第 32 卷 第 5 期 自 动 化 学 报 Vol. 32, No. 5
2006 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA September, 2006

基于微分对策的最优状态观测器和最优状态反馈控制器的设计[1)]

年晓红 曹 莉
(中南大学信息科学与工程学院 长沙 410075)
(E-mail: xhnian@csu.edu.cn)

摘 要 研究了线性系统基于二次型指标的最优状态观测器和最优状态反馈控制器的设计问题. 将观测状态的状态反馈和状态误差的输出反馈分别作为两个对局方, 应用微分对策理论研究了系统的最优控制问题. 给出了最优状态观测器和基于状态观测器的最优状态反馈控制的存在性条件. 将系统的最优状态观测器和最优控制器的设计问题转化为一对 Riccati 方程的求解问题. 研究表明最优状态观测器在一般情况下不存在. 并进一步研究了基于状态观测器的次优控制问题, 给出了基于 LMI 的优化算法.

关键词 观测器, 最优控制, 微分对策, Riccati 方程
中图分类号 TP13; TP273

Design of Optimal Observer and Optimal Feedback Controller Based on Differential Game Theory

NIAN Xiao-Hong CAO Li
(*School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha* 410075)
(E-mail: xhnian@csu.edu.cn)

Abstract This paper deals with the problem of designing optimal state observers and optimal state feedback controllers for linear systems based on quadratic performance index. The theory of differential game is used to study the problem by assuming 'state feedback of observer state' as the first player and 'output feedback of state error' as the second player. The existence conditions for optimal observer and feedback controller are given and the solutions can be obtained by solving two algebraic Riccati equations. It is shown that the optimal state observer does not exist in general. Furthermore, the problem of designing suboptimal state feedback controllers based on state observers is studied and sufficient conditions are given in the forms of LMIs.

Key words Observer, optimal control, differential game, riccati equation

1 引言

众所周知, 基于状态观测器的控制系统的设计方法非常实用而且成熟, 被广泛应用于工程控制系统的设计中. 基于状态观测器的控制系统的设计是控制理论的一个非常活跃的

1) 国家自然科学基金项目 (60474029, 60404007, 60334030) 、中国博士后科学基金 (2005038558) 和湖南省自然科学基金重点项目 (00JJY1009) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60474029, 60404007, 60334030), China Postdoctoral Science Foundation (2005038558), and the Natural Science Foundation of Human Provincial of P. R. China (00JJY1009)
收稿日期 2005-7-20 收修改稿日期 2006-1-7
Received July 20, 2005; in revised form January 7, 2006

分支[1~12], 各种研究方法包括代数方法、几何方法、广义逆、奇异值分解方法和 Kronecker 积等方法均被用于状态观测器的设计中. 同时各种形式的状态观测器包括全维、降维、未知输出、泛函和 H_∞ 等均受到国内外学者的广泛关注. 早期对基于状态观测器的控制方法的研究见文献 [1 ~ 7]. 由于一般情况下系统的状态不能完全被检测, 因而基于状态观测器的设计方法具有更为广泛的适用性, 被很快引入到具有不确定性的控制系统的设计[2,5,8~11]和具有未知输入的控制系统的设计中[6,7,12]. 虽然有关二次型指标下基于状态观测器的最优控制设计方法已有研究, 然而, 有关二次型指标下的最优状态观测器和基于状态观测器的最优控制器的综合设计问题的研究却未见报道.

1990 年, Huang 和 Li[13] 证明了在一般情况下, 输出反馈控制在二次型指标下的最优解是不存在的. 由于状态观测器在本质上相当于一个关于状态误差的输出反馈, 因而在二次型指标下的最优观测器也应有类似的性质. 本文将主要研究二次型指标下的最优状态观测器和最优状态反馈控制器的综合设计问题. 将状态误差的输出反馈和观测状态的状态反馈看作微分对策的两个对局方, 应用微分对策理论给出了最优状态观测器和最优状态反馈控制器的存在条件及其应满足的代数 Riccati 方程. 研究结果表明, 在二次型指标下的最优观测器一般是不存在的. 为了解决一般情况下的状态观测器和最优状态反馈控制器的设计问题, 进一步研究了二次型指标下基于状态观测器的次优状态反馈控制器的设计方法.

2 问题表述

考虑如下线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2}$$

这里: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制向量, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ 为输出变量, 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ 为常数矩阵.

假定系统 (1), (2) 的状态未知, 为了镇定系统, 我们构造如下观测器

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + L(Cz(t) - y(t)) \tag{3}$$

这里: $z(t) \in \mathbb{R}^n$ 为观测器状态变量, $L \in \mathbb{R}^{n\times l}$ 为观测器增益矩阵. 考虑观测状态反馈控制器

$$u(t) = Kz(t) \tag{4}$$

镇定系统. 这里: $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为控制增益矩阵.

为了研究闭环系统的稳定性, 我们考虑系统的状态误差 $e(t) \triangleq x(t) - z(t)$. 则有如下方程

$$\dot{e}(t) = [A + LC]e(t)$$

于是得到如下关于状态和误差的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{e}(t) = [A + LC]e(t) \end{cases} \tag{5}$$

定义系统的性能指标:

$$J(K, L, x_0) = \int_0^\infty [x^{\mathrm{T}}(t)Q_1x(t) + e^{\mathrm{T}}(t)Q_2e(t) + x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}RKx(t) + e^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}SLCe(t)]\mathrm{d}t \tag{6}$$

这里：$Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, R \in \mathbb{R}^{m\times m}, S \in \mathbb{R}^{l\times l}$ 为正定矩阵，x_0 为初始状态.

定义 1. 若存在 K^*, L^* 使得

$$J(K^*, L^*, x_0) = \min_{K,L} J(K, L, x_0)$$

则当 $L = L^*$ 时称系统 (3) 为系统 (1) 的最优状态观测器，$u^*(t) = K^* z(t)$ 为基于最优观测器的最优状态反馈控制. 相应地，L^* 称为最优状态观测器增益矩阵，K^* 称为最优状态反馈增益矩阵.

本文的主要目标是研究最优状态观测器和基于最优状态观测器的最优状态反馈控制器的存在条件及其设计方法. 同时研究基于状态观测器的次优状态反馈控制器的存在条件及其设计方法.

3　主要结论

为了研究系统 (1) 的最优状态观测器和基于最优状态观测器的最优状态反馈控制器的设计，我们考虑如下微分对策模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{e}(t) = Ae(t) + v(t) \end{cases} \tag{7}$$

和性能指标函数

$$J(x(t), e(t), u(t), v(t), x_0) = \int_0^\infty [x^{\mathrm{T}}(t)Q_1x(t) + e^{\mathrm{T}}(t)Q_2e(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) + v^{\mathrm{T}}(t)Sv(t)]\mathrm{d}t \tag{8}$$

如果将系统的观测状态反馈 $u(t)$ 看成微分对策的一个对局方，而将状态误差的输出反馈 $v(t)$ 看成微分对策的另一对局方，则最优控制器 $u^*(t) = K^*z(t)$ 和最优观测器增益 L^* 的设计问题可用微分对策的理论来解决[14~16].

注 1. 当 $u(t) = Kz(t), v(t) = LCe(t)$ 时，系统 (7) 即为系统 (5).

取 Lyapunov 函数 $V(x(t), e(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)P_1x(t) + e^{\mathrm{T}}(t)P_2e(t)$, 则：

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t), e(t))|_{(7-8)} = {} & x^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1A]x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}P_1x(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P_1Bu(t) + \\ & e^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}P_2 + P_2A]e(t) + v^{\mathrm{T}}(t)P_2e(t) + e^{\mathrm{T}}(t)P_2v(t)\end{aligned}$$

定义 Hamiltonian 函数

$$\begin{aligned}H(x, e, u, v, x_0) = {} & \dot{V}(x(t), e(t))|_{(8-9)} + x^{\mathrm{T}}(t)Q_1x(t) + e^{\mathrm{T}}(t)Q_2e(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) + v^{\mathrm{T}}(t)Sv(t) = \\ & x^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1A]x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}P_1x(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P_1Bu(t) + \\ & e^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}P_2 + P_2A]e(t) + v^{\mathrm{T}}(t)P_2e(t) + e^{\mathrm{T}}(t)P_2v(t) + \\ & x^{\mathrm{T}}Q_1x(t) + e^{\mathrm{T}}(t)Q_2e(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) + v^{\mathrm{T}}(t)Sv(t)\end{aligned} \tag{9}$$

于是，Hamiltonian 函数存在极值的条件为

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u} &= 2B^{\mathrm{T}}P_1x(t) + 2R\tilde{u}(t) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial v} &= 2P_2e(t) + 2S\tilde{v}(t) = 0\end{aligned}$$

由以上两式可得

$$\begin{cases} \tilde{u}(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1x(t) \\ \tilde{v}(t) = -S^{-1}P_2e(t) \end{cases} \tag{10}$$

由于 $\dfrac{\partial^2 H}{\partial^2 u} = 2R > 0,\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial^2 v} = 2S > 0$, 故 Hamiltonian 函数存在极小值.

注 2. 由 (10) 可以看出, 最优状态反馈控制 $\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1x(t)$ 为系统状态 $x(t)$ 的线性函数，而非观测状态 $z(t)$ 的线性函数. 当用观测状态反馈控制器 $u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1z(t)$ 替代 $\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1x(t)$ 时总会有一定误差，从严格意义上讲，$u^*(t)$ 是次优控制律. 但考虑到系统的渐近稳定性，当 t 充分大时，$u^*(t) \approx \tilde{u}(t)$, 我们依然可以认为 $u^*(t)$ 是最优观测状态反馈控制律.

下面讨论基于状态观测器的最优状态反馈控制器的设计问题. 令

$$\begin{cases} u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1z(t) \\ v^*(t) = -S^{-1}P_2e(t) \end{cases} \tag{11}$$

注意到 $v(t) = -LCe(t)$, 故：$v^*(t) = -L^*Ce(t)$, 于是 L^* 由下式决定

$$L^*C = S^{-1}P_2 \tag{12}$$

将 $u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1x(t),\ v^*(t) = -S^{-1}P_2e(t)$ 代入 Hamiltonian 函数可得

$$\begin{aligned} H(x, e, u^*, v^*, x_0) = H(u^*, v^*, x, e, x_0, e_0) = \\ x^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1A - P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1 + Q_1]x(t) + \\ e^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}P_2 + P_2A + P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1 - P_2S^{-1}P_2 + Q_2]e(t) \end{aligned}$$

于是得到 $P_1,\ P_2$ 应满足的 Riccati 方程：

$$A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1A - P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1 + Q_1 = 0 \tag{13}$$

$$A^{\mathrm{T}}P_2 + P_2A + P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1 - P_2S^{-1}P_2 + Q_2 = 0 \tag{14}$$

于是有下面定理.

定理 1. 若存在正定矩阵 P_1, P_2 满足 Riccati 方程 (13), (14), 则系统 (5), (6) 在最优观测状态反馈控制器

$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1z(t) \tag{15}$$

作用下镇定，并且最优观测器增益由下式给出

$$L^*C = S^{-1}P_2 \tag{16}$$

系统的性能指标最小值为：

$$J(x, e, u, v) = x_0^{\mathrm{T}}P_1x_0 + e_0^{\mathrm{T}}P_2e_0 \tag{17}$$

证明. 只需证明闭环系统渐近稳定. 取 Lyapunov 函数 $V(x(t), e(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)P_1x(t) + e^{\mathrm{T}}P_2e(t)$, 则：

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), e(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1A - P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1 + Q_1]x(t) + \\ e^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}P_2 + P_2A + P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1 - P_2S^{-1}P_2 + Q_1]e(t) - \end{aligned}$$

$$x^{\mathrm{T}}(t)Q_1x(t)-e^{\mathrm{T}}(t)Q_2e(t)-u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)-v^{\mathrm{T}}(t)Sv(t)$$

若 Riccati 方程 (13), (14) 成立，则：

$$\dot V(x(t),e(t))=-x^{\mathrm{T}}(t)[Q_1+P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1]x(t)-v^{\mathrm{T}}(t)[Q_2+P_2S^{-1}P_2]v(t)<0 \tag{18}$$

因而闭环系统 (7), (8) 渐近稳定. 于是 $\lim\limits_{T\to\infty}x(T)=0$, $\lim\limits_{T\to\infty}e(T)=0$, $\lim\limits_{T\to\infty}z(T)=\lim\limits_{T\to\infty}[x(T)-e(T)]=0$, $\lim\limits_{T\to\infty}V(x(T),e(T))=0$. 对 (18) 两边在区间 $[0,T]$ 上积分并求当 $T\to\infty$ 时的极限可得 (17) 式. □

注 3. 由 (16) 可知：最优状态观测器存在的必要条件是：$C^{\mathrm{T}}C>0$. 若 $\mathrm{rank}(C)=n$ 且 C 行满秩，则最优状态观测器存在唯一，且最优观测器增益 $L=S^{-1}P_2C^{\mathrm{T}}$; 若 $\mathrm{rank}(C)=n$ 但 C 非行满秩，则行满秩最优状态观测器存在但不唯一.

注 4. 若 $\mathrm{rank}(C)<n$, 则代数方程 $LC=S^{-1}P_2$ 无解，因而最优观测器并不存在. 由于观测器可看成状态误差的输出反馈，因而这一结果与文 [15] 中关于输出反馈最优控制在一般情况下并不存在的结论是一致的.

为了解决一般情况下观测器和最优控制器的设计问题，我们修改系统的性能指标为：

$$J(x(t),e(t),u(t))=\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)Q_1x(t)+e^{\mathrm{T}}(t)[Q_2+C^{\mathrm{T}}C]e(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t \tag{19}$$

类似于上面讨论，我们有下面定理：

定理 2. 若存在正定矩阵 P_1,P_2 满足 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P_1+P_1A-P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1+Q_1=0 \tag{20}$$

$$A^{\mathrm{T}}P_2+P_2A+P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1-C^{\mathrm{T}}C+Q_2=0 \tag{21}$$

则系统 (5), (19) 在最优反馈控制器 (15) 作用下镇定，并且观测器增益 $L=P_2^{-1}C^{\mathrm{T}}$. 系统的性能指标 $J(x,e,u)=x_0^{\mathrm{T}}P_1x_0+e_0P_2e_0$.

下面将讨论次优控制器的设计问题，为此进一步简化系统的性能指标为

$$J(x(t),e(t),u(t))=\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+e^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}Ce(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t \tag{22}$$

定理 3. 若存在正定矩阵 X_1,X_2 满足如下线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} X_1A^{\mathrm{T}}+AX_1-BR^{-1}B^{\mathrm{T}} & X_1\\ X_1 & -Q^{-1}\end{bmatrix}<0 \tag{23}$$

$$A^{\mathrm{T}}X_2+X_2A+X_1^{-1}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}X_1^{-1}-C^{\mathrm{T}}C<0 \tag{24}$$

则系统 (5), (22) 在次优状态反馈控制器 $u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}X_1^{-1}z(t)$ 作用下渐近稳定，并且观测器增益 $L=X_2^{-1}C^{\mathrm{T}}$. 系统的性能指标满足：$J(x(t),e(t),u(t))<x_0^{\mathrm{T}}P_1x_0+e_0^{\mathrm{T}}P_2e_0$.

证明. 与定理 1 的证明类似，可知当如下不等式

$$A^{\mathrm{T}}P_1+P_1A-P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1+Q<0 \tag{25}$$

$$A^{\mathrm{T}}P_2+P_2A+P_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_1-C^{\mathrm{T}}C<0 \tag{26}$$

成立时，闭环系统 (5), (22) 渐近稳定. 若令：$X_1=P_1^{-1}$, $X_2=P_2$, 则 (25) 等价于 (23), 而 (26) 可写为 (24). □

4 结论

研究了线性系统基于二次型指标的最优状态观测器和基于观测器的最优状态反馈控制器的设计问题. 给出了最优状态观测器和基于观测器的最优状态反馈控制器的存在性条件并且可通过求解两个代数 Riccati 方程来计算. 研究结果表明, 若最优状态观测器存在, 则 $C^{\mathrm{T}}C > 0$, 且当 C 可逆时唯一. 同时还研究了基于状态观测器的次优状态反馈控制器的设计问题, 给出了线性矩阵不等式形式的充分条件.

References

1 Furuta K, Hara S, Mori S. A class of systems with the same observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, **21**(4): 572~576

2 Doyle J C, Stein G. Robustness and observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, **24**(4): 607~611

3 Bhattacharyya S P. Parameter invariant observers. *International Journal of Control*, 1980, **32**(6): 1127~1132

4 O'Reilly J. Observer for linear systems. New York: Academic Press, 1983

5 Barmish B R, Galimidi A R. Robustness of Luenberger observers: linear systems stabilized *via* nonlinear control. *Automatica*, **22**(4): 413~423

6 Kobayashi N, Nakamizo T. An observer design for linear systems with unknown inputs. *International Journal of Control*, 1982, **35**(4): 605~619

7 Kudva P, Viswanadham N, Ramakrishna A. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980, **25**(1): 113~115

8 Jabbari F, Schmitendorf W E. Effects of using observers on stabilization of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, **38**(2): 266~271

9 Petersen I R. A Riccati equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, **30**(9): 904~907

10 Petersen I R, McFarlance D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(9): 1971~1977

11 Jabbari F, Schmitendorf W E. Robust linear controllers using observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(2): 1509~1514

12 Xiong Y, Saif M. Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design. *Automatica*, 2003, **39**(8): 1389~1398

13 Huang L, Li Z. Solvable problem of quadratic optimal output feedback control. *Science in China*, 1990, **A-20**(7): 762~767

14 Basar T, Olsder G J. Dynamic Noncoorative Game Theory. London: Academic Press, 1982

15 Nian X H, Huang L. New development on differential game theory and its application. *Control & Decision*, 2004, **19**(2): 128~133

16 Nian X H. Suboptimal strategies of linear quadratic closed-loop differential games: An BMI approach. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(2): 216~222

年晓红 1985 年、1992 年和 2004 年分别于西北师范大学、山东大学和北京大学获学士、硕士和博士学位, 现为中南大学教授. 主要研究方向为鲁棒控制、微分对策理论和电机控制.

(**NIAN Xian-Hong** Received the B.S. degree, the M.S. degree and the Ph.D. degree from Northwest Normal University, Shandong University and Peking University in 1985, 1992 and 2004 respectively. He is a professor at Central South University. His research interests include robust control, theory of differential games, and induction motor control.)

曹 莉 2005 年于西北师范大学获学士学位, 现为中南大学硕士研究生. 主要研究方向为微分对策理论与协调控制.

(**CAO Li** Received her B.S. degree from Northwest Normal University in 2005. She is currently working toward the B.S. degree in Central South University. Her research interests include theory of differential games and cooperative control.)