

# 一类不确定系统的鲁棒可靠跟踪控制及其在飞行控制中的应用<sup>1)</sup>

戴诗陆 付俊 赵军

(东北大学信息科学与工程学院控制理论与导航技术研究所 沈阳 110004)  
(E-mail: dsl6666@tom.com)

**摘 要** 针对多面体不确定系统, 基于参数相关 Lyapunov 函数的方法, 研究了考虑执行器故障的可靠跟踪控制器的设计问题. 利用描述系统方法, 得到可靠跟踪控制器存在的充分条件. 状态反馈可靠跟踪控制器设计方法可以归结为求解一族线性矩阵不等式 (LMIs). 通过飞行控制系统的实例仿真验证了文中提出的设计方法的可行性.

**关键词** 多面体不确定, 执行器故障, 可靠跟踪控制, 飞行控制, 参数相关 Lyapunov 函数  
**中图分类号** TP202.1

## Robust Reliable Tracking Control for a Class of Uncertain Systems and Its Application to Flight Control

DAI Shi-Lu FU Jun ZHAO Jun

(*Institute of Control Theory and Navigation Technology, School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004*)

(E-mail: dsl6666@tom.com)

**Abstract** The problem of robust reliable tracking controller design against actuator faults for systems with polytopic type uncertainty is addressed based on the parameter-dependent Lyapunov function approach. A descriptor system approach is taken to derive a sufficient condition for the existence of a reliable tracking controller. A state feedback reliable tracking controller is designed by solving a set of linear matrix inequalities (LMIs). A flight control example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words** Polytopic type uncertainty, actuator faults, reliable tracking control, flight control, parameter-dependent Lyapunov function

## 1 引言

研究不确定系统的鲁棒稳定性是控制系统分析和综合的一个重要的内容, 二次稳定是一个非常重要的概念和方法<sup>[1]</sup>. 但二次稳定要求对于所有的不确定参数, 系统存在一个统一的 Lyapunov 函数. 显然这样的要求较为苛刻, 由此导出的稳定性条件具有较大的保守性. 为此, 不少学者试图寻找和系统的不确定参数相关的 Lyapunov 函数, 以减小设计的保守性<sup>[2,3]</sup>. 文献 [3] 采用了一种思想: 利用描述系统的方法, 消除了 Lyapunov 矩阵和系统

1) 国家自然科学基金 (60574013, 60274009) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60574013, 60274009)

收稿日期 2005-6-27 收修改稿日期 2006-1-26

Received June 27, 2005; in revised form January 26, 2006

参数矩阵之间的耦合, 再将解耦后的准则应用于多面体不确定系统的所有顶点, 获得了和系统不确定参数相关的 Lyapunov 函数, 所得结果具有较小的保守性.

在航空航天等控制系统中, 系统的安全性或可靠性对系统来说至关重要<sup>[4]</sup>. 近年来, 许多学者针对可靠控制的问题进行了大量研究并取得了许多成果<sup>[5~8]</sup>. 另一方面, 设计一个控制器使得受控系统的输出渐近跟踪给定的参考信号, 是一个既有理论意义又有实际意义的控制问题. 线性系统的跟踪控制已日趋完善, 但是可靠跟踪控制的研究非常有限<sup>[7,8]</sup>. 文献 [7] 基于  $LQ/H_\infty$  跟踪性能指标, 利用 LMI 技术给出了线性系统的可靠跟踪控制器的设计方法, 并将该方法应用于 F-16 歼击机模型中, 取得了较好的控制效果. 文献 [8] 针对一类具有结构不确定性的线性系统, 基于二次稳定的概念和方法, 利用 LMI 技术完成对可靠跟踪控制器的设计. 但是关于多面体不确定系统的可靠控制问题, 利用参数相关 Lyapunov 函数的方法进行可靠控制器设计的研究成果却十分罕见.

本文基于文献 [3] 的思想, 研究了多面体不确定系统的鲁棒可靠跟踪控制问题. 文中考虑一类更实际, 更一般的连续故障模型, 针对多面体不确定系统, 采用参数相关 Lyapunov 函数的方法, 利用 LMI 技术, 给出了此类不确定系统的可靠跟踪控制器存在的充分条件, 并进行可靠跟踪控制器的设计. 通过 F-18 歼击机纵向飞行的俯仰角速率跟踪控制的实例仿真验证了文中提出的设计方法的可行性. 并比较标准跟踪控制系统和可靠跟踪控制系统, 进一步说明对系统进行可靠跟踪控制的必要性.

记号: 为简化符号, 文中所有单位矩阵都用  $I$  表示, 不同位置的  $I$  将表示不同维数单位矩阵; 在对称矩阵中 “\*” 代表对应块的转置矩阵.

## 2 问题描述和准备知识

考虑如下具有不确定参数的连续系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{x}(t) + B(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{y}(t) = C(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{x}(t) \quad (1)$$

其中,  $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$  是系统的状态,  $\boldsymbol{y}(t) \in R^p$  是系统输出,  $\boldsymbol{u}(t) \in R^m$  是控制输入. 假定系统参数矩阵  $A(\boldsymbol{\theta}), B(\boldsymbol{\theta}), C(\boldsymbol{\theta})$  均为不确定性矩阵, 但可以表达为某些已知矩阵的凸组合, 即  $(A(\boldsymbol{\theta}), B(\boldsymbol{\theta}), C(\boldsymbol{\theta})) \in \Omega_1$ ,

$$\Omega_1 \triangleq \{(A(\boldsymbol{\theta}), B(\boldsymbol{\theta}), C(\boldsymbol{\theta})) | (A(\boldsymbol{\theta}), B(\boldsymbol{\theta}), C(\boldsymbol{\theta})) = \sum_{i=1}^N \theta_i (A_i, B_i, C_i); \theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \theta_i = 1; i = 1, \dots, N\} \quad (2)$$

$(A_i, B_i, C_i)$  称为顶点矩阵 (vertices). 满足式 (2) 的不确定系统 (1) 称为多面体不确定系统. 假定实值参数向量  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_N]^T \in R^N$  是时变的且任意时刻  $\theta_i$  的导数满足<sup>[3]</sup>

$$\dot{\theta}_i \leq v_i \theta_i \quad (3)$$

其中,  $v_i$  为已知常数.

考虑执行器连续故障模型<sup>[8]</sup>

$$\boldsymbol{u}^f(t) = F\boldsymbol{u}(t) \quad (4)$$

其中,  $F$  为执行器连续故障矩阵,  $F = \text{diag}\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ ,  $0 \leq f_{lj} \leq f_j \leq f_{uj}$ ,  $f_{uj} \geq 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

引入如下矩阵

$$\begin{aligned} F_0 &= \text{diag}\{f_{01}, f_{02}, \dots, f_{0m}\}, W = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_m\} \\ L &= \text{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_m\}, |L| = \text{diag}\{|l_1|, |l_2|, \dots, |l_m|\} \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $f_{0j} = \frac{1}{2}(f_{uj} + f_{lj})$ ,  $w_j = \frac{f_{uj} - f_{lj}}{f_{uj} + f_{lj}}$ ,  $l_j = \frac{f_j - f_{0j}}{f_{0j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

由式 (5), 得

$$F = F_0(I + L), |L| \leq W \leq I \quad (6)$$

**注 1.** 当  $f_j = 0$  时, 表示执行器第  $j$  条通道信号中断; 当  $f_j = 1$  时, 表示执行器第  $j$  条通道正常工作; 当  $0 \leq f_{lj} < f_j < f_{uj}$ ,  $f_{uj} \geq 1$  且  $f_j \neq 1$  时, 表示第  $j$  条通道部分失效, 部分失效意指, 由于部件老化和干扰等原因使部件输出信号偏离准确值.

考虑满足式 (2) 和式 (3) 的多面体不确定系统 (1) 和连续故障模型 (4), 设计状态反馈控制器, 对于所有允许执行器故障矩阵  $F$ , 满足:

- 1) 闭环系统鲁棒渐近稳定;
- 2) 输出  $Sy(t)$  能够渐近跟踪参考信号  $r(t)$ , 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, e(t) = r(t) - Sy(t) \quad (7)$$

其中,  $S \in R^{r \times p}$  是一个已知的常数矩阵.

按经典控制理论中偏差跟踪的思想, 在控制器设计中引入跟踪误差的积分项可有效地消除稳态跟踪误差<sup>[7]</sup>. 因此在以下增广系统的描述中, 包含了跟踪误差的积分项.

在考虑执行器连续故障模型 (4) 的情况下, 由系统 (1) 和式 (7) 构成增广系统

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -SC(\theta) \\ 0 & A(\theta) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^t e(t)dt \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B(\theta) \end{bmatrix} Fu(t) + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (8)$$

定义状态向量  $\zeta(t) = [(\int_0^t e(t)dt)^T, x^T(t)]^T$ , 则系统 (8) 可描述为

$$\dot{\zeta}(t) = \tilde{A}(\theta)\zeta(t) + \tilde{B}(\theta)Fu(t) + \tilde{C}r(t) \quad (9)$$

其中系统参数矩阵  $\tilde{A}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -SC(\theta) \\ 0 & A(\theta) \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{B}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ B(\theta) \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{C} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ .

设计状态反馈控制器

$$u(t) = K\zeta(t) = K_e \int_0^t e(t)dt + K_x x(t) \quad (10)$$

式中,  $K = [K_e, K_x] \in R^{m \times (r+n)}$ . 则系统 (9) 的闭环系统为

$$\dot{\zeta}(t) = \tilde{A}_{cl}(\theta)\zeta(t) + \tilde{C}r(t) \quad (11)$$

其中,  $\tilde{A}_{cl}(\theta) = \tilde{A}(\theta) + \tilde{B}(\theta)FK$ . 因此, 有

$$\tilde{A}_{cl}(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i \tilde{A}_{cli} \quad (12)$$

其中,  $\tilde{A}_{cli} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i FK$ ,  $\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & -SC_i \\ 0 & A_i \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix}$ .

**定义 1.** 对于增广系统 (9), 如果存在控制器 (10) 使系统的输出  $Sy(t)$  能够渐近跟踪参考信号  $r(t)$ , 即使  $\lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - Sy(t)) = 0$  成立, 则称系统 (9) 为可靠跟踪控制系统, 控制器 (10) 称为可靠跟踪控制器; 当故障矩阵  $F \equiv I$  时, 系统 (9) 变为

$$\dot{\zeta}(t) = \tilde{A}(\theta)\zeta(t) + \tilde{B}(\theta)u(t) + \tilde{C}r(t) \quad (13)$$

称系统 (13) 为标准跟踪控制系统, 其对应的控制器  $u(t)$  称为标准跟踪控制器.

**注 2.** 标准控制系统是指在设计控制器时不考虑故障, 而不是系统不能发生故障.

**引理 1**<sup>[8]</sup>. 设  $R_1, R_2$  为适维常值矩阵,  $U$  为正定对角矩阵,  $\Sigma$  为时变适维对角阵,  $|\Sigma| \leq U$ , 则  $R_1\Sigma R_2 + R_2^T\Sigma^T R_1^T \leq \alpha R_1 U R_1^T + \alpha^{-1} R_2^T U R_2$ . 其中,  $\alpha > 0$ ,  $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q\}$ ,  $|\Sigma| = \text{diag}\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, \dots, |\sigma_q|\}$ .

**引理 2**<sup>[7]</sup>. 对于系统 (9), 如果存在控制器 (10), 使闭环系统 (11) 内部稳定, 则此控制器也就能使原系统 (1) 渐近稳定且输出  $Sy(t)$  能够渐近跟踪参考信号  $r(t)$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

### 3 主要结果

本节首先研究系统 (9) 的鲁棒可靠跟踪控制器存在的充分条件, 然后分别给出标准跟踪控制系统 (13) 和可靠跟踪控制系统 (9) 对应的控制器的设计方法.

定义微分信号  $\eta(t) = \dot{\zeta}(t)$ , 并定义变量为  $\bar{\zeta}(t) = [\zeta^T, \eta^T]^T$ , 则系统 (9) 可以等价转化为如下的描述系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{\zeta}}(t) = \eta(t) \\ 0 = -\eta(t) + \tilde{A}(\theta)\zeta(t) + \tilde{B}(\theta)Fu(t) + \tilde{C}r(t) \end{cases} \quad (14)$$

或者

$$E\dot{\bar{\zeta}}(t) = \bar{A}(\theta)\bar{\zeta}(t) + \bar{B}(\theta)Fu(t) + \bar{C}r(t) \quad (15)$$

其中, 系统参数矩阵  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \tilde{A}(\theta) & -I \end{bmatrix}$ ,  $\bar{B}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}(\theta) \end{bmatrix}$ ,  $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C} \end{bmatrix}$ .

下面定理给出了系统 (9) 鲁棒可靠跟踪控制器存在的一个充分条件.

**定理 1.** 考虑系统 (9), 如果存在常数矩阵  $X_2, Y$  和正定矩阵  $X_{1i} > 0, i = 1, 2, \dots, N$ , 对所有允许的故障矩阵  $F$ , 使得下面一族 LMIs

$$\begin{bmatrix} X_2^T \tilde{A}_i^T + \tilde{A}_i X_2 + \tilde{B}_i F Y + Y^T F \tilde{B}_i^T + v_i X_{1i} & * \\ \tilde{A}_i X_2 + \tilde{B}_i F Y + X_{1i} - X_2^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

成立, 则存在状态反馈控制器 (10), 使得系统 (9) 内部稳定. 其中增益矩阵  $K = Y X_2^{-1}$ .

**证明.** 由式 (3) 和式 (16), 得

$$\begin{bmatrix} X_2^T \tilde{A}_i^T + \tilde{A}_i X_2 + \tilde{B}_i F Y + Y^T F \tilde{B}_i^T + X_{1i} \dot{\theta}_i / \theta_i & * \\ \tilde{A}_i X_2 + \tilde{B}_i F Y + X_{1i} - X_2^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

令  $P_2 = X_2^{-1}$ ,  $P_{1i} = X_2^{-T} X_{1i} X_2^{-1} > 0$ , 对不等式 (17) 左边分别左乘矩阵  $\text{diag}\{X_2^{-T}, X_2^{-T}\}$ , 右乘矩阵  $\text{diag}\{X_2^{-1}, X_2^{-1}\}$ , 不等式 (17) 等价于

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{cli}^T P_2 + P_2^T \tilde{A}_{cli} + P_{1i} \dot{\theta}_i / \theta_i & * \\ P_2^T \tilde{A}_{cli} + P_{1i} - P_2 & -P_2 - P_2^T \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

由式 (18) 得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tilde{A}_{cl}^T(\boldsymbol{\theta})P_2 + P_2^T\tilde{A}_{cl}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{dP_1(\boldsymbol{\theta})}{dt} & * \\ P_2^T\tilde{A}_{cl}(\boldsymbol{\theta}) + P_1(\boldsymbol{\theta}) - P_2 & -P_2 - P_2^T \end{bmatrix} = \\ & \sum_{i=1}^N \theta_i \begin{bmatrix} \tilde{A}_{cli}^T P_2 + P_2^T \tilde{A}_{cli} + P_{1i} \dot{\theta}_i / \theta_i & * \\ P_2^T \tilde{A}_{cli} + P_{1i} - P_2 & -P_2 - P_2^T \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

对于闭环系统 (11) 不考虑外部输入, 取参数相关 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\theta}) = \bar{\boldsymbol{\zeta}}^T E P(\boldsymbol{\theta}) \bar{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{\zeta}^T P_1(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\zeta} \quad (20)$$

其中,  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $P(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} P_1(\boldsymbol{\theta}) & 0 \\ P_2 & P_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \theta_i \begin{bmatrix} P_{1i} & 0 \\ P_2 & P_2 \end{bmatrix}$ ,  $P_1(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \theta_i P_{1i} > 0$ ,  $P_{1i} = P_{1i}^T > 0$ .

根据式 (14) 和式 (15), 则 Lyapunov 函数 (20) 对时间  $t$  的导数

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\theta}) = & 2\boldsymbol{\zeta}^T P_1^T(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \boldsymbol{\zeta}^T \frac{dP_1(\boldsymbol{\theta})}{dt} \boldsymbol{\zeta} = 2[\boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\eta}^T] P^T(\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\zeta}} \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\zeta}^T \frac{dP_1(\boldsymbol{\theta})}{dt} \boldsymbol{\zeta} = \\ & \bar{\boldsymbol{\zeta}}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_{cl}^T(\boldsymbol{\theta})P_2 + P_2^T\tilde{A}_{cl}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{dP_1(\boldsymbol{\theta})}{dt} & * \\ P_2^T\tilde{A}_{cl}(\boldsymbol{\theta}) + P_1(\boldsymbol{\theta}) - P_2 & -P_2 - P_2^T \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\zeta}} \end{aligned} \quad (21)$$

因此  $\dot{V}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\theta}) < 0$ ,  $\forall \boldsymbol{\zeta} \neq 0$ , 根据 Lyapunov 稳定性理论, 系统 (9) 内部稳定.  $\square$

**注 3.** 在定理 1 中, 多面体的每个顶点  $i$  允许有不同的正定矩阵  $X_{1i}$  满足不等式 (16). 用多面体的各个顶点对应不同的正定矩阵  $X_{1i}$  替代二次稳定性要求对于所有顶点系统存在一个统一的正定矩阵  $X_1$ , 将有利于降低二次稳定性概念中由于采用一个统一的正定矩阵而引入的保守性.

**注 4.** 对于系统 (9), 当不考虑执行器故障且不考虑跟踪控制问题时, 则系统 (9) 就退化为文献 [3] 的系统 (7), 本文的定理 1 的式 (16) 亦相应的退化为文献 [3] 定理 2 的式 (16). 故本文的定理 1 是文献 [3] 定理 2 的推广.

下面给出标准跟踪控制系统的控制器存在的充分条件和 LMI 设计方法. 根据引理 2 和定理 1, 当  $F = I$  时, 可得如下的推论.

**推论 1.** 对于标准跟踪控制系统 (13), 如果存在常数矩阵  $X_{2s}$ ,  $Y_s$  和正定矩阵  $X_{1si} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 使得下面一族 LMIs

$$\begin{bmatrix} X_{2s}^T \tilde{A}_i^T + \tilde{A}_i X_{2s} + \tilde{B}_i Y_s + Y_s^T \tilde{B}_i^T + v_i X_{1si} & * \\ \tilde{A}_i X_{2s} + \tilde{B}_i Y_s + X_{1si} - X_{2s}^T & -X_{2s} - X_{2s}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

成立, 则存在状态反馈控制律  $\boldsymbol{u}(t) = K_s \boldsymbol{\zeta}(t)$ , 使系统 (13) 内部稳定, 即使原系统 (1) 渐近稳定且输出  $S\boldsymbol{y}(t)$  能够渐近跟踪参考信号  $\boldsymbol{r}(t)$ . 其中增益矩阵  $K_s = Y_s X_{2s}^{-1}$ .

考虑执行器故障模型 (4), 下面给出可靠跟踪控制系统状态反馈控制器的设计方法.

**定理 2.** 考虑可靠跟踪控制系统 (9), 如果存在常数  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ , 常数矩阵  $X_{2r}, Y_r$  和正定矩阵  $X_{1ri} > 0, i = 1, 2, \dots, N$ , 使得不等式

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i X_{2r} + \tilde{B}_i F_0 Y_r + X_{2r}^T \tilde{A}_i^T + Y_r^T F_0 \tilde{B}_i^T + v_i X_{1ri} & * & * & * & * \\ \tilde{A}_i X_{2r} + \tilde{B}_i F_0 Y_r - X_{2r}^T + X_{1ri} & -X_{2r} - X_{2r}^T & * & * & * \\ W^{1/2} Y_r & 0 & -(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} I & * & * \\ W^{1/2} F_0 \tilde{B}_i^T & 0 & 0 & -\alpha_1 I & * \\ 0 & W^{1/2} F_0 \tilde{B}_i^T & 0 & 0 & -\alpha_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

成立, 则存在可靠状态反馈控制律  $u(t) = K_r \zeta(t)$ , 使系统 (9) 内部稳定, 即使原系统 (1) 渐近稳定且输出  $Sy(t)$  能够渐近跟踪参考信号  $r(t)$ . 其中增益矩阵  $K_r = Y_r X_{2r}^{-1}$ .

**证明.** 由式 (6) 和式 (16) 有

$$\begin{bmatrix} X_{2r}^T \tilde{A}_i^T + \tilde{A}_i X_{2r} + \tilde{B}_i F_0 Y_r + Y_r^T F_0 \tilde{B}_i^T + v_i X_{1ri} & * \\ \tilde{A}_i X_{2r} + \tilde{B}_i F_0 Y_r + X_{1ri} - X_{2r}^T & -X_{2r} - X_{2r}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{2r}^T \tilde{A}_i^T + \tilde{A}_i X_{2r} + \tilde{B}_i F_0 Y_r + Y_r^T F_0 \tilde{B}_i^T + v_i X_{1ri} & * \\ \tilde{A}_i X_{2r} + \tilde{B}_i F_0 Y_r + X_{1ri} - X_{2r}^T & -X_{2r} - X_{2r}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_i F_0 L Y_r + (\tilde{B}_i F_0 L Y_r)^T & * \\ \tilde{B}_i F_0 L Y_r & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

根据引理 1, 式 (24) 的最后一项

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_i F_0 L Y_r + (\tilde{B}_i F_0 L Y_r)^T & * \\ \tilde{B}_i F_0 L Y_r & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} \tilde{B}_i F_0 W (\tilde{B}_i F_0)^T + (\alpha_1 + \alpha_2) Y_r^T W Y_r & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1} \tilde{B}_i F_0 W (\tilde{B}_i F_0)^T \end{bmatrix} \quad (25)$$

由式 (23)~(25) 及 Schur 补引理得

$$\begin{bmatrix} X_{2r}^T \tilde{A}_i^T + \tilde{A}_i X_{2r} + \tilde{B}_i F_0 Y_r + Y_r^T F_0 \tilde{B}_i^T + v_i X_{1ri} & * \\ \tilde{A}_i X_{2r} + \tilde{B}_i F_0 Y_r + X_{1ri} - X_{2r}^T & -X_{2r} - X_{2r}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

根据引理 2 和定理 1, 可知定理 2 获证.  $\square$

## 4 仿真实例

考虑 F-18 歼击机纵向飞行的线性化运动模型<sup>[9]</sup>

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = A_{long} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + B_{long} \begin{bmatrix} \delta_E \\ \delta_{PTV} \end{bmatrix} \quad (27)$$

其中系统状态变量  $\alpha, q$  分别代表迎角和俯仰角速率; 控制输入  $\delta_E, \delta_{PTV}$  分别代表升降舵和油门杆的偏转角. 系统参数矩阵:

$$A_{long}^{m7h14} = \begin{bmatrix} -1.175 & 0.9871 \\ -8.458 & -0.8776 \end{bmatrix}, B_{long}^{m7h14} = \begin{bmatrix} -0.194 & -0.03593 \\ -19.29 & -3.803 \end{bmatrix}, A_{long}^{m85h5} = \begin{bmatrix} -2.328 & 0.9831 \\ -30.44 & -1.493 \end{bmatrix} \\ B_{long}^{m85h5} = \begin{bmatrix} -0.3012 & -0.05866 \\ -38.43 & -7.815 \end{bmatrix}, A_{long}^{m9h10} = \begin{bmatrix} -2.452 & 0.9856 \\ -38.61 & -1.34 \end{bmatrix}, B_{long}^{m9h10} = \begin{bmatrix} -0.2757 & -0.05226 \\ -37.36 & -7.247 \end{bmatrix}$$

通常一个飞机动态系统有多个工作点, 在固定的工作点, 系统参数矩阵为常值, 当工作点变化时, 系统的参数矩阵也将随着变化. 如顶点矩阵  $A_{long}^{m7h14}$  表示在高度为 14km, 马

赫数为 0.7 的情况下, 顶点矩阵  $A$  取值. 本例子将对 F-18 歼击机俯仰角速率跟踪控制进行设计. 取  $r(t) = 1 \text{ rad/s}$ ,  $S = 1$ ,  $N = 3$ ,  $C_1 = C_2 = C_3 = [0 \ 1]$ ,  $v_1 = v_2 = v_3 = 1$ .

对系统 (27), 根据推论 1 设计出如下的标准控制器增益矩阵  $K_s$ ; 取故障矩阵  $F = \text{diag}\{f_1, f_2\}$ ,  $0 \leq f_1 \leq 1.2$ ,  $f_2 = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , 按定理 2 对系统 (27) 设计出如下的可靠跟踪控制器增益矩阵  $K_r$ .

$$K_s = \begin{bmatrix} -10.8704 & -4.2619 & 6.4305 \\ 52.7429 & 17.1573 & -31.2326 \end{bmatrix}, K_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0001 \\ -2.5210 & -4.4346 & 1.5976 \end{bmatrix}$$

下面将对标准跟踪控制系统和可靠跟踪控制系统进行比较.

当执行器不发生故障时, 标准跟踪控制系统和可靠跟踪控制系统在相应的控制器作用下都能使其对应的闭环系统渐近稳定, 且输出  $Sy(t)$  能够渐近跟踪参考信号  $r(t)$ , 如图 1 和图 2 所示.

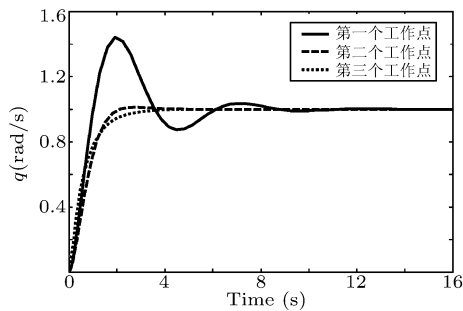


图 1 标准跟踪控制系统不发生故障俯仰角速率跟踪曲线

Fig. 1 The pitch rate tracking curve of standard control with no fault

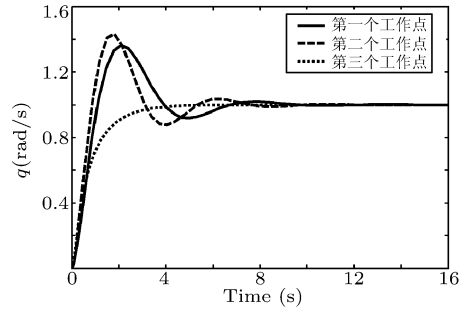


图 2 可靠跟踪控制系统不发生故障俯仰角速率跟踪曲线

Fig. 2 The pitch rate tracking curve of reliable control with no fault

现假定执行器发生故障  $F = \text{diag}\{0, 1\}$ , 其描述的故障为执行器第一条通道即升降舵的执行机构完全失效, 执行器第二条通道即油门杆的偏转角执行机构未发生任何故障. 此时, 由标准控制器构成的闭环系统将失去稳定 (图 3); 但由可靠跟踪控制器构成的闭环系统仍然渐近稳定, 且输出  $Sy(t)$  能够渐近跟踪参考信号  $r(t)$ , 如图 4 所示.

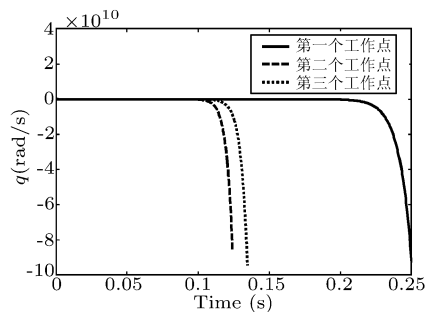


图 3 标准跟踪控制系统发生故障俯仰角速率跟踪曲线

Fig. 3 The pitch rate tracking curve of standard control with fault

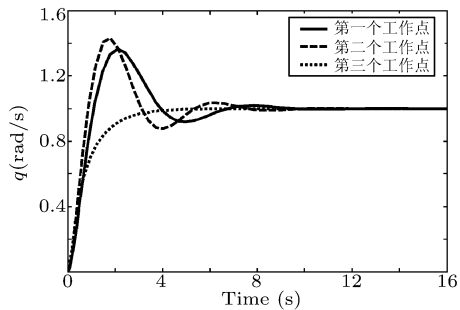


图 4 可靠跟踪控制系统发生故障俯仰角速率跟踪曲线

Fig. 4 The pitch rate tracking curve of reliable control with fault

## 5 结束语

针对多面体不确定系统, 通过利用描述系统方法, 引入辅助变量获得了正定的 Lyapunov 矩阵和系统参数矩阵具有分离特性的可靠控制器存在的充分条件. 并给出了标准跟踪控制器和可靠跟踪控制器的设计方法. 通过飞行控制系统的实例仿真验证了文中给出的设计方法的可行性. 并比较标准跟踪控制系统和可靠跟踪控制系统, 进一步说明对系统进行可靠跟踪控制的必要性.

## References

- 1 Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and  $H_\infty$  control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(3): 356~361
- 2 Gahinet P, Apkarian P, Chilali M. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(3): 436~442
- 3 Cao Y Y, Lin Z. A descriptor system approach to robust stability analysis and controller synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(11): 2081~2084
- 4 Jin J. Fault-tolerant control systems: an introductory overview. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(1): 161~174
- 5 Veillette R J, Medanic J V, Perkins W R. Design of reliable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(3): 290~304
- 6 Seo C J, Kim B K. Robust and reliable  $H_\infty$  control for linear systems with parameter uncertainty and actuator failure. *Automatica*, 1996, **32**(3): 465~467
- 7 Liao F, Wang J L, Yang G H. Reliable robust flight tracking control: an LMI approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, **10**(1): 76~89
- 8 Yao B, Wang F Z, Zhang Q L. LMI-based design of reliable tracking controller. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(6): 863~870
- 9 Yang G H, Lum K Y. Gain-scheduled flight control *via* state feedback. In: Proceedings of the American Control Conference. Denver, Colorado: American Automatic Control Council, 2003. 3484~3489

**戴诗陆** 东北大学博士生. 研究兴趣是鲁棒控制、可靠控制.

(**DAI Shi-Lu** Ph.D. candidate at Northeastern University. His research interests include robust control and reliable control.)

**付俊** 东北大学博士生. 研究兴趣是非线性系统、自适应控制及其在电力系统中的应用.

(**FU Jun** Ph.D. candidate at Northeastern University. His research interests include nonlinear systems, adaptive control, and applications in power systems.)

**赵军** 东北大学教授、博士生导师. 主要研究兴趣是混杂系统、非线性系统、几何控制理论, 切换控制.

(**ZHAO Jun** Professor of Northeastern University. His research interests include nonlinear system, hybrid system, geometric control theory, and switching control.)