, \forall k$.

构造并行分布补偿 (PDC) 形式的状态反馈控制器，其模糊规则为：

Controller rule i: IF $\xi_1(k)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $\xi_r(k)$ is M_{ir} THEN

$$\boldsymbol{u}(k) = K_i\boldsymbol{x}(k), \quad i = 1, 2, \cdots, q \tag{2}$$

其中 $K_i \in R^{m\times n}$ 为反馈控制增益矩阵. 结合式 (1) 和式 (2), 并通过单点模糊化、乘积推理和中心平均清晰化方法，可得模糊闭环系统的全局模型：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} h_i(\boldsymbol{\xi}(k))h_j(\boldsymbol{\xi}(k))\Big[\overline{A}_{ij}\boldsymbol{x}(k) + \overline{A}_{di}\boldsymbol{x}(k-d) + B_{1i}\boldsymbol{w}(k)\Big] \\ \boldsymbol{z}(k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} h_i(\boldsymbol{\xi}(k))C_i\boldsymbol{x}(k) \end{cases} \tag{3}$$

这里 $\overline{A}_{ij} = A_i + B_iK_j + DF(k)E_i + DF(k)E_{bi}K_j$; $\overline{A}_{di} = A_{di} + DF(k)E_{di}$; $h_i(\boldsymbol{\xi}(k)) = \omega_i(\boldsymbol{\xi}(k))/\displaystyle\sum_{i=1}^{q}\omega_i(\boldsymbol{\xi}(k))$; $\omega_i(\boldsymbol{\xi}(k)) = \displaystyle\prod_{j=1}^{r} M_{ij}(\xi_j(k))$, $0 \leqslant \omega_i(\boldsymbol{\xi}(k)) \leqslant 1$.

本文要研究的问题是针对模糊系统 (1), 设计 PDC 控制器 (2), 使得闭环系统 (3) 鲁棒稳定，且满足 H_∞ 扰动抑制性能 $\|\boldsymbol{z}\|_2 < \gamma\|\boldsymbol{w}\|_2$.

2　时滞相关稳定条件

引理 1[7]**.** 对于适维矩阵 X,Y 和正定矩阵 R, 有 $X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leqslant X^{\mathrm{T}}RX + Y^{\mathrm{T}}R^{-1}Y$.

引理 2[8]**.** 给定适维矩阵 $Q = Q^{\mathrm{T}}$,D,E 和 $R = R^{\mathrm{T}} > 0$, 则对于所有满足 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant R$ 的 F, 当且仅当存在 $\epsilon > 0$ 使得 $Q + \epsilon^{-1}DD^{\mathrm{T}} + \epsilon E^{\mathrm{T}}RE < 0$ 成立时，有 $Q + DFE + E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} < 0$.

设外界扰动输入 $\boldsymbol{w} = 0$ ，分析闭环系统 (3) 的稳定性.

定理 1. 对于不确定模糊时滞系统 (1), 闭环系统 (3) 渐近稳定的充分条件为存在适维矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} > 0$, $S = S^{\mathrm{T}} > 0$, $T = T^{\mathrm{T}} > 0$, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, $K_i(i = 1, 2, \cdots, q)$, 满足

$$\begin{cases} \varPsi_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \cdots, q \\ \varPsi_{ij} + \varPsi_{ji} < 0, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant q \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\Psi_{ij}=\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & dN_1\\ * & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & dN_2\\ * & * & \Lambda_{33} & dN_3\\ * & * & * & -dT\end{bmatrix},\quad i,j=1,2,\cdots,q$$

这里 $*$ 表示矩阵对称位置元素的转置；$\Lambda_{11}=N_1+N_1^{\mathrm{T}}-M_1(\overline{A}_{ij}-I)-(\overline{A}_{ij}-I)^{\mathrm{T}}M_1^{\mathrm{T}}+S$；$\Lambda_{12}=-N_1+N_2^{\mathrm{T}}-M_1\overline{A}_{di}-(\overline{A}_{ij}-I)^{\mathrm{T}}M_2^{\mathrm{T}}$；$\Lambda_{13}=P+N_3^{\mathrm{T}}+M_1-(\overline{A}_{ij}-I)^{\mathrm{T}}M_3^{\mathrm{T}}$；$\Lambda_{22}=-S-N_2-N_2^{\mathrm{T}}-M_2\overline{A}_{di}-\overline{A}_{di}^{\mathrm{T}}M_2^{\mathrm{T}}$；$\Lambda_{23}=-N_3^{\mathrm{T}}+M_2-\overline{A}_{di}^{\mathrm{T}}M_3^{\mathrm{T}}$；$\Lambda_{33}=P+dT+M_3+M_3^{\mathrm{T}}$.

证明. 定义新变量 $\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{x}(k+1)-\boldsymbol{x}(k)$. 对系统 (3) 构造时滞相关型 Lyapunov 泛函

$$V(k)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)P\boldsymbol{x}(k)+\sum_{l=k-d}^{k-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(l)S\boldsymbol{x}(l)+\sum_{\theta=-d+1}^{0}\sum_{l=k+\theta-1}^{k-1}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(l)T\boldsymbol{y}(l)\tag{5}$$

设 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k) & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-d) & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k)\end{bmatrix}$, $\widetilde{M}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}M_1^{\mathrm{T}} & M_2^{\mathrm{T}} & M_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$, $\widetilde{N}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}N_1^{\mathrm{T}} & N_2^{\mathrm{T}} & N_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$, 其中 $M_l,N_l(l=1,2,3)$ 为具有合适维数的自由权矩阵. 类似文 [8,9] 分析方法，有

$$\begin{aligned}\Delta V(k)=V(k+1)-V(k)=&\Big[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)S\boldsymbol{x}(k)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)P\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-d)S\boldsymbol{x}(k-d)+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(k)\cdot\\ &(P+dT)\boldsymbol{y}(k)-\sum_{l=k-d}^{k-1}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(l)T\boldsymbol{y}(l)\Big]+2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\widetilde{M}\Big\{\boldsymbol{x}(k+1)-\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}h_i(\boldsymbol{\xi}(k))h_j(\boldsymbol{\xi}(k))\cdot\\ &\Big[\overline{A}_{ij}\boldsymbol{x}(k)+\overline{A}_{di}\boldsymbol{x}(k-d)+B_{1i}\boldsymbol{w}(k)\Big]\Big\}+2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\widetilde{N}\Big[\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}(k-d)-\sum_{l=k-d}^{k-1}\boldsymbol{y}(l)\Big]\end{aligned}\tag{6}$$

根据引理 1,

$$-2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\widetilde{N}\sum_{l=k-d}^{k-1}\boldsymbol{y}(l)\leqslant d\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\widetilde{N}T^{-1}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}(k)+\sum_{l=k-d}^{k-1}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(l)T\boldsymbol{y}(l)\tag{7}$$

将式 (7) 代入式 (6), 经整理可得

$$\begin{aligned}\Delta V(k)&\leqslant\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}h_i(\boldsymbol{\xi}(k))h_j(\boldsymbol{\xi}(k))\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\Xi_{ij}\boldsymbol{\eta}(k)\\ &=\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\Big[\sum_{i=1}^{q}h_i^2(\boldsymbol{\xi}(k))\Xi_{ii}+\sum_{i=1}^{q}\sum_{i<j}^{q}h_i(\boldsymbol{\xi}(k))h_j(\boldsymbol{\xi}(k))(\Xi_{ij}+\Xi_{ji})\Big]\boldsymbol{\eta}(k)\end{aligned}\tag{8}$$

其中

$$\Xi_{ij}=\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13}\\ * & \Lambda_{22} & \Lambda_{23}\\ * & * & \Lambda_{33}\end{bmatrix}+d\widetilde{N}T^{-1}\widetilde{N}^{\mathrm{T}}$$

由 Schur 补引理 [10], 若式 (4) 成立，则 $\Delta V(k)<0$, 闭环系统 (3) 渐近稳定. □

3 H_∞ 模糊鲁棒控制器设计

当 $\boldsymbol{w}\neq 0$ 时，在定理 1 基础上设计 H_∞ 控制器，有如下结果：

定理 2. 对于系统 (1) 和给定的常数 ρ_2,ρ_3, 若存在适维矩阵 $\widehat{P}=\widehat{P}^{\mathrm{T}}>0$, $\widehat{S}=\widehat{S}^{\mathrm{T}}>0$, $\widehat{T}=\widehat{T}^{\mathrm{T}}>0$, $\widehat{N}_1$, $\widehat{N}_2$, $\widehat{N}_3$, $Y_i(i=1,2,\cdots,q)$ 和非奇异矩阵 X, 使得如下优化问题有解

$$\mu_{opt}=\min_{\mu>0}\mu \quad \text{Subject to LMI(10)} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \varTheta_{ii}<0, & i=1,2,\cdots,q \\ \varTheta_{ij}+\varTheta_{ji}<0, & 1\leqslant i<j\leqslant q \end{cases} \tag{10}$$

其中

$$\varTheta_{ij}=\begin{bmatrix} \varPhi_{11} & \varPhi_{12} & \varPhi_{13} & -B_{1i} & d\widehat{N}_1 & D & D & XE_i^{\mathrm{T}} & Y_j^{\mathrm{T}}E_{bi}^{\mathrm{T}} & H_{ij} \\ * & \varPhi_{22} & \varPhi_{23} & -\rho_2B_{1i} & d\widehat{N}_2 & \rho_2D & \rho_2D & XE_{di}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & \varPhi_{33} & -\rho_3B_{1i} & d\widehat{N}_3 & \rho_3D & \rho_3D & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mu I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -d\widehat{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

这里 $i,j=1,2,\cdots,q$;　$\varPhi_{11}=\widehat{N}_1+\widehat{N}_1^{\mathrm{T}}-(A_iX^{\mathrm{T}}+B_iY_j-X^{\mathrm{T}})-(XA_i^{\mathrm{T}}+Y_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}-X)+\widehat{S}$; $\varPhi_{12}=-\widehat{N}_1+\widehat{N}_2^{\mathrm{T}}-A_{di}X^{\mathrm{T}}-\rho_2(XA_i^{\mathrm{T}}+Y_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}-X)$;　$\varPhi_{13}=\widehat{P}+X^{\mathrm{T}}+\widehat{N}_3^{\mathrm{T}}-\rho_3(XA_i^{\mathrm{T}}+Y_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}-X)$;　$\varPhi_{22}=-\widehat{S}-\widehat{N}_2-\widehat{N}_2^{\mathrm{T}}-\rho_2A_{di}X^{\mathrm{T}}-\rho_2XA_{di}^{\mathrm{T}}$;　$\varPhi_{23}=\rho_2X^{\mathrm{T}}-\rho_3XA_{di}^{\mathrm{T}}-\widehat{N}_3^{\mathrm{T}}$; $\varPhi_{33}=\widehat{P}+d\widehat{T}+\rho_3X^{\mathrm{T}}+\rho_3X$;　$H_{ij}=X[((C_i^{\mathrm{T}}C_i+C_j^{\mathrm{T}}C_j)/2)^{1/2}]^{\mathrm{T}}$. 那么存在状态反馈控制律 (2), 其中增益矩阵 $K_i=Y_iX^{-\mathrm{T}}$, 使得闭环系统 (3) 渐近稳定且满足 H_∞ 优化性能指标 $\gamma=\sqrt{\mu_{opt}}$.

证明. 为便于求解，取自由权矩阵 $M_2=\rho_2M_1$,　$M_3=\rho_3M_1$, 其中 ρ_2 和 ρ_3 为给定的常数. 考虑 H_∞ 控制性能 $\|\boldsymbol{z}\|_2^2<\gamma^2\|\boldsymbol{w}\|_2^2$, 与定理 1 证明过程相似，并利用变换 $X=M_1^{-1}$, $Y_i=K_iX^{\mathrm{T}}$,　$\widehat{N}_l=XN_lX^{\mathrm{T}}(l=1,2,3)$,　$\widehat{P}=XPX^{\mathrm{T}}$,　$\widehat{S}=XSX^{\mathrm{T}}$,　$\widehat{T}=XTX^{\mathrm{T}}$, 由引理 1 、引理 2 和 Schur 补引理经矩阵运算可导出 LMI(10), 详细过程此略.

在定理 2 中，自由权矩阵间的关联系数 ρ_2 和 ρ_3 需靠经验预先给定，因此获得的 γ 往往不是最优值. 下面本文给出一种求 γ 最优解的迭代算法：

Step1. 初始化自由权矩阵关联系数 ρ_2 和 ρ_3, 并设置迭代次数 $i=0$, 期望 H_∞ 性能指标 γ', 以及迭代终止条件 $0<\varepsilon<1$, 最大迭代次数 I_{max}.

Step2. 对于给定的 ρ_2 和 ρ_3, 求解满足 LMI(10) 的凸优化问题 (9), 记 γ_i 为所得最优解.

Step3. 令 $i=i+1$, 固定在 Step2 中获得的矩阵 X 和 $Y_i(i=1,2,\cdots,q)$, 将 ρ_2 和 ρ_3 作为变量，求解满足 LMI(10) 的凸优化问题 (9), 记 γ_i 为当前所得最优解，同时确定下次迭代所需的 ρ_2 和 ρ_3.

Step4. 若 $i>I_{max}$, 或 $(\gamma_i-\gamma_{i-1})/\gamma_i\leqslant\varepsilon$, 或 $\gamma_i\leqslant\gamma'$, 则终止迭代，并计算输出 H_∞ 模糊状态反馈控制器增益矩阵 $K_i=Y_iX^{-\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,q)$; 否则转 Step2.

4 结论

本文研究了一类基于 T-S 模糊模型描述的不确定离散非线性时滞系统，给出了闭环系统的时滞相关稳定性充分条件和 H_∞ 模糊状态反馈控制器的设计方案．通过求解一个满足 LMI 约束条件的优化问题即可得出符合设计要求的控制器，应用方便．

References

1 Cao Y Y, Frank P M. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems *via* fuzzy control approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, **8**(2): 200～211

2 Cao Y Y, Frank P M. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems *via* linear Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **124**(2): 213～229

3 Lee K R, Kim J H, Jeung E T, Park H B. Output feedback robust H_∞ control of uncertain fuzzy dynamic systems with time-varying delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, **8**(6): 657～664

4 Zhang Y, Heng P A. Stability of fuzzy control systems with bounded uncertain delays. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, **10**(1): 92～96

5 Li C G, Wang H J, Liao X F. Delay-dependent robust stability of uncertain fuzzy systems with time-varying delays. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2004, **151**(4): 417～421

6 Guan X P, Chen C L. Delay-dependent guaranteed cost control for T-S fuzzy systems with time delays. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, **12**(2): 236～249

7 Xie L, de Souza C. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(8): 1188～1191

8 Wu M, He Y, She J H, Liu G P. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems. *Automatica*, 2004, **40**(8): 1435～1439

9 Yue D, Han Q L, Peng C. State feedback controller design of networked control systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2004, **51**(11): 640～644

10 Boyd S, Ghaoui E, Feron E, Balakrishnan V. Linear Matrix Inequality in Systems and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994. 22～85

陈志盛 博士，研究方向为非线性系统鲁棒控制与滤波．

(**CHEN Zhi-Sheng** Ph. D.. His research interests include robust control and filtering for nonlinear systems.)

彭 可 博士，副教授，研究方向为网络化控制系统及其应用．

(**PENG Ke** Ph. D., associate professor. His research interests include networked control system and its applicaion.)

李勇刚 博士，副教授，研究方向为智能集成建模、优化策略等．

(**LI Yong-Gang** Ph. D., associate professor. His research interests include intelligent modeling and optimization method.)

张泰山 教授，研究方向为智能控制理论．

(**ZHANG Tai-Shan** Professor. His research interest includes intelligent control theory.)