

多智能体系统的最优持久编队生成策略

罗小元¹ 杨帆¹ 李绍宝² 关新平^{1,3}

摘要 针对二维空间中减少智能体间通信链路的能量消耗问题,提出了一种基于最优刚性编队的最优持久编队生成算法. 算法提出了针对智能体连通度数目的有向化操作方法,通过层层缩减最小刚性图范围的方式生成最优持久图,这种方法能对任意最小刚性图进行持久化,从理论上证明了算法的可操作性. 仿真结果验证了算法的有效性.

关键词 多智能体, 最优刚性编队, 最优持久编队, 连通度

引用格式 罗小元, 杨帆, 李绍宝, 关新平. 多智能体系统的最优持久编队生成策略, 2014, 40(7): 1311–1319

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.01311

Generation of Optimally Persistent Formation for Multi-agent Systems

LUO Xiao-Yuan¹ YANG Fan¹ LI Shao-Bao² GUAN Xin-Ping^{1,3}

Abstract In order to reduce the energy consumption problem between communication links of agents in a two-dimensional space, an algorithm to generate optimally persistent formation based on optimally rigid formation is presented in this paper. According to the number of communication links, a method is presented to make edges be directed edges. An optimally persistent formation is generated by reducing the range of the optimally rigid formation. The proposed method can change arbitrary optimally rigid formation to an optimally persistent formation. The feasibility is proved theoretically. Simulation results are presented to show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words Multi-agent system, optimally rigid formation, optimally persistent formation, number of communication links

Citation Luo Xiao-Yuan, Yang Fan, Li Shao-Bao, Guan Xin-Ping. Generation of optimally persistent formation for multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(7): 1311–1319

近年来,多智能体协调控制在控制领域中受到国内外研究者的广泛关注,其研究内容包括多智能体编队控制^[1–3]、多智能体群集控制^[4–5]和一致性研究^[6–7].随着科技的发展,上述研究成果在现实生活中已得到了广泛的应用,包括:无人飞机群、自动公路系统和移动机器人舞蹈队等.

在实际应用中,通常要求各智能体能够在移动的过程中保持相互间的距离恒定,以加强智能体间的信息交互,实现协调控制,完成单个智能体难以完

成的任务.通常用图来描述这种通信结构. Olfati-Saber 在文献 [8] 中提出了设计和分析分布式群集算法的理论框架.文献中,智能体间的相互距离保持一致,保证了相互间的通信稳定,但是文献 [8] 主要研究的是基于无向图的群集控制,每个智能体都保持着与邻居智能体的双向通信,通信复杂度高.为了降低通信复杂度,一些学者对刚性和持久性的理论进行了研究,提出了最小刚性图和最小持久图的概念^[9–11],并且将最小刚性图和最小持久图用到群集和编队控制中^[12–14].最小刚性编队和最小持久编队就是能够保持编队结构稳定,拥有最少通信边数,且通信复杂度最少的编队.在过去几年中, Hendrickx 等在文献 [9, 15–16] 中提出了如何从一个最小刚性图和最小持久图转换到另一个最小刚性图和最小持久图的图形操作方法,但没有给出如何生成最小持久图的方法. Smith 等在文献 [17] 中研究了通过增加顶点操作来生成最小刚性图和最小持久图的操作方法,并且提出了基于 PebbleGame 的分布式策略.文献 [15–17] 中的方法虽然减小了智能体间的通信边数,但在操作的基础上仍然可以通过优化智能体间距离的加权值来降低通信复杂度,减少能量消耗,且不能保证最小刚性图和最小持久图的唯一性.文献 [18] 通过计算通信链路的加权值,生成了最优刚

收稿日期 2013-07-01 录用日期 2013-11-05
Manuscript received July 1, 2013; accepted November 5, 2013
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2010CB731800), 国家自然科学基金 (61074065, 61375105), 河北省自然科学基金 (F2012203119) 资助

Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2010CB731800), National Natural Science Foundation of China (61074065, 61375105), and Natural Science Foundation of Hebei Province (F2012203119)

本文责任编辑 吕金虎

Recommended by Associate Editor LV Jin-Hu

1. 燕山大学电气工程学院 秦皇岛 066004 2. 香港城市大学机械及生物医学工程系 香港 3. 上海交通大学电子信息与电气工程学院 上海 200240

1. Department of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004 2. Department of Mechanical and Biomedical Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong 3. School of Electronic, Information and Electrical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240

性编队,但是这种编队的通信链路仍是双向的,可以进行进一步优化.文献[19–20]虽然提出了一种最优持久编队的生成方法,将双向通信优化为单向通信,但是这种方法不能对全部编队进行优化,有一定的局限性.

本文通过对最优刚性编队性质以及点、边之间关系的具体研究,提出了一种全新的最优持久编队生成算法,在保证编队稳定性的同时,最大限度的降低了通信复杂度,减少了能量消耗.在充分研究无向图扩展策略的基础上,逆向思考,针对无向图扩展后顶点连通度数目的特点,给出了对1、2、3连通度顶点进行有向化操作的基本方法.但仅通过顶点有向化,不能使任意最优刚性图生成最优持久图,因此加入路径取反操作,保证算法的普遍适用性.本算法通过对连通度数目不同的顶点的有向化操作,可实现持久编队的同时扩展,加快持久图生成速度.

1 图论的基础知识

多智能体系统的信息结构通常可以用图来描述.图 $G(V, E)$ 是由顶点集 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 和边集 $E \subset V \times V$ 组成, V, E 分别对应编队中的智能体和智能体间的通信链路集合.其中每条边 $e \in E$ 是一个不同的顶点对 (i, j) .如果图 G 的任意一个顶点对 (i, j) 满足 $\forall (i, j) \in E \Rightarrow (j, i) \in E$, 那么图 G 是一个无向图,反之则是有向图.由于编队中智能体的通信范围限制,每个智能体只能与通信范围内的其他智能体通信,能够通信的两个智能体互为邻居.

一个二维空间中,有一个邻居距离约束的智能体只能在这个邻居的圆域内移动,也就是说这个智能体只有一个自由度.当一个智能体没有距离约束时,这个智能体有两个自由度,能在二维空间中自由移动.而当一个智能体有两个邻居智能体约束时这个智能体没有自由度,不能移动.在图 $G(V, E)$ 中,智能体 i 的邻居集表示为 $N_i = \{j : (i, j) \in E\}$, 与其相连的邻居个数称为智能体 i 的连通度,记为 $d(i)$.在图中,智能体 i 能接收到的邻居智能体的信息数量,称为智能体的出度,记为 $d^-(i)$;智能体 i 向 n 个智能体发出信息的数量,称为智能体的入度,记为 $d^+(i)$.在有向边 (\vec{i}, \vec{j}) 中, $d^-(i) = 1, d^+(j) = 1$.智能体 i 的自由度的数目可记为 $\max(0, 2 - d^-(i))$.

1.1 刚性图

在编队拓扑图 $G(V, E)$ 中, $q_i(t)$ 表示第 i 个智能体的运动轨迹,其中 $q_i \in \mathbf{R}^2$ 表示第 i 个智能体的位置坐标.如果所有顶点对 $(i, j) \in E$ 在任意时刻都能保持 $\|q_i(t) - q_j(t)\| = l$ (其中 l 为常量),则这个拓扑图为刚性图.刚性图中,任何一个顶点的运动都

不会破坏整个图的稳定性.如果一个图不是刚性的,称其为可变形图.如图1所示,图1(a)是可变形图,图1(b)、图1(c)和图1(d)是刚性图,具有相同顶点的刚性图不是唯一的.

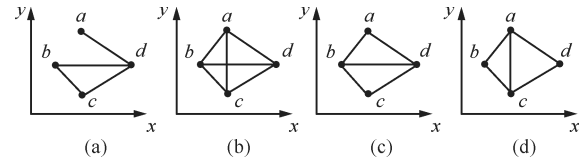


图1 可变形图与刚性图 ((a) 可变形图; (b) 刚性图; (c) 最小刚性图; (d) 最小刚性图)

Fig. 1 Deformable figure and rigid figure ((a) Deformable figure; (b) Rigid figure; (c) The minimum rigid graph; (d) The minimum rigid graph)

如果刚性图中减少任意一条边都会使刚性图失去稳定性,变成可变形图,则该刚性图称为最小刚性图.最小刚性图也不是唯一的.如图1(c)和图1(d)就是由相同顶点不同边组成的两种最小刚性图.

引理 1^[15]. 顶点数为 n ($n \geq 2$) 且边数为 $2n - 3$ 的刚性图为最小刚性图.

对于相同顶点的不同最小刚性图,可对无向图中每条边进行加权,得到加权和最小的刚性图,这一类刚性图称作最优刚性图.图1各顶点坐标为 $a = (4, 8), b = (1, 4), c = (4, 2), d = (9, 4)$,通过计算,我们得到图1(d)的各个边长加权和在所有最小刚性图中最小,所以为最优刚性图.定义如下:

定义 1^[18]. 一个结构是最优刚性图当其拓扑图满足:

- 1) 拓扑图是最小刚性的;
- 2) 拓扑图的边的距离加权和是所有由相同顶点组成的刚性图中最小的.

由定义可知最优刚性图是一类特殊的最小刚性图.最小刚性图是能保证图形稳定性并有最少通信边的一类图,保证了多智能体编队最小的通信复杂度,减少了拓扑间的通信消耗,延长了通信寿命.最优刚性图又满足了距离的加权和最小,在最少通信链路的基础上再次减少了通信间的能量损耗.因此,本文以最优刚性图为基础生成最优持久图,使双向通信变为单向通信,进一步减小多智能体编队的通信能耗,延长编队存活时间.

1.2 持久图

持久图是一种存在约束条件的有向图.在这种有向图中,每个智能体都能在服从自身的约束条件时,保证整个编队的刚性,即所谓的约束一致性^[9].这种约束一致性是由相应边所对应智能体的跟踪约束条件所决定的.对图1(d)增加有向边,得到图2.

图 2 给出满足约束一致性和非约束一致性的有向图的框架结构. 其中图 2(a) 所对应的无向图是刚性的, 但其有向图不是持久性的. 顶点 d 和 a 是自由度为 1 的顶点, 当顶点 d 在以点 a 为圆心, 边 (d, a) 为半径的圆域内移动时, 顶点 d 移动到图 2(b) 中的位置, 顶点 c 不能在维持 (c, a) 、 (c, b) 之间相对位置不变的情况下跟随 d 移动到相应位置. 图 2(c) 中顶点 a 的自由度为 1, 在顶点 a 移动到图 2(d) 中位置的过程中所有顶点保持相对位置不变, 编队保持刚性. 也就是说持久图对应的无向图一定是刚性图, 但给刚性图各边任意的方向不一定得到持久图. 根据约束一致性的条件对最小持久图定义如下:

定义 2^[16]. 如果一个有向图中每个顶点 i 的出度 $d^-(i) \leq 2$, 且对应的无向图是最小刚性图, 则这个有向图是最小持久图.

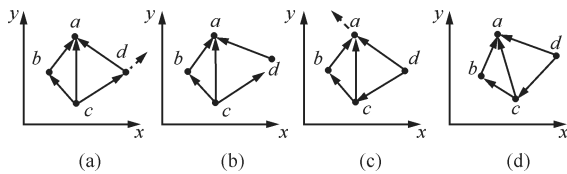


图 2 持久性
Fig.2 Persistence

最优刚性图是一个特殊的最小刚性图, 则最优持久图的定义如下:

定义 3^[16]. 如果一个有向图中每个顶点 i 的出度 $d^-(i) \leq 2$, 且对应的无向图是最优刚性图, 则这个有向图是最优持久图.

图 2(d) 是在图 1(d) 基础上增加有向边得到的, 上文已得到图 1(d) 为最优刚性图, 并且图 2(d) 满足每个顶点出度 $d^-(i) \leq 2$, 所以有向图图 2(d) 是最优持久图.

定理 1. 一个最优持久图中总是有三个自由度, 且最少有两个顶点的出度小于 2.

证明. 对于有 n 个顶点的最优持久图满足每个顶点 i 的出度 $d^-(i) \leq 2$, 那么所有顶点最多有 $2n$ 个出度. 又因为最优持久图对应的无向图是刚性图, 所以满足刚性条件, 有 $2n - 3$ 条边, 且每条边代表了一个出度和一个入度, 所以 n 个顶点的有向图共有出度 $2n - 3$ 个. 因为智能体 i 的自由度的数目可记为 $\max(0, 2 - d^-(i))$, 则 n 个智能体的自由度为 $2n - (2n - 3) = 3$, 且最少有两个顶点的出度小于 2. □

2 最优刚性图的持久化

最优持久编队是一类特殊的最小持久编队, 上文已经给出了相应的概念和性质. 本节将更加详细地讨论最优刚性图和最优持久图的各种性质, 给出

刚性图扩展的基本操作方法, 并逆向思考, 研究最优刚性编队持久化的方法, 提出对无向边有向化的基本方法, 并论证其可行性. 此种操作方法比文献 [19—20] 中的操作方法适用性更强, 能对任意最优刚性编队进行持久化.

2.1 顶点操作、边操作和路径取反操作

增加顶点操作和边分离操作是刚性图扩展的两个基本操作^[15]. j 和 k 是有 n 个顶点的最小刚性图 $G_n(V, E)$ 中的两个不同顶点. 增加顶点操作, 就是增加顶点 i , 并连接边 (i, j) 和 (i, k) , 如图 3(a) 所示. 由引理 1 可知, 新生成的图 G_{n+1} 仍是最小刚性图. 相反, 如果一个最小刚性图 G_{n+1} 中一个顶点 i 的连通度 $d(i) = 2$, 可以对这个顶点进行反向增加顶点操作, 可以得到有 n 个顶点的最小刚性图 G_n .

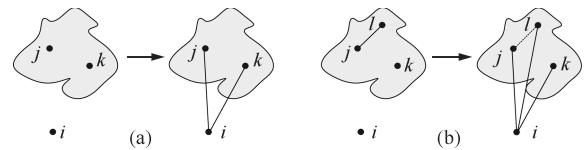


图 3 增加顶点和边分离操作
(a) 增加顶点操作; (b) 边分离操作

Fig.3 Increasing the vertex operation and edge separation operation ((a) The operation of increasing the vertex; (b) The operation of edge separation)

图 3 中, l, j 和 k 是有 n 个顶点的最小刚性图 $G_n(V, E)$ 中三个不同顶点, 并且 l, j 间有边 (l, j) . 边分离操作, 就是增加顶点 i , 连接边 (i, l) 、 (i, j) 和 (i, k) , 并去掉边 (l, j) , 如图 3(b) 所示. 由引理 1 易知, 新生成的图 G_{n+1} 仍是最小刚性图. 此时边 (i, l) 、 (i, j) 成为替代边 (l, j) 维持原刚性图刚性的等效边. 然而, 从最小刚性图 G_{n+1} 到 G_n 的反向边分离操作不像反向增加顶点操作那样能够直接得到 n 个顶点的刚性图 G_n . 在去掉顶点 i 的同时, 要去掉边 (i, l) 、 (i, j) 和 (i, k) , 并在顶点 l, j 和 k 之间增加一条边. 但是需要考虑增加哪条边来维持图 G_n 的刚性, 保证反向操作得到的图仍为最小刚性图. 因为并不是在顶点 l, j 和 k 之间任意增加一条边都可以保证图 G_n 的刚性. 如图 4(b) 所示, 通过反向边分离操作能保持图的刚性, 而图 4(c) 中增加的边 (l, k) 并不能保持图的刚性. 但是边分离的反向操作, 在 (l, j) 、 (l, k) 和 (j, k) 之间必然存在一条边使 G_n 保持刚性.

路径取反操作是针对有向图的一种操作^[16], 这种操作不会对相应的无向图产生影响, 但是能使一个无向图对应的有向图转换成另一个有向图. $(\overrightarrow{i, j})$ 是有向图中的一条有向边, 并且顶点 j 至少有一个自由度, 也就是说 $d^-(j) = 1$ 或 $d^-(j) = 0$.

路径取反操作, 就是使有向边 $(\overrightarrow{i, j})$ 变为 $(\overrightarrow{j, i})$, 改变有向边的方向, 如图 5(a) 所示. 换句话说, 路径取反操作就是使顶点 j 的一个自由度转移到顶点 i 上. 这样的路径取反操作并不会增加或者减少相应无向图的边数, 只会改变有向图的有向边的方向. $(\overrightarrow{i, \dots, k, \dots, j})$ 是图 $G_n(V, E)$ 中的一条有向路径, 其中顶点 j 至少有一个自由度, 对这条路径进行取反操作. 操作后有向路径变为 $(\overrightarrow{i, \dots, k, \dots, j})$, 顶点 j 的一个自由度转移到 i 上, 并且顶点 i, j 之间任何顶点的自由度不会发生改变. 如图 5(b) 所示, 中间顶点 k 的出度入度保持不变, 所以自由度不发生变化. 给出定理 2.

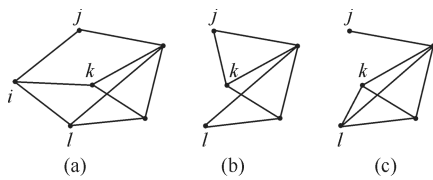


图 4 反向边分离操作的刚性与非刚性

Fig. 4 The rigid and nonrigid of reversing edge separation

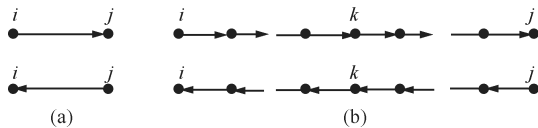


图 5 路径取反操作

Fig. 5 The operation of reversing path

定理 2. 对一条路径的有向边取反, 则只有路径两端的顶点出度变化, 中间顶点的出度不变.

证明. 一条有向路径的中间点起着连接两边顶点的作用. 对于这条有向路径, 中间点必有一个相应的出度和入度, 无论方向如何改变, 出度和入度的数目不会改变, 所以中间点的出度不变, 只有两边顶点产生变化. □

当进行路径取反操作时, 为保持图的持久性, 并使顶点 j 的一个自由度转移到 i 上, 给出如下引理来保证操作的进行:

引理 2^[15]. 在一个最小持久图中, i 和 j 是图 $G(V, E)$ 的两个顶点, 顶点 i 和 j 之间存在一条有向路径可以进行路径取反, 当且仅当 $d^-(i) \geq 1$ 并且 $d^-(j) \leq 1$.

由引理 1 可知, 当图中的两个顶点一个顶点出度大于等于 1, 一个顶点的出度小于等于 1 时, 这两个顶点之间一定存在一条有向路径, 进行路径取反, 将两个顶点的自由度相互转移.

2.2 刚性图的有向化操作

在上一节中已经提出了刚性图扩展的两个基本操作, 并给出了增加顶点操作、边分离操作的反向操作方法和对路径取反操作的方法. 基于这些基本方法, 本节给出对刚性图有向化操作的方法和基础理论.

哈尼伯格序列是一个关于图 G_2, G_3, \dots, G_n 的序列, 其中图 G_2 是一个包含两个顶点的完全图, 每个图 $G_i (i \geq 3)$ 可以由图 G_{i-1} 通过增加顶点操作或者边分离操作获得. 由于完全图 G_2 是一个最小刚性图, 并且增加顶点操作和边分离操作保证了生成图的最小刚性, 所以每个图 G_i 都是一个最小刚性图, 哈尼伯格序列是一个最小刚性序列.

引理 3^[15]. 每个最小刚性图 $G_i (i \geq 2)$ 均可作为某个哈尼伯格序列的结果而获得.

根据引理 3 我们可以得到, 每个最小刚性图都可以通过增加顶点或者边分离操作获得, 由此, 我们有以下推论.

推论 1^[15]. 每个最小刚性图中, 至少包含一个连通度为 2 或者 3 的顶点.

根据推论 1, 我们可以对每个连通度为 2 或者 3 的顶点, 进行一次有向化操作. i 是图 $G(V, E)$ 中连通度为 2 的顶点, 与 i 相关联的边是 (i, j) 和 (i, k) . 对 i 进行有向化就是对 i 的自由度进行约束, 去掉边 (i, j) 和 (i, k) 并做有向边 $(\overrightarrow{i, j})$ 、 $(\overrightarrow{i, k})$, 使 i 的出度 $d^-(i) = 2$, 如图 6(a) 所示. 在对顶点 i 有向化之后, 顶点 i 和与其相关联的边都已有向化, 去掉该点和相应边, 剩余的图仍为最小刚性图, 可以继续对连通度为 2 的顶点进行有向化. 所以对连通度为 2 的顶点的有向化操作能够使刚性图有向化为持久图.

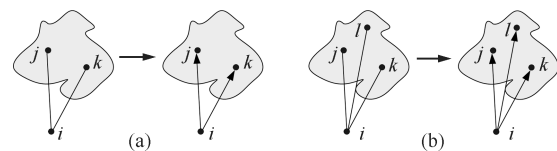


图 6 顶点有向化操作 ((a) 2 度顶点有向化操作; (b) 3 度顶点有向化操作)

Fig. 6 The operation of adding direction ((a) The operation of adding direction with 2 degrees; (b) The operation of adding direction with 3 degrees)

若在有向化操作中一直能够进行连通度为 2 的有向化操作, 则最终将得到剩余一条边的无向图 G_2 , 将此含有 1 连通度的顶点进行有向化, 最终生成 G_n 对应的最小持久图.

图 G_i 是由 G_{i-1} 通过边分离操作得到, 且此时没有连通度为 2 的点, 可对图中连通度为 3 的点进行有向化操作. i 是图 $G(V, E)$ 中连通度为 3 的点,

与 i 相关联的边是 (i, l) 、 (i, j) 和 (i, k) 。对 i 进行有向化操作类似对连通度为 2 的顶点进行有向化操作。做有向边 $(\vec{i, j})$ 、 $(\vec{i, k})$ 、 $(\vec{i, l})$ ，此时 i 的出度 $d^+(i) = 3$ ，如图 6(b) 所示。此时顶点 i 和与其相关联的边都已有向化，去掉该点和相应边，剩余的图不是最小刚性图。需要讨论是否仍然能够对图进行有向化操作。下面给出定理 3 来证明操作的可行性。

定理 3. 执行完一次 3 度操作后，剩余的无向图不是最小刚性图，但仍能满足执行 1, 2, 3 度操作的条件，仍可对其执行 1, 2, 3 度操作。

证明. 如图 3(b)，最小刚性图 G_n ，如果进行一次反向边分离操作，需要在去掉边 (i, l) 、 (i, j) 和 (i, k) 的同时，增加边 (l, j) 来保证图的刚性。在刚性图 G_{n-1} 中边 (l, j) 可能是 G_i 图到 G_{n-1} 图扩展过程中，增加顶点操作后得到的一条边；也可能是边分离操作后得到的一条边；或者是 G_2 图的边。但无论是哪种情况，总能保证剩余的无向图有 1、2 或者 3 连通度的顶点，能够继续进行有向化操作。并且在进行一次 1 度有向化操作后能保证剩余无向图为最小刚性图。□

定理 3 给出了根据顶点连通度进行有向化操作的可行性的证明，说明了根据顶点连通度为 1、2 或 3 度进行有向化操作能够对无向图 G_n 进行有向化。但在有向化过程中，如果有一个顶点进行了 3 度操作，那么被有向化的图不能保证每个顶点的出度 $d^+(i) \leq 2$ 。为了生成持久图，需要使 3 出度的顶点将多余的一个出度转移到出度不足 2 的顶点上。给出以下定理证明出度转移的可行性。

定理 4. 最小刚性图中，对顶点执行一次 3 度操作后，剩余的无向图中增加一个 1 或者 0 出度的顶点。

证明. 由定理 1 知，对于最小持久图 G_n ，至少有两个顶点出度小于 2，则生成此持久图至少有一次 1 度操作。同时由定理 1 知，生成的持久图 G_n ，除去几个顶点的出度小于 2 之外，所有顶点的出度都是 2。因此，每增加一个 3 度顶点的有向化，就会从出度为 2 或者 1 的顶点上夺走一个出度。所以最小刚性图 G_n 进行有向化时，每进行一次 3 度顶点操作，就会增加一个 1 或者 0 出度的顶点。□

定理 4 证明了每增加一次 3 度操作，就会增加一个 1 或 0 出度顶点。这样的生成图并不是最小持久图，因为有顶点的出度不满足 $d^+(i) \leq 2$ 。这样就需要将出度大于 2 的顶点的出度转移到出度小于 2 的顶点上。

定理 5. 执行完一次 3 度操作后，在 3 出度顶点和出度不足 2 度顶点间至少存在 1 条有向路径，将 3 出度顶点的 1 个出度转移到出度不足 2 度的顶点

上。

证明. 通过引理 2 易知，在出度为 3 的顶点和出度为 1 或 0 的顶点之间一定存在一条有向路径，进行路径取反。结合定理 2，我们很容易将出度为 3 的一个顶点的出度转移到出度为 1 或 0 的顶点上。□

根据以上定理和引理，我们给出以下 3 个生成最优持久图的 4 个基本依据：

1) 若一个顶点连通度为 2，则直接进行有向化，缩小剩余最小刚性图范围。

2) 若一个顶点连通度为 3，则直接进行有向化。剩余无向图比最小刚性图更简单。 $E = 2n - 3 - 1$ ，并且剩余图进行有向化后，其中必增加一个连通度为 1 或 0 的顶点。

3) 若一个顶点连通度为 1，则直接进行有向化。缩小为最小刚性图范围，并缩小范围。

4) 出度为 3 的顶点到出度为 1 或者 0 的顶点之间至少有 1 条有向路径，将其中一条路径的方向取反。

3 持久编队的生成策略

在上一节中给出了对最优刚性图进行有向化的 4 个基本操作。本节将运用 4 个基本操作，生成最优持久编队。灵活的运用 4 个基本操作，可由最优刚性图 G_n 生成多个最优持久图。由引理 2 可知，经过路径取反操作，可以将持久图中顶点的自由度转移，将各个顶点的出度入度互换，所以经过路径取反操作可以将多个由刚性图 G_n 生成的持久图进行相互转化。为了生成唯一的持久图，我们给出如下生成策略。

文献 [19] 给出了最优刚性编队的生成算法，通过此算法可以生成唯一的最优刚性编队，本文在此基础上，考虑减少最优刚性编队中智能体之间的通信能耗，利用对 1, 2, 3 度顶点有向化的基本方法，将无向通信链路进行有向化。并利用 Dijkstra 算法来寻找需要转移出度的两点间跳数最小的路径。使出度为 3 的顶点向出度为 1 或 0 的顶点进行出度转移，最终生成最优持久图，进一步降低通信复杂度，减少通信链路的能量消耗，延长编队的生存时间。图 7 给出持久图的生成算法。通过对给定智能体编号，确定算法的执行顺序，生成唯一的最优持久图。

算法中邻接矩阵 A' 作为 Dijkstra 算法中的目标矩阵。此算法实现了对最优刚性编队的有向化，编队中的所有通信边均为有向边，并且确保每个智能体的单向通信邻居个数不大于 2，通过此算法生成的编队即为最优持久编队。

根据以上算法，所有的多智能体最优刚性编队均可以生成唯一的最优持久编队。算法复杂度是衡

量算法优劣的一个重要指标,文中将复杂度定义为 $O(f(n))^{[21]}$,其中 $f(n)$ 是执行 1, 2, 3 度或路径取反操作的次数.当 $O(f(n))$ 越大时,复杂度越高,反之复杂度越低.

进行 3 度操作的次数, $x \in [0, \frac{2n-3}{3}]$.

当刚性图中包含 5 条边及以上的基础圈时,文献 [20] 中算法复杂度 $O(f(n)) \rightarrow \infty$,不能成功生成最优持久编队,而在相同情况下,本文所提算法的复杂度为 $O(n-1+x) \in [n-1, \frac{5n-6}{3}]$,可以成功生成最优持久编队,即本文算法优于文献 [20] 的算法.

4 仿真实验

本节将通过 Matlab 仿真证明算法的有效性.考虑到文献 [20] 提出的最优持久编队生成算法的局限性,本文提出的算法对生成最优持久编队具有普遍适用性,故主要将文献 [20] 提出的算法与本文提出的算法进行比较,证明本文提出算法的优越性.

在 R^2 中给出 16 个随机分布的多智能体,图中黑点代表智能体,智能体间的无向连线表示智能体间的双向通信连接,有向箭头表示智能体间的单向通信链路,并且所有智能体有相同的最大通信半径 $r = 40$.

仿真图 8 和图 9 分别为采用文献 [20] 算法和本文算法生成最优持久图.图 8(a) 为 16 个智能体随机分布;图 8(b) 为采用文献 [20] 中方法生成的最优刚性编队,并且编队内的邻居智能体间都是双向通信的;图 8(c) 中任意给定智能体 a 和 b 的方向 (\vec{b}, a) ,然后根据文献 [20] 中的方法生成最优持久图,可以发现该方法在出现五边形的基础圈后失效,不能生成最优持久图,只有部分智能体间实现了有向通信.

仿真图 9 是采用本文设计的算法生成的最优持久编队.图 9(a) 是对图 8(b) 2 度顶点进行有向化操作的过程,图中所有 2 出度智能体都已进行了有向化;图 9(b) 是在 2 度顶点有向化无法进行下去的时候进行的一次 3 度顶点有向化过程,图中增加了一个顶点的 3 出度有向化;图 9(c) 是在进行了一次 3 度操作后继续对无向图进行有向化的过程,分别对 2 度和 1 度顶点进行有向化,生成有向图;图 9(d) 是对出度为 3 的顶点进行出度转移,找出一个出度小于 2 的顶点,并找出一条从 3 度顶点到小于 2 度顶点之间的跳数最少的有向路径,并对这条路径取反,得到最终的最优持久图,图中分别标出了出度为 3 的顶点和出度为 0 的顶点.

图 9(d) 中的最优持久图和图 8(c) 生成的有向图比较,图 8(c) 说明文 [20] 采用的生成算法只能对部分最小刚性图适用,而本文采用的最优持久编队生成算法有更广泛的适用性,对任意最小刚性图适用.

5 结论

针对二维空间中减少智能体间的通信边并减少

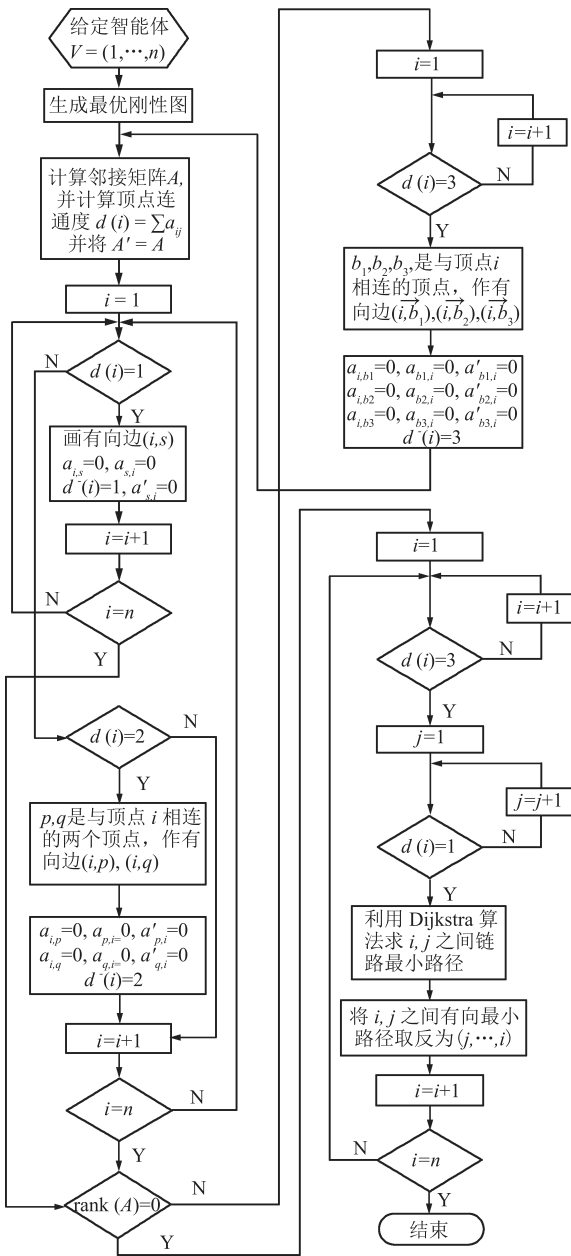
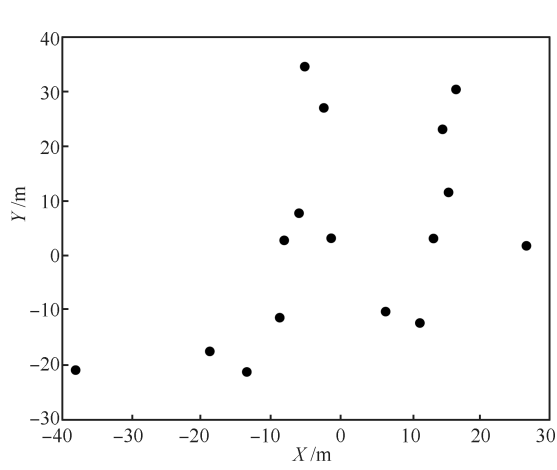


图 7 最优持久编队生成算法

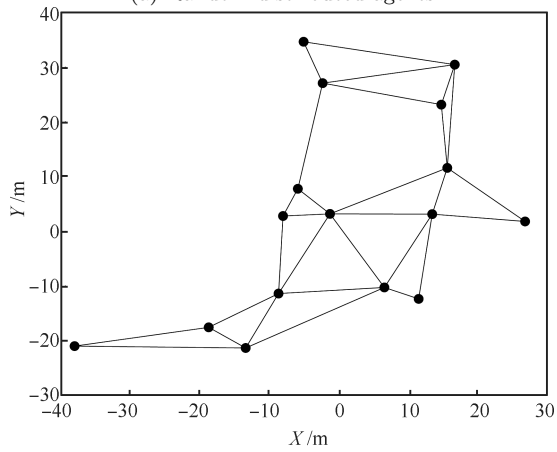
Fig. 7 The generation algorithm of optimal persistence formation

刚性图 $G_n(V, E)$,可以由子图 G_2 通过 $n-2$ 次增加顶点或边分离操作生成,反向操作,持久图 G_n 最少可以在 $n-1$ 次有向化操作后生成.在操作中每增加一次 3 度顶点的操作就要增加一次路径取反操作,因此复杂度最高为 $O(n-1+x)$,其中 x 为



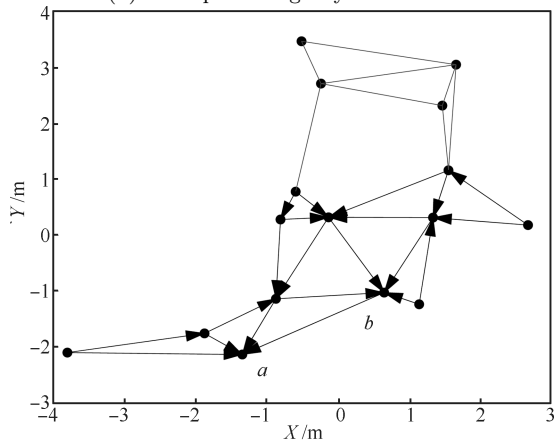
(a) 随机分布的智能体

(a) Random distributed agents



(b) 生成的最优刚性编队

(b) The optimal rigidity formation

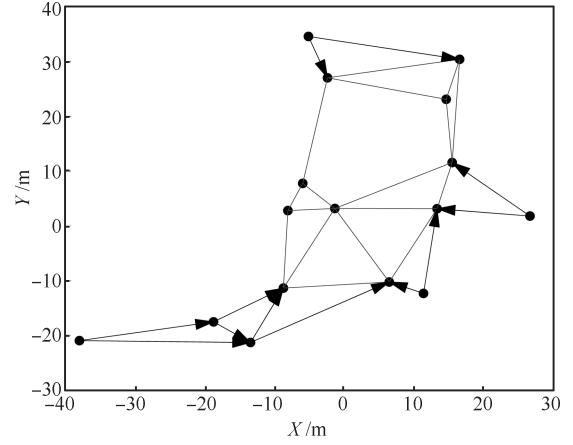


(c) 由文献 [20] 有向化的通信链路

(c) The communication directed by [20]

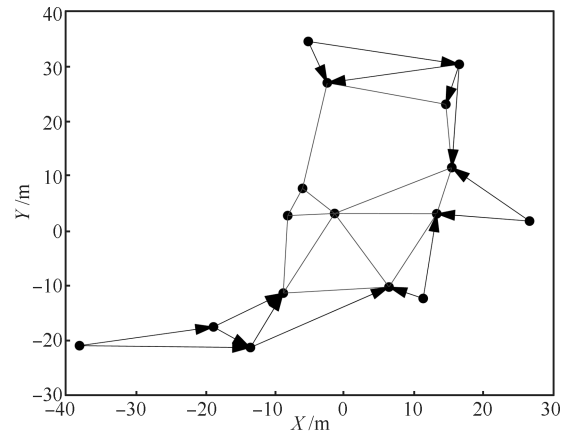
图 8 智能体初始位置及两种拓扑结构

Fig. 8 The initial positions and two kinds of topological structure for agents



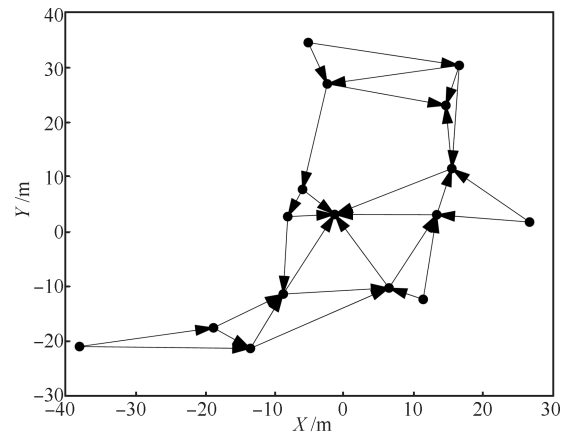
(a) 2 度顶点的有向化

(a) Adding direction for 2 degrees' agents



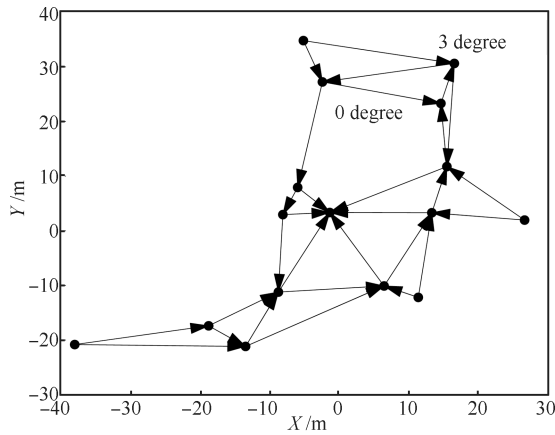
(b) 3 度顶点的有向化

(b) Adding direction for 3 degrees' agents



(c) 2 和 1 度顶点的有向化

(c) Adding direction for 2 and 1 degrees' agents



(d) 路径取反

(d) The operation of reversing path

图 9 最优持久编队生成

Fig. 9 The generation of optimal persistence formation

通信链路间的能量消耗问题, 本文提出了具有普遍适用性的基于最优刚性图的最优持久图的生成算法。通过运用 4 种有向化操作, 实现了所有通信边的有向化, 保证了编队的持久性, 并且最大限度地减少了维持智能体之间结构稳定的信息交互。

References

- Liu Y, Jia Y M. An iterative learning approach to formation control of multi-agent systems. *Systems and Control Letters*, 2012, **61**(1): 148–154
- Lu X Q, Austin F, Chen S H. Formation control for second-order multi-agent systems with time-varying delays under directed topology. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, **17**(3): 1382–1391
- Chen Yang-Yang, Tian Yu-Ping. Directed coordinated control for multi-agent formation motion on a set of given curves. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(12): 1541–1549 (陈杨杨, 田玉平. 多智能体沿多条给定路径编队运动的有向协同控制. *自动化学报*, 2009, **35**(12): 1541–1549)
- Zhou J, Wu X Q, Yu W W, Small M, Lu J A. Flocking of multi-agent dynamical systems based on pseudo-leader mechanism. *Systems & Control Letters*, 2012, **61**(1): 195–202
- Wen G H, Duan Z S, Li Z K, Chen G R. Flocking of multi-agent dynamical systems with intermittent nonlinear velocity measurements. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, **22**(16): 1790–1805
- Huang Q Z. Consensus analysis of multi-agent discrete-time systems. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1127–1133
- Ding L, Han Q L, Guo G. Network-based leader-following consensus for distributed multi-agent systems. *Automatica*, 2013, **49**(7): 2281–2286
- Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(3): 401–420
- Hendrickx J M, Anderson B D O, Delvenne J C, Blondel V D. Directed graphs for the analysis of rigidity and persistence in autonomous agent systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, **17**(10–11): 960–981
- Anderson B D O, Yu C B, Fidan B, Hendrickx J M. Rigid graph control architectures for autonomous formations. *IEEE Control Systems Magazine*, 2008, **28**(6): 48–63
- Cao H, Bai Y Q, Chen J, Fang H. Control of 2D minimally persistent formations with three co-leaders in a cycle. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2013, **10**(21): 1–9
- Kwang K O, Hyo S A. Local asymptotic convergence of a cycle-free persistent formation of double-integrators in three-dimensional space. In: Proceedings of the 2012 IEEE International Symposium on Intelligent Control. Dubrovnik, Croatia: IEEE, 2012. 692–696
- Park M C, Oh K K, Ahn H S. Modified gradient control for acyclic minimally persistent formations to escape from collinear position. In: Proceedings of the 51st Annual Conference on Decision and Control. Maui, USA: IEEE, 2012. 1423–1427
- Shi G D, Johansson K H. Persistent graphs and consensus convergence. In: Proceedings of the 51st Annual Conference on Decision and Control. Maui, USA: IEEE, 2012. 2046–2051
- Hendrickx J M, Fidan B, Yu C B, Anderson B D O, Blondel V D. Elementary operations for the reorganization of minimally persistent formations. In: Proceedings of the 2006 International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. Kyoto, Japan: IEEE, 2006. 859–873
- Hendrickx J M, Fidan B, Yu C B, Anderson B D O, Blondel V D. Primitive operations for the construction and reorganization of minimally persistent formations. *Multagent Systems*, 2006, **62**(21): 1–26
- Smith B S, Egerstedt M B, Howard A M. Automatic generation of persistent formations for multi-agent networks under range constraints. In: Proceedings of the 1st International Conference on Robot Communication and Coordination. Athens, Greece: Georgia Institute of Technology, 2007. 1–8
- Ren R, Zhang Y Y, Luo X Y, Li S B. Automatic generation of optimally rigid formations using decentralized methods. *International Journal of Automation and Computing*, 2010, **7**(4): 557–564
- Luo X Y, Li S B, Guan X P. Automatic generation of min-weighted persistent formations. *Chinese Physics B*, 2009, **18**(8): 3104–3114
- Luo Xiao-Yuan, Shao Shi-Kai, Guan Xin-Ping, Zhao Yuan-Jie. Dynamic generation and control of optimally persistent formation for multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(9): 1431–1438 (罗小元, 邵士凯, 关新平, 赵渊洁. 多智能体最优持久编队动态生成与控制. *自动化学报*, 2013, **39**(9): 1431–1438)

- 21 Yoshinari A, Nishivama H, Kato N, Sung D K. Dynamic topology update mechanism in local tree-based reliable topology (LTRT) based MANETs. In: Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Communications. Ottawa, Canada: IEEE, 2012. 281–285



罗小元 燕山大学电气工程学院教授. 2005 年于燕山大学获得博士学位. 主要研究方向为多智能体协调控制, 网络系统预测控制. 本文通信作者.

E-mail: xylo@ysu.edu.cn

(**LUO Xiao-Yuan** Professor in the Department of Electrical Engineering, Yanshan University. He received his

Ph.D. degree from Yanshan University in 2005. His research interest covers coordinated control of multi-agent systems and predictive control of network systems. Corresponding author of this paper.)



杨帆 燕山大学控制理论与控制工程专业硕士研究生. 2011 年于燕山大学获得学士学位. 主要研究方向为无线传感器网络控制, 多智能体协调控制.

E-mail: ffanyangy@163.com

(**YANG Fan** Master student in control theory and control engineering at Yanshan University. He received his

bachelor degree from Yanshan University in 2011. His research interest covers control of wireless sensor network and

coordinated control of multi-agent systems.)



李绍宝 香港城市大学机械及生物医学工程系博士研究生. 分别于 2006 年和 2011 年在燕山大学获得学士学位和硕士学位. 主要研究方向为多智能体协调控制和无线传感器网络覆盖.

E-mail: shbli1984@gmail.com

(**LI Shao-Bao** Ph.D. candidate in the Department of Mechanical and

Biomedical Engineering, City University of Hong Kong. He received his bachelor and master degrees in electrical engineering from Yanshan University in 2006 and 2011, respectively. His research interest covers cooperative control for multi-agent systems and coverage of sensor networks.)



关新平 燕山大学教授, 上海交通大学教授. 1999 年于哈尔滨工业大学获得博士学位. 主要研究方向为网络化系统控制, 多智能体协调控制.

E-mail: xpguan@ysu.edu.cn

(**GUAN Xin-Ping** Professor at Yanshan University and Shanghai Jiao

Tong University. He received his Ph.D. degree from Harbin Institute of Technology in 1999. His research interest covers control of network systems and coordinated control of multi-agent systems.)