

非参数不确定系统的有限时间迭代学习控制

齐丽强¹ 孙明轩¹ 管海娃^{1,2}

摘要 针对任意初态情形, 引入初始修正作用, 研究一类非参数不确定时变系统能够达到实际完全跟踪性能的迭代学习控制方法. 采用 Lyapunov-like 综合, 设计迭代学习控制器处理不确定性时变系统非参数化问题, 其中含有有限时间控制作用, 以实现在预先指定区间上的零误差跟踪. 并且, 运用完全限幅学习机制, 保证闭环系统中各变量的一致有界性以及跟踪误差的一致收敛性. 仿真结果表明了所提出控制方法的有效性.

关键词 迭代学习控制, 有限时间控制, 非参数化, 不确定时变系统

引用格式 齐丽强, 孙明轩, 管海娃. 非参数不确定系统的有限时间迭代学习控制. 自动化学报, 2014, 40(7): 1320–1327

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.01320

Finite-time Iterative Learning Control for Systems with Nonparametric Uncertainties

QI Li-Qiang¹ SUN Ming-Xuan¹ GUAN Hai-Wa^{1,2}

Abstract This paper presents an iterative learning control approach for systems with nonparametric uncertainties, which achieves practical complete tracking in the presence of arbitrary initial state errors. Based on Lyapunov-like synthesis, a learning controller is designed for handling uncertainties, without any parametrization. For the controller design, an initial rectifying action is introduced such that the tracking error will converge to zero over a pre-specified interval as iteration increases. With the fully-saturated learning mechanisms, the uniform boundedness of all variables in the closed-loop and, in turn, the uniform convergence of the tracking error are guaranteed. The effectiveness of the proposed control method is demonstrated by the presented numerical results.

Key words Iterative learning control, finite-time control, nonparametrization, uncertain time-varying systems

Citation Qi Li-Qiang, Sun Ming-Xuan, Guan Hai-Wa. Finite-time iterative learning control for systems with nonparametric uncertainties. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(7): 1320–1327

实际场合存在许多有限作业区间上运行的对象、系统和过程, 实现这类系统有限作业区间上对期望轨迹的完全跟踪是一种诱人的控制性能. 当控制对象完成重复作业时, 迭代学习控制是一种适用的控制技术. 通过足够多次的重复, 这种控制技术可实现完全跟踪^[1].

应用迭代学习控制技术, 系统在每次迭代时需初始定位, 要求系统的初始位置严格位于期望轨迹的起始点. 由于系统实际重复精度的限制, 初始定位误差难以避免. 这样, 在任意初态情形下提高跟踪性能的迭代学习控制技术是值得研究的课题. 实际完全跟踪 (Practical complete tracking, PCT) 控制

追求在预先指定区间 $[\Delta, T]$ 上的跟踪性能 ($\Delta > 0$), 它不像传统迭代学习控制技术那样企图达到区间 $[0, T]$ 上的完全跟踪. 在 PCT 控制下, 原有的严格初始定位要求被放宽, 允许受控对象在每次迭代时置任意初态.

在基于压缩映射分析的迭代学习控制方法的研究中, 已有的研究注重固定初始误差问题的解决^[2–5]. 文献 [2] 提出引入脉冲作用, 以实现完全跟踪性能, 但理想脉冲作用的实现却是一个难题. 文献 [3] 首先讨论 D 型和 PD 型学习算法在固定初始偏移下的极限轨迹, 其中 PD 型学习算法能够实现沿时间轴的渐近跟踪. 我们知道, 仅能达到沿时间轴的渐近跟踪将失去迭代学习控制早期提法中的完全跟踪特点. 改进的 PCT 跟踪控制结果见文献 [4]. 通过引入初始修正作用, 文献 [5] 提出的学习控制方法能够在预先指定的区间上实现完全跟踪效果, 即 PCT 跟踪性能, 其中的初始段轨迹是可以预先规划的. 初始修正的幅值是有限的, 克服了脉冲作用在实现时的难题. 值得注意的是, 对于任意初态, 基于压缩映射的迭代学习控制对一般系统仍无有效方案.

基于 Lyapunov-like 方法的迭代学习控制技术

收稿日期 2013-08-21 录用日期 2013-10-24
Manuscript received August 21, 2013; accepted October 24, 2014

国家自然科学基金 (61174034, 61374103) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61174034, 61374103)

本文责任编辑 王占山
Recommended by Associate Editor WANG Zhan-Shan

1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023 2. 温州科技职业学院
温州 325006

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of
Technology, Hangzhou 310023 2. Wenzhou Vocational College
of Science and Technology, Wenzhou 325006

越来越受到人们的关注^[6-8]. 这类方法能够有效处理时变参数系统, 任意初态下以及非一致轨迹下的迭代学习控制问题也都迎刃而解. 文献 [9] 引入时变边界层, 由于边界层随时间单调减, 且收敛于 0, 通过学习, 被边界层限定的跟踪误差也渐近收敛于 0. 文献 [10] 总结了五种初始条件下的学习控制结果. 文献 [11] 应用 Lyapunov-like 方法解决了非一致轨迹下的迭代学习控制问题. 文献 [12] 针对一类离散时变不确定系统, 在任意初态以及迭代可变轨迹下, 提出了一种离散自适应迭代学习控制方法. 文献 [13] 针对存在扰动的未知非线性系统, 利用小波逼近将系统参数化, 结合变结构控制技术, 提出了一种鲁棒迭代学习控制算法. 文献 [14] 首先针对一阶未知非线性参数化周期时滞系统, 设计了一种自适应学习控制方案, 并将结果推广到一类含有混合参数的高阶非线性系统. 文献 [15] 研究含有迭代可变的时变参数的不确定系统, 基于高阶内模设计参数学习律. 文献 [16] 借助初始修正吸引子概念, 给出了一种实现 PCT 控制性能的有限时间迭代学习控制方法. 文献 [17] 通过对于期望误差轨迹, 设计能够实现期望误差轨迹完全跟踪的学习算法, 放宽了初始定位条件, 并分别讨论了定常参数、时变参数以及复合参数三种情况.

在 Lyapunov-like 综合迭代学习控制方面, 已发表的相关文献多研究系统可参数化 (甚至控制增益已知) 情形^[6], 或研究控制增益未知但与状态无关的情形^[7-8]. 文献 [18] 通过状态反馈处理系统中非参数化不确定性, 提出的鲁棒迭代学习控制方法没有触及状态依赖的控制增益问题. 为了处理与状态相关的控制增益, 文献 [19] 设计一种状态反馈迭代学习控制, 文中假定控制增益有上下界, 并设定其他不确定部分可参数化. 针对非线性参数化系统, 文献 [20] 讨论了完全限幅学习下的算法收敛性.

本文讨论任意初态下的一类含有状态依赖控制增益的非参数不确定系统在预定区间上的完全跟踪控制问题. 借助于初始修正吸引子概念^[16], 以 Lyapunov-like 方法设计有限时间迭代学习控制器. 引入的初始修正作用能够在任意初态下的预先指定区间上的完全跟踪. 同时, 完全限幅学习机制导致系统中各变量的一致有界性以及跟踪误差的一致收敛性.

1 问题的提出与准备

考虑下述二阶非线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) + g(x, v, t)u \\ y = x \end{cases} \quad (1)$$

其中, x 和 v 是系统的状态分量, u 和 y 分别是输入和输出变量; $f(x, v, t)$ 和 $g(x, v, t)$ 是系统中的非参数化不确定性部分, $f(x, v, t)$ 为一未知的连续非线性函数, $g(x, v, t)$ 为一未知的连续可微非线性函数. 当系统在 $[0, T]$ 上重复运行时, 以下标 k 标记重复运行的次数. 期望跟踪轨迹为二阶连续可导的 $y_d, t \in [0, T]$. 记跟踪误差 $e_k = y_k - y_d$.

对系统 (1) 作如下假设:

假设 1. 存在已知的连续函数 $g_1(x_k, v_k, t)$ 和 $g_2(x_k, v_k, t)$, 满足

$$0 < g_1(x_k, v_k, t) \leq g(x_k, v_k, t) \leq g_2(x_k, v_k, t) \quad (2)$$

假设 2. $g(x_k, v_k, t)$ 和 $f(x_k, v_k, t)$ 分别满足

$$\begin{aligned} |g(x_k, v_k, t) - g(x_d, \dot{x}_d, t)| \leq \\ \alpha_1(x_k, v_k, t)|e_k| + \alpha_2(x_k, v_k, t)|\dot{e}_k| \end{aligned} \quad (3)$$

和

$$\begin{aligned} |f(x_k, v_k, t) - f(x_d, \dot{x}_d, t)| \leq \\ \beta_1(x_k, v_k, t)|e_k| + \beta_2(x_k, v_k, t)|\dot{e}_k| \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\alpha_1(x_k, v_k, t)$ 、 $\alpha_2(x_k, v_k, t)$ 、 $\beta_1(x_k, v_k, t)$ 、 $\beta_2(x_k, v_k, t)$ 均为已知的连续函数.

为表述简便, 记 $g_k = g(x_k, v_k, t)$, $g_{1,k} = g_1(x_k, v_k, t)$, $g_{2,k} = g_2(x_k, v_k, t)$, $g_d = g(x_d, \dot{x}_d, t)$, $\alpha_{1,k} = \alpha_1(x_k, v_k, t)$, $\alpha_{2,k} = \alpha_2(x_k, v_k, t)$, $f_k = f(x_k, v_k, t)$, $f_d = f(x_d, \dot{x}_d, t)$, $\beta_{1,k} = \beta_1(x_k, v_k, t)$, $\beta_{2,k} = \beta_2(x_k, v_k, t)$.

本文的控制任务是针对任意初态情形下的系统 (1), 借助初始修正作用设计迭代学习控制器 u_k , 使得跟踪误差 e_k 能够在预先指定的区间上实现 PCT 控制性能.

首先, 引入如下误差变量

$$\sigma_k = \dot{e}_k + ce_k + r_k, \quad c > 0 \quad (5)$$

其中, r_k 是为处理任意初态而引入的修正作用, 表达式为

$$r_k = \zeta(t)e^{-ct}e_k(0) \quad (6)$$

其中, $e_k(0)$ 为初始误差, $\zeta(t)$ 满足

$$\zeta(t) = 0, \quad t < 0, t \geq \Delta, \quad \int_0^\Delta \zeta(s)ds = 1$$

为设计迭代学习控制器, 需对 $\sigma_k(0)$ 作如下限制:

假设 3. 选取函数 $\zeta(t)$ 使得

$$\sigma_k(0) = 0, \quad \forall k \quad (7)$$

当 $\dot{e}_k(0) = 0$ 时, 下述 $\zeta(t)$ 满足假设 3:

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a \sin(\frac{\pi t}{d} - \frac{\pi}{2}) + a - c, & 0 \leq t \leq d \\ \frac{2a-c}{2} \sin(\frac{t-d}{\Delta-d}\pi + \frac{\pi}{2}) + \frac{2a-c}{2}, & d < t \leq \Delta \\ 0, & t > \Delta \end{cases} \quad (8)$$

其中, $0 < d < \Delta$ 和 $a > 0$ 为可调参数, 但需满足

$$a\Delta - \frac{dc}{2} - \frac{c\Delta}{2} = 1$$

当 $d = 0.2, \Delta = 0.3, c = 8$ 时, 置 $t \in [0, 0.3]$, $\zeta(t)$ 如图 1 所示.

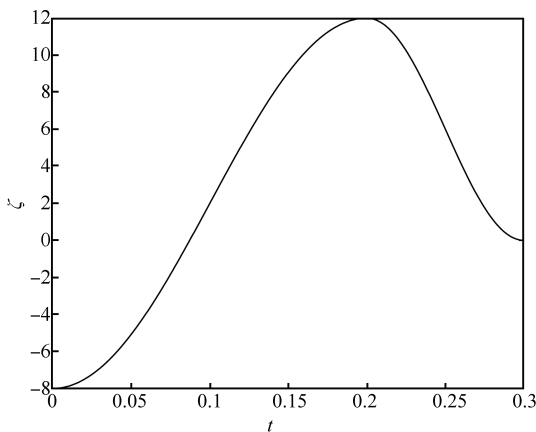


图 1 函数 $\zeta(t)$
Fig.1 Function $\zeta(t)$

从式 (8) 可以看出, $\zeta(t)$ 在 $(0, T]$ 是可导的, 相应地, $\sigma_k(t)$ 在 $[0, T]$ 也是可导的. 进而由式 (5) 知, 若 $\sigma_k(t)$ 是有界的, 则 $e_k(t)$ 和 $\dot{e}_k(t)$ 同样是有界的.

根据初始修正吸引子的定义^[16], 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k(t) = 0$ 在 $[0, T]$ 上成立, 则在 $[\Delta, T]$ 上 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0$ 以及 $\lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0$. 因此, 若设计出的迭代学习控制器使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k(t) = 0$ 在 $[0, T]$ 上成立, 那么借助于其中的初始作用, PCT 跟踪性能便能够实现.

在后面的收敛性分析中, 需用到如下引理.

引理 1. 若函数列 $\{f_k(t)\}$ 在 $[0, T]$ 上逐点收敛于 0, 且 $\{f_k(t)\}$ 在 $[0, T]$ 上等度连续, 则 $\{f_k(t)\}$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 0.

证明. 由 $\{f_k(t)\}$ 在 $[0, T]$ 上的等度连续性, 因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $t_1, t_2 \in [0, T]$, 且 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时, 有

$$|f_k(t_1) - f_k(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

将 $[0, T]$ m 等分, 使每个小区间的长度 $T/m < \delta$, 记 m 等分的各点为 $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_m =$

T . 由 $\{f_k(t)\}$ 在 $[0, T]$ 上逐点收敛到 0, 可得, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(a_i) = 0$, 其中 $i = 0, 1, \dots, m$, 所以对上述 ε , 存在 K_i , 使得 $k > K_i$ 时, 有

$$|f_k(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

令 $K = \max\{K_1, K_2, \dots, K_m\}$, 则当 $k > K$ 时, 对任意的 $t \in [0, T]$, 存在 a_i , 使得 $|a_i - t| < \delta$, 便有

$$|f_k(t)| \leq |f_k(t) - f_k(a_i)| + |f_k(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

即, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = 0$ 在 $[0, T]$ 上一致成立. \square

2 有限时间迭代学习控制器设计

误差 σ_k 的动态方程为

$$\dot{\sigma}_k = f_k + g_k u_k - \ddot{y}_d + c\dot{e}_k + \dot{r}_k \quad (9)$$

记 $f_k - f_d$ 为 δ_k , $f_d - \ddot{y}_d$ 为未知时变参数 $\vartheta(t)$, 式 (9) 可写为

$$\dot{\sigma}_k = \delta_k + \vartheta + c\dot{e}_k + \dot{r}_k + g_k u_k \quad (10)$$

为设计迭代学习控制器, 选取正定函数

$$V_k = \frac{1}{2g_d} \sigma_k^2 \quad (11)$$

对 V_k 求导:

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= \frac{1}{g_d} \sigma_k (\delta_k + \vartheta + c\dot{e}_k + \dot{r}_k + g_k u_k) - \frac{\dot{g}_d}{2g_d^2} \sigma_k^2 = \\ & \frac{g_k}{g_d} \sigma_k \left(\frac{\delta_k}{g_k} + \frac{\vartheta}{g_k} + \frac{c\dot{e}_k}{g_k} + \frac{\dot{r}_k}{g_k} + u_k \right) - \frac{\dot{g}_d}{2g_d^2} \sigma_k^2 = \\ & \frac{g_k}{g_d} \sigma_k \left(\frac{\delta_k}{g_k} + \frac{\vartheta}{g_d} + \frac{c\dot{e}_k}{g_k} + \frac{\dot{r}_k}{g_k} + u_k \right) + \\ & \frac{\vartheta(g_d - g_k)}{g_d^2} \sigma_k - \frac{\dot{g}_d}{2g_d^2} \sigma_k^2 \end{aligned} \quad (12)$$

由其连续性知, ϑ 在 $[0, T]$ 有界, 即

$$|\vartheta| \leq \vartheta_m \quad (13)$$

其中, $\vartheta_m > 0$ 为未知常数.

进而, 利用式 (3) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq \frac{g_k}{g_d} \sigma_k \left(\frac{\delta_k}{g_k} + \frac{\vartheta}{g_d} + \frac{c\dot{e}_k}{g_k} + \frac{\dot{r}_k}{g_k} + u_k \right) + \\ & \frac{\vartheta_m \alpha_{1,k}}{g_d^2} |\sigma_k e_k| + \frac{\vartheta_m \alpha_{2,k}}{g_d^2} |\sigma_k \dot{e}_k| + \frac{|\dot{g}_d|}{2g_d^2} \sigma_k^2 \end{aligned} \quad (14)$$

记

$$\theta = \frac{\vartheta}{g_d}, \quad \rho = \left(\frac{1}{g_d}, \frac{2\vartheta_m}{g_d} \right), \quad \varpi = \frac{|\dot{g}_d|}{2g_d^2}$$

和

$$\boldsymbol{\eta}_k = \begin{pmatrix} \alpha_{1,k}|e_k\hat{\theta}_k| + \alpha_{2,k}|\dot{e}_k\hat{\theta}_k| \\ \frac{\alpha_{1,k}|e_k|}{g_{1,k}} + \frac{\alpha_{2,k}|\dot{e}_k|}{g_{1,k}} \end{pmatrix}$$

其中, $\hat{\theta}_k$ 为 θ 的估计.

通过上面的推导, 我们可采取如下迭代学习控制律:

$$\begin{aligned} u_k = & -\hat{\theta}_k - \frac{g_{2,k}}{g_{1,k}} \operatorname{sgn}(\sigma_k) \hat{\boldsymbol{\rho}}_k^T \boldsymbol{\eta}_k - \frac{g_{2,k}}{g_{1,k}} \sigma_k \hat{\varpi}_k - \\ & \frac{1}{g_{1,k}} \beta_{1,k} \operatorname{sgn}(\sigma_k) |e_k| - \frac{1}{g_{1,k}} \beta_{2,k} \operatorname{sgn}(\sigma_k) |\dot{e}_k| - \\ & \frac{c}{g_{1,k}} \operatorname{sgn}(\sigma_k) |\dot{e}_k| - \frac{1}{g_{1,k}} \operatorname{sgn}(\sigma_k) |\dot{r}_k| - \frac{bg_{2,k}}{g_{1,k}} \sigma_k \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\rho}}_k$ 和 $\hat{\varpi}_k$ 分别为 $\boldsymbol{\rho}$ 和 ϖ 的估计, $b > 0$ 为一设计常数. 在完全限幅情形下, 各参数的估计分别由如下更新律给出 ($t \in [0, T]$, $k = 0, 1, 2, \dots$)

$$\hat{\theta}_k = \operatorname{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}_k^*) \quad (16)$$

$$\hat{\theta}_k^* = \operatorname{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}_{k-1}^*) + \gamma_1 \sigma_k \quad (17)$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_k = \operatorname{sat}_{\bar{\boldsymbol{\rho}}}(\hat{\boldsymbol{\rho}}_k^*) \quad (18)$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_k^* = \operatorname{sat}_{\bar{\boldsymbol{\rho}}}(\hat{\boldsymbol{\rho}}_{k-1}^*) + \gamma_2 |\sigma_k| \boldsymbol{\eta}_k \quad (19)$$

$$\hat{\varpi}_k = \operatorname{sat}_{\bar{\varpi}}(\hat{\varpi}_k^*) \quad (20)$$

$$\hat{\varpi}_k^* = \operatorname{sat}_{\bar{\varpi}}(\hat{\varpi}_{k-1}^*) + \gamma_3 \sigma_k^2 \quad (21)$$

其中, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ 和 $\gamma_3 > 0$ 为参数更新增益, 其值越大, 参数估值每次更新的幅度也就越大; sat 为饱和函数, 其定义及性质见文献 [20], $\bar{\theta}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ 和 $\bar{\varpi}$ 分别为各参数估计的限幅值. 这里, 假定各参数真值都处于限幅值之间, 且当 $k = -1$ 时, $\hat{\theta}_k = 0$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}_k = \mathbf{0}$, $\hat{\varpi}_k = 0$.

3 性能分析

对于所设计的控制律及参数更新律, 本节对闭环系统的收敛性和稳定性进行分析.

考虑下述 Lyapunov-like 函数

$$\begin{aligned} L_k = & V_k + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t \tilde{\theta}_k^2 ds + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k ds + \\ & \frac{1}{2\gamma_3} \int_0^t \tilde{\varpi}_k^2 ds \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $\tilde{\theta}_k = \theta - \hat{\theta}_k$, $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k = \boldsymbol{\rho} - \hat{\boldsymbol{\rho}}_k$, $\tilde{\varpi}_k = \varpi - \hat{\varpi}_k$. 在

假设 3 下, 可将 $\Delta L_k = L_k - L_{k-1}$ 表达为

$$\begin{aligned} \Delta L_k = & \int_0^t \dot{V}_k ds - V_{k-1} + \\ & \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t (\tilde{\theta}_k^2 - \tilde{\theta}_{k-1}^2) ds + \\ & \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k-1}) ds + \\ & \frac{1}{2\gamma_3} \int_0^t (\tilde{\varpi}_k^2 - \tilde{\varpi}_{k-1}^2) ds \end{aligned} \quad (23)$$

应用控制律 (15), 可将式 (14) 写成

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & \frac{g_k}{g_d} \sigma_k \left(\frac{\delta_k}{g_k} + \frac{c\dot{e}_k}{g_k} + \frac{\dot{r}_k}{g_k} + u_{1,k} \right) + \sigma_k \tilde{\theta}_k + \\ & \frac{g_k - g_d}{g_d} \sigma_k \tilde{\theta}_k + \frac{\vartheta_m \alpha_{1,k}}{g_d^2} |\sigma_k e_k| + \\ & \frac{\vartheta_m \alpha_{2,k}}{g_d^2} |\sigma_k \dot{e}_k| + \frac{|\dot{g}_d|}{2g_d^2} \sigma_k^2 \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} u_{1,k} = & -\frac{g_{2,k}}{g_{1,k}} \operatorname{sgn}(\sigma_k) \hat{\boldsymbol{\rho}}_k^T \boldsymbol{\eta}_k - \frac{g_{2,k}}{g_{1,k}} \sigma_k \hat{\varpi}_k - \\ & \frac{1}{g_{1,k}} \beta_{1,k} \operatorname{sgn}(\sigma_k) |e_k| - \frac{1}{g_{1,k}} \beta_{2,k} \operatorname{sgn}(\sigma_k) |\dot{e}_k| - \\ & \frac{c}{g_{1,k}} \operatorname{sgn}(\sigma_k) |\dot{e}_k| - \frac{1}{g_{1,k}} \operatorname{sgn}(\sigma_k) |\dot{r}_k| - \frac{bg_{2,k}}{g_{1,k}} \sigma_k \end{aligned}$$

同样, 由式 (3) 可知

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & \frac{g_k}{g_d} \sigma_k \left(\frac{\delta_k}{g_k} + \frac{c\dot{e}_k}{g_k} + \frac{\dot{r}_k}{g_k} + u_{1,k} \right) + \\ & \sigma_k \tilde{\theta}_k + \frac{\alpha_{1,k}}{g_d} |\sigma_k e_k \tilde{\theta}_k| + \frac{\alpha_{2,k}}{g_d} |\sigma_k \dot{e}_k \tilde{\theta}_k| + \\ & \frac{\vartheta_m \alpha_{1,k}}{g_d^2} |\sigma_k e_k| + \frac{\vartheta_m \alpha_{2,k}}{g_d^2} |\sigma_k \dot{e}_k| + \frac{|\dot{g}_d|}{2g_d^2} \sigma_k^2 \end{aligned} \quad (25)$$

借助于式 (13) 易得

$$|\tilde{\theta}_k| \leq \frac{\vartheta_m}{g_{1,k}} + |\hat{\theta}_k| \quad (26)$$

利用式 (26) 和式 (25) 可写成

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & \frac{g_k}{g_d} \sigma_k \left(\frac{\delta_k}{g_k} + \frac{c\dot{e}_k}{g_k} + \frac{\dot{r}_k}{g_k} + u_{1,k} \right) + \\ & \sigma_k \tilde{\theta}_k + \frac{\alpha_{1,k}}{g_d} |\sigma_k e_k \hat{\theta}_k| + \frac{\alpha_{2,k}}{g_d} |\sigma_k \dot{e}_k \hat{\theta}_k| + \\ & \frac{2\vartheta_m \alpha_{1,k}}{g_d g_{1,k}} |\sigma_k e_k| + \frac{2\vartheta_m \alpha_{2,k}}{g_d g_{1,k}} |\sigma_k \dot{e}_k| + \frac{|\dot{g}_d|}{2g_d^2} \sigma_k^2 \leq \\ & \frac{g_k}{g_d} \sigma_k \left(\frac{\delta_k}{g_k} + \frac{c\dot{e}_k}{g_k} + \frac{\dot{r}_k}{g_k} + u_{1,k} \right) + \\ & \sigma_k \tilde{\theta}_k + \frac{|\sigma_k|}{g_d} \left(\alpha_{1,k} |e_k \hat{\theta}_k| + \alpha_{2,k} |\dot{e}_k \hat{\theta}_k| \right) + \\ & \frac{2\vartheta_m |\sigma_k|}{g_d} \left(\frac{\alpha_{1,k} |e_k|}{g_{1,k}} + \frac{\alpha_{2,k} |\dot{e}_k|}{g_{1,k}} \right) + \frac{|\dot{g}_d|}{2g_d^2} \sigma_k^2 \leq \\ & \frac{g_k}{g_d} \sigma_k \left(\frac{\delta_k}{g_k} + \frac{c\dot{e}_k}{g_k} + \frac{\dot{r}_k}{g_k} + u_{1,k} \right) + \\ & \sigma_k \tilde{\theta}_k + \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\eta}_k |\sigma_k| + \varpi \sigma_k^2 \end{aligned} \quad (27)$$

考查式 (23) 中等号右边第二项

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_k^2 - \tilde{\theta}_{k-1}^2 = & -2\tilde{\theta}_k(\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}) - (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1})^2 = \\ & -2\tilde{\theta}_k(\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_{k-1}) + 2\tilde{\theta}_k(\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_k) - \\ & (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1})^2 \end{aligned} \quad (28)$$

借助文献 [12] 中的引理 2.1 可知

$$(\theta - \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}_k^*))(\hat{\theta}_k^* - \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}_k^*)) \leq 0 \quad (29)$$

由式 (16) 及式 (28), 可得

$$\tilde{\theta}_k^2 - \tilde{\theta}_{k-1}^2 \leq -2\tilde{\theta}_k(\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_{k-1}) \quad (30)$$

同样, 可得如下两式

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k-1} \leq -2\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k^T (\hat{\boldsymbol{\rho}}_k^* - \hat{\boldsymbol{\rho}}_{k-1}) \quad (31)$$

$$\tilde{\hat{\omega}}_k^2 - \tilde{\hat{\omega}}_{k-1}^2 \leq -2\tilde{\hat{\omega}}_k (\hat{\omega}_k^* - \hat{\omega}_{k-1}) \quad (32)$$

将式 (27)、(30)~(32) 代入式 (23):

$$\begin{aligned} \Delta L_k \leq & \int_0^t \frac{g_k}{g_d} \sigma_k \left(\frac{\delta_k}{g_k} + \frac{c\dot{e}_k}{g_k} + \frac{\dot{r}_k}{g_k} + u_{1,k} \right) ds + \\ & \int_0^t (\sigma_k \tilde{\theta}_k + \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\eta}_k |\sigma_k| + \varpi \sigma_k^2) ds - \\ & \frac{1}{\gamma_1} \int_0^t \tilde{\theta}_k (\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_{k-1}) ds - \\ & \frac{1}{\gamma_2} \int_0^t \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k^T (\hat{\boldsymbol{\rho}}_k^* - \hat{\boldsymbol{\rho}}_{k-1}) ds - \\ & \frac{1}{\gamma_3} \int_0^t \tilde{\hat{\omega}}_k (\hat{\omega}_k^* - \hat{\omega}_{k-1}) ds - \frac{1}{2g_d} \sigma_{k-1}^2 \end{aligned} \quad (33)$$

由参数更新律可知, $\hat{\boldsymbol{\rho}}_k^T \boldsymbol{\eta}_k \geq 0$, $\hat{\omega}_k \geq 0$, 且

$\frac{g_k g_{2,k}}{g_d g_{1,k}} \geq 1$. 这样, 可将式 (33) 写成

$$\begin{aligned} \Delta L_k \leq & \int_0^t \left(\frac{\delta_k}{g_d} \sigma_k + \frac{c\dot{e}_k}{g_d} \sigma_k + \frac{\dot{r}_k}{g_d} \sigma_k \right) ds - \\ & \int_0^t \left(\frac{g_k \beta_{1,k}}{g_{1,k} g_d} |\sigma_k e_k| + \frac{g_k \beta_{2,k}}{g_{1,k} g_d} |\sigma_k \dot{e}_k| \right) ds - \\ & \int_0^t \left(\frac{c g_k}{g_{1,k} g_d} |\sigma_k \dot{e}_k| + \frac{g_k}{g_{1,k} g_d} |\sigma_k \dot{r}_k| \right) ds - \\ & b \int_0^t \sigma_k^2 ds - \frac{1}{2g_d} \sigma_{k-1}^2 \end{aligned} \quad (34)$$

由于 $g_k/g_{1,k} \geq 1$, 利用假设 2, 得

$$\begin{aligned} \Delta L_k \leq & \int_0^t \left(\frac{c\dot{e}_k}{g_d} \sigma_k + \frac{\dot{r}_k}{g_d} \sigma_k \right) ds - \\ & \int_0^t \left(\frac{c g_k}{g_{1,k} g_d} |\sigma_k \dot{e}_k| + \frac{g_k}{g_{1,k} g_d} |\sigma_k \dot{r}_k| \right) ds - \\ & b \int_0^t \sigma_k^2 ds - \frac{1}{2g_d} \sigma_{k-1}^2 \end{aligned} \quad (35)$$

同样由 $g_k/g_{1,k} \geq 1$, 易知

$$\Delta L_k \leq -\frac{1}{2g_d} \sigma_{k-1}^2 \quad (36)$$

下面给出闭环系统的收敛性结果.

定理 1. 对于满足假设 1~3 的系统 (1), 采用控制律 (15) 以及参数更新律 (16)~(21), 可以保证系统中的所有变量在 $[0, T]$ 上一致有界; 且当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 0.

证明. 首先对 L_0 求导:

$$\begin{aligned} \dot{L}_0 = & \dot{V}_0 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_0^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_0^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_0 + \frac{1}{2\gamma_3} \tilde{\hat{\omega}}_0^2 \leq \\ & \tilde{\theta}_0 \sigma_0 + \tilde{\boldsymbol{\rho}}_0^T \boldsymbol{\eta}_0 |\sigma_0| + \tilde{\hat{\omega}}_0 \sigma_0^2 + \\ & \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_0^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_0^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_0 + \frac{1}{2\gamma_3} \tilde{\hat{\omega}}_0^2 \end{aligned} \quad (37)$$

由于 $\hat{\theta}_{-1} = 0$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{-1} = \mathbf{0}$, $\hat{\omega}_{-1} = 0$, 结合式 (30)~(32),

$$\dot{L}_0 \leq \frac{1}{2\gamma_1} \theta^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2\gamma_3} \varpi^2 \quad (38)$$

由 θ 、 $\boldsymbol{\rho}$ 和 ϖ 的有界性可知, \dot{L}_0 在 $[0, T]$ 内是有界的, 因此, L_0 在 $[0, T]$ 内是有界的. 由式 (36) 可知, $L_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致有界. 由式 (22) 可得 $\sigma_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上的一致有界性. 因而, $e_k(t)$ 和 $\dot{e}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上同样是一致有界的. 进而, 由于 $y_d(t)$ 可导, 可知 $x_k(t)$ 和 $v_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上是一致有界的. 由于这里采用了完全限幅的参数学习机制, 故 $\hat{\theta}_k$ 、 $\hat{\boldsymbol{\rho}}_k$

和 $\hat{\omega}_k$ 一致有界. 由控制律 (15) 可以看出, $u_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上是一致有界的.

为证明 $\sigma_k(t)$ 的一致收敛性, 对式 (36) 进行累加,

$$\sum_{i=2}^k \Delta L_i = L_k - L_1 \leq -\frac{1}{2g_d} \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i^2 \quad (39)$$

由于 $L_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致有界, 利用级数收敛的必要性条件, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上逐点收敛于 0.

由式 (9) 可知, $\dot{\sigma}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上是一致有界的, 故 $\sigma_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上等度连续. 根据引理 1, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 0. \square

从控制律中不难看出, 由于使用符号函数 $\text{sgn}(t)$, 控制量不可避免地会产生振荡现象. 振荡是由初始误差导致的, 且随着 $e_k(0)$ 的减小而减弱. 由于初始修正作用的存在, 当 $t > \Delta$ 时, $e_k(t)$ 和 $\dot{e}_k(t)$ 将会趋于 0, 且会随着迭代次数的增加而变得越来越小, 同时, $\dot{r}_k(t) = 0$; 因而, 振荡现象便会消除. 同时可看出, Δ 的取值与初始阶段振荡之间的关系: Δ 越大, 控制量中用以克服初始误差的值就越小, 相应地振荡也就越弱, 但实际完全跟踪的起始点将会向后推移.

依据定理 1, 可直接得到 $e_k(t)$ 在 $[\Delta, T]$ 上的一致收敛性. 本文所提出的控制方法适用于二阶非线性不确定系统, 将这种学习控制方法推广到高阶系统仍值得进一步研究.

4 仿真算例

考虑如下二阶非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_k = v_k \\ \dot{v}_k = \frac{g \sin x_k - \frac{ml \cos^2 v_k \sin x_k}{m_c + m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_k}{m_c + m} \right) + \frac{\cos x_k}{\frac{m_c + m}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_k}{m_c + m} \right)}}} u_k \end{cases}$$

其中, x_k 和 v_k 分别是倒立摆的角位移和角速度, $x_k(0) = 0.6 + 0.1(\varepsilon - 0.5)$ (ε 为 0 到 1 之间的随机数), $v_k(0) = 0$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度, $m_c = 1 \text{ kg}$ 为小车的质量, $m = 0.1 \text{ kg}$ 为摆的质量, $l = 0.6 \text{ m}$ 为摆长的一半, u_k 为小车的推力. 参考信号为 $[-0.2 + \cos(\pi t) \quad -\pi \sin(\pi t)]^T$, 可知每次迭代时, $[x_k(0) \quad v_k(0)]^T$ 并不等于 $[0.8 \quad 0]^T$. 取 $g_1(x_k, v_k, t) = |\cos x_k| / (0.88 + 0.06 \cos^2 x_k)$, $g_2(x_k, v_k, t) = 1 / (0.88 - 0.06)$, 满足假设 1. 取 $\alpha_1(x_k, v_k, t) = 10$, $\alpha_2(x_k, v_k, t) = 0.5$, $\beta_1(x_k, v_k, t) = 1.5$, $\beta_2(x_k, v_k, t) = 0$, 满足假设 2.

采用控制律 (15) 以及参数更新律 (16)~(21) 进行仿真, 各参数取值为 $b = 5, c = 8, d = 0.2, \Delta = 0.3, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 6$, 设定系统在 $[0, 2]$ 内重复运行, 迭代 40 次后, 仿真结果如图 2~5 所示. 其中, 图 5 中的 $J_k = \max_{t \in [\Delta, T]} |e_k(t)|$ 表示在 $[\Delta, T]$ 上误差绝对值的最大值.

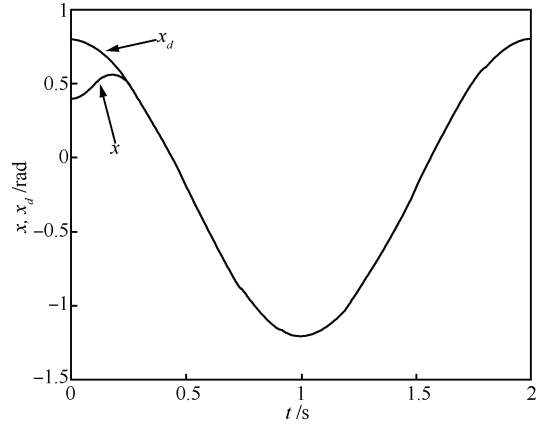


图 2 x 及参考轨迹 x_d

Fig. 2 x and the reference trajectory x_d

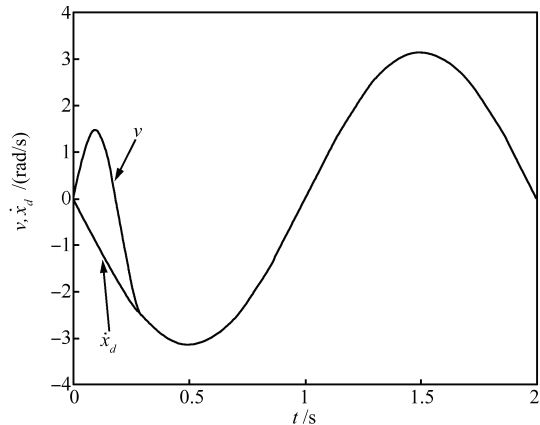


图 3 v 及参考轨迹 \dot{x}_d

Fig. 3 v and the reference trajectory \dot{x}_d

从仿真结果可以看出, 对于任意初态情形, 通过引入初始修正作用, 可实现在预先指定区间上对期望轨迹的完全跟踪, 图 2~3 表明 PCT 跟踪性能, 初始修正作用能够有效地消除初始误差影响. 从图 4~5 可以看到控制输入和迭代过程, 其中图 4 中的控制量 $u(t)$ 在初始阶段出现振荡现象; 由于初始修正作用的存在, 当 $t > \Delta$ 时, 振荡随即消除.

5 结论

为了提高任意初态下迭代学习控制系统的跟踪性能, 需在控制方法中引入初始修正作用, 在预先指定区间上获得完全跟踪, 即实现 PCT 跟踪性能. 本

文针对一类非参数不确定系统,在完全限幅学习机制下,设计了有限时间迭代学习控制器.通过分析可知,所设计的学习控制器能够实现闭环系统中变量的一致有界性以及跟踪误差的一致收敛性.仿真结果验证了这种控制方法能有效地解决任意初态下的完全跟踪问题.

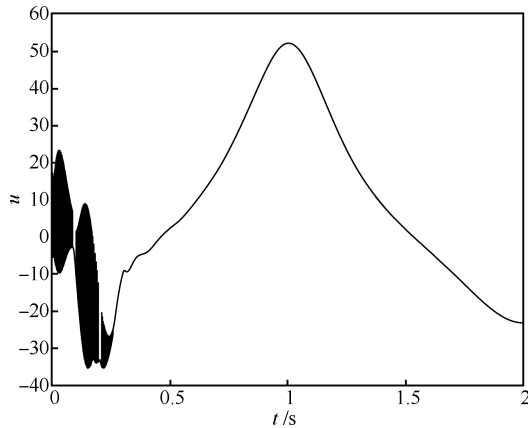


图 4 控制输入 u

Fig. 4 The control input u

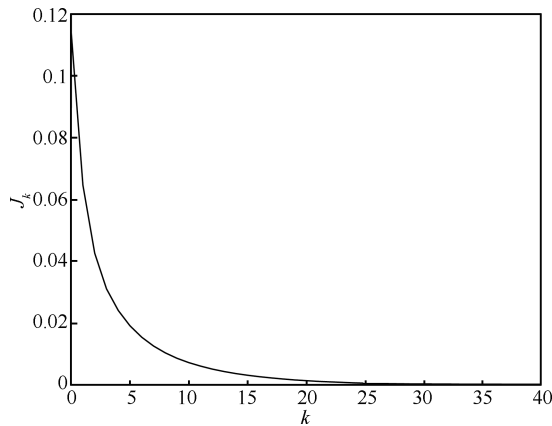


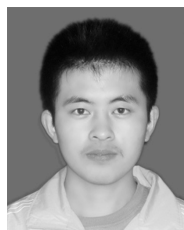
图 5 指标 J_k

Fig. 5 The index J_k

References

- 1 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, **1**(2): 123–140
- 2 Porter B, Mohamed S S. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial impulsive action. *International Journal of Systems Science*, 1991, **22**(3): 447–454
- 3 Lee H S, Bien Z. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error. *International Journal of Control*, 1996, **64**(3): 345–359
- 4 Park K H, Bien Z. A generalized iterative learning controller against initial state error. *International Journal of Control*, 2000, **73**(10): 871–881
- 5 Sun M X, Wang D W. Initial condition issues on iterative learning control for non-linear systems with time delay. *International Journal of Systems Science*, 2001, **32**(11): 1365–1375
- 6 Xu J X, Tan Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(11): 1940–1945
- 7 Qu Z H, Xu J X. Asymptotic learning control for a class of cascaded nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(8): 1369–1376
- 8 Tayebi A, Chien C J. A unified adaptive iterative learning control framework for uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(10): 1907–1913
- 9 Chien C J, Hsu C T, Yao C Y. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, **12**(5): 724–732
- 10 Xu J X, Yan R. On initial conditions in iterative learning control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(9): 1349–1354
- 11 Xu J X, Xu J. On Iterative learning from different tracking tasks in the presence of time-varying uncertainties. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 2004, **34**(1): 589–597
- 12 Chi R H, Hou Z S, Xu J X. Adaptive ILC for a class of discrete-time systems with iteration-varying trajectory and random initial condition. *Automatica*, 2008, **44**(8): 2207–2213
- 13 Liu Shan, Wu Tie-Jun. Robust iterative learning control using wavelet approximation for nonlinear plants. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(2): 270–276
(刘山, 吴铁军. 基于小波逼近的非线性系统鲁棒迭代学习控制. 自动化学报, 2004, **30**(2): 270–276)
- 14 Chen Wei-Sheng, Wang Yuan-Liang, Li Jun-Min. Adaptive learning control for nonlinearly parameterized systems with periodically time-varying delays. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(12): 1556–1560
(陈为胜, 王元亮, 李俊民. 周期时变时滞非线性参数化系统的自适应学习控制. 自动化学报, 2008, **34**(12): 1556–1560)

- 15 Yin C K, Xu J X, Hou Z S. A high-order internal model based iterative learning control scheme for nonlinear systems with time-iteration-varying parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(11): 2665–2670
- 16 Sun Ming-Xuan. Finite-time iterative learning control. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2010, **30**(6): 733–741
(孙明轩. 有限时间迭代学习控制. 系统科学与数学, 2010, **30**(6): 733–741)
- 17 Sun Ming-Xuan, Yan Qiu-Zhen. Error tracking of iterative learning control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(3): 251–262
(孙明轩, 严求真. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法. 自动化学报, 2013, **39**(3): 251–262)
- 18 Marino R, Tomei P. An iterative learning control for a class of partially feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(8): 1991–1996
- 19 Chen Peng-Nian, Qin Hua-Shu, Fang Xue-Yi. Iterative learning control for uncertain nonlinear systems with time-varying control gain. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2012, **32**(6): 693–704
(陈彭年, 秦化淑, 方学毅. 控制增益时变的非线性系统的迭代学习控制. 系统科学与数学, 2012, **32**(6): 693–704)
- 20 Sun M X, Ge S S. Adaptive repetitive control for a class of nonlinearly parametrized systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(10): 1684–1688



齐丽强 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为学习控制.

E-mail: qiliqiang2011@sina.cn

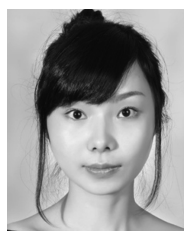
(**QI Li-Qiang** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His research interest covers learning control.)



孙明轩 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为学习控制. 本文通信作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn

(**SUN Ming-Xuan** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His research interest covers learning control. Corresponding author of

this paper.)



管海娃 温州科技职业学院讲师. 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为学习控制.

E-mail: guanhaiwa1026@163.com

(**GUAN Hai-Wa** Lecturer at Wenzhou Vocational College of Science and Technology, and also a Ph. D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. Her research interest covers learning control.)