一类非线性系统的全局渐近稳定和有限时间镇定

周映江 [1] 王 莉 [1,2] 孙长银 [1]

摘 要 针对一类全矩阵形式的非线性系统, 研究其全局稳定性及有限时间镇定问题. 首先, 全矩阵形式非线性系统被分成上三角形式和下三角形式非线性系统的加和, 并针对下三角形式非线性系统, 利用加幂积分方法, 自上而下地设计系统的全局稳定控制器; 其次, 在上面控制器作用下, 证明全矩阵形式系统在一个给定领域内是局部渐近稳定的; 最后, 运用自下而上的顺序, 一种嵌套饱和方法被用到上述控制器中, 通过调节饱和度, 使得闭环系统全局渐近稳定. 此外, 在适当的条件下, 可以得到全矩阵形式非线性系统的全局有限时间稳定性.

关键词 全局稳定, 非线性系统, 加密积分方法, 有限时间镇定

引用格式 周映江, 王莉, 孙长银. 一类非线性系统的全局渐近稳定和有限时间镇定. 自动化学报, 2013, **39**(5): 664−672

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00664

Global Asymptotic and Finite-time Stability for Nonlinear Systems

ZHOU Ying-Jiang[1] WANG Li[1,2] SUN Chang-Yin[1]

Abstract In this paper, the problems of global asymptotic and finite-time stability of a class of nonlinear systems are considered. The control law is designed in the following three steps: First, the full matrix form nonlinear system is divided into a lower-triangular form plus a upper-triangular form. And for the lower-triangular systems, the generalized adding a power integrator technique is used to design the global stabilization controller from top to bottom. Next, we proof that the whole system is locally asymptotically stabile in a given region under the above controller. Finally, a series of nested saturations are imposed on the above controller. And by adjusting the saturation level, the global asymptotic stability of the closed-loop systems is ensured. In addition, we can also obtain the global finite-time stability of the whole nonlinear system under appropriate conditions.

Key words Global stabilization, nonlinear system, adding a power integrator, finite-time stability

Citation Zhou Ying-Jiang, Wang Li, Sun Chang-Yin. Global asymptotic and finite-time stability for nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 664−672

无论从理论还是从实际应用角度, 本质非线性控制问题一直都是控制界关注的热点和难点. 由于缺乏适当的工具及方法, 依然还有很多本质非线性控制问题没有得到有效解决. 近些年来, 有很多文献关注下三角或者上三角形式非线性系统, 但很少有文献研究全矩阵形式非线性系统的全局稳定情况.

本文考虑如下形式的非线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= d_1(\boldsymbol{x})x_2^{p_1} + f_1(\boldsymbol{x})\\ \dot{x}_2 &= d_2(\boldsymbol{x})x_3^{p_2} + f_2(\boldsymbol{x})\\ &\vdots\\ \dot{x}_{n-1} &= d_{n-1}(\boldsymbol{x})x_n^{p_{n-1}} + f_{n-1}(\boldsymbol{x})\\ \dot{x}_n &= d_n(\boldsymbol{x})u^{p_n} + f_n(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}$ 分别是系统状态和控制输入, 非线性项 $d_i(\boldsymbol{x})$ 和 $f_i(\boldsymbol{x})$ 是不完全已知的函数, $d_i(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{C}^0$, $f_i(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{C}^0$, 并且指数 p_i 是两个正整数的比值 (例如: p/q, p, q 是任意正奇整数).

在已有的关于非线性控制系统的研究中, 许多研究是针对下三角形式的非线性系统 (常常是系统 (1) 中, $p_i = 1$, $d_i = 1$, $f_i(\boldsymbol{x})$ 满足下三角形式), 考虑其各种稳定性, 解决这种问题的最经典方法是反步法[1−3]. 后来, 反步法被扩展到 $p_i \geq 1$ 的情况下, 由此产生了加幂积分方法[4]. 其后, 在许多学者的不懈努力下, 加幂积分方法的限制条件不断被突破, 并且对于 p_i 的要求也在不断的降低[5−7].

与此同时, 一些学者研究上三角非线性系统的控制问题. 当 $p_i = 1$ 和 $d_i = 1$ 时, 有两种主要的方法, 李雅普诺夫控制方法和嵌套饱和控制方法. 李雅普诺夫控制方法运用坐标变换和李雅普诺夫函数去考虑系统的稳定性问题[8−9]. 文献 [10−11] 首次提出嵌套饱和控制方法, 然后, 根据饱和函数的各种形式的扩展, 这个方法被用到非线性系统控制的各个领域[12−15]. 并且当 $p_i \geq 1$ 时, 上三角非线性系统的全局稳定更具有挑战性. 文献 [16−17] 把李雅普诺夫控制方法和嵌套饱和控制方法结合到一起, 弱化了指数和非线性项的限制, 因此, 可以处理更一般的非线性系统的稳定性问题.

然而, 尽管已经存在许多非线性控制方法, 但很少有文章关注全矩阵形式非线性系统的控制问题. 综合下三角形式及上三角形式系统的优点, 本文结合李雅普诺夫控制方法和嵌套饱和控制方法, 考虑全矩阵形式非线性系统 (1) 的全局渐近稳定性问题. 首先, 把全矩阵形式非线性系统分为一个下三角形式系统加上一个上三角形式系统; 然后, 针对下三角形式非线性系统, 运用扩展的加幂积分方法设计此系统的全局稳定控制器; 其次, 证明全矩阵形式系统在一个给定区域内是局部渐近稳定的; 最后, 一系列嵌套饱和函数将被整合进上述控制器, 并且通过调节饱和度, 确保闭环系统全局渐近稳定. 此外, 当下三角系统的齐次度为负时, 可以得到全系统的全局有限时间镇定结果.

为方便起见, 定义 $\boldsymbol{X}_i = [x_1, \cdots, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$, 这将贯穿全文.

在本文中, 基于以下两个假设研究了非线性系统 (1) 的全局稳定性.

假设 1. 当 $i = 1, \cdots, n$ 时, 以下不等式成立:

$$f_i(\boldsymbol{x}) = f_{1i}(\boldsymbol{x}) + f_{2i}(\boldsymbol{x})$$

$$|f_{1i}(\boldsymbol{x})| \leq b_{1i}(\boldsymbol{X}_i)(|x_1|^{q_{i1}} + \cdots + |x_i|^{q_{ii}}), \quad i = 1, \cdots, n$$

$$|f_{2i}(\boldsymbol{x})| \leq b_{2i}(x_{i+1}, \cdots, x_n)(|x_{i+1}|^{q_{i,i+1}} + \cdots + |x_n|^{q_{in}})$$

$$|f_{2n}(\boldsymbol{x})| = 0, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

收稿日期 2012-05-15 录用日期 2012-08-28
Manuscript received May 15, 2012; accepted August 28, 2012
国家自然科学基金 (61034002), 国家杰出青年科学基金 (61125306) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61034002) and National Science Fund for Distinguished Youth Scholars of China (61125306)
本文客座编委 李少远
Recommended by Guest Editor LI Shao-Yuan
1. 东南大学自动化学院 南京 210096 2. 扬州大学能源与动力工程学院 扬州 225127
1. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096 2. School of Energy and Power Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127

则

$$|f_i(\boldsymbol{x})| \le b_i(\boldsymbol{X}_n)(|x_1|^{q_{i1}} + \cdots + |x_n|^{q_{in}})$$

其中, $b_{1i}(\boldsymbol{X}_i) \ge 0$, $b_{2i}(x_{i+1},\cdots,x_n) \ge 0$ 为光滑函数, q_{ij} 满足:

$$q_{ij} = \frac{p_i r_{i+1}}{r_j} > 0, \quad i=1,\cdots,n, \quad j=1,\cdots,i$$

$$q_{ij} > \frac{p_i r_{i+1}}{r_j} > 0, \quad i=1,\cdots,n-1, \quad j=i+1,\cdots,n$$

此处, $r_i > 0$, $i=1,\cdots,n$, 定义如下: $r_1 = 1$, $r_{i+1} = (r_i+\tau)/p_i$, $i=1,\cdots,n$, τ 为一常数.

注 1. 为方便起见, 本文中不妨假设 τ 是偶数与奇数的比值, 例如 $\tau = \tau_1/\tau_2$, 其中, τ_1 是偶数, τ_2 是奇数. 因此, 常数 r_i 是两个奇数的比值.

假设 2. 当 $i=1,\cdots,n$ 时, $\bar{d}_i > 0$, $\underline{d}_i > 0$, 且它们之间满足以下关系: $0 < \underline{d}_i \le d_i(\boldsymbol{x}) \le \bar{d}_i$, $i=1,\cdots,n$.

1 系统局部稳定性

首先利用文献 [7] 中的扩展加幂积分方法设计下三角形式非线性系统的全局渐近稳定性, 然后, 利用齐次理论证明系统 (1) 是局部稳定的.

具体来说, 在假设 1 和 2 条件下, 设计出下面控制器:

$$u = -\beta_n \left(x_n^{\frac{\sigma}{r_n}} - x_n^{*\frac{\sigma}{r_n}} \right)^{\frac{r_{n+1}}{\sigma}} \tag{2}$$

其中, $\sigma \ge \max_{1\le i\le n}\{r_i\}$, $\rho \ge \max_{1\le i\le n}\{\tau + r_i, \sigma\}$, $x_1^* = 0$, $x_i^* = -\beta_{i-1}\left(x_{i-1}^{\sigma/r_{i-1}} - x_{i-1}^{*\sigma/r_{i-1}} \right)^{r_i/\sigma}$, $i=2,\cdots,n$.

定理 1. 在假设 1 和 2 条件下, 存在光滑函数 $\beta_1^*(\cdot)$ 和控制器 (2) 使得系统 (1) 局部渐近稳定. 当假设 1 中的参数 τ 小于零时, 闭环系统 (1) 和 (2) 是局部有限时间镇定的.

证明. 首先, 考虑如下系统, 设计出控制器 (2) 使得该系统全局渐近稳定.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= d_1(\boldsymbol{x})x_2^{p_1} + f_{11}(\boldsymbol{x}) \\ \dot{x}_2 &= d_2(\boldsymbol{x})x_3^{p_2} + f_{12}(\boldsymbol{x}) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= d_{n-1}(\boldsymbol{x})x_n^{p_{n-1}} + f_{1,n-1}(\boldsymbol{x}) \\ \dot{x}_n &= d_n(\boldsymbol{x})u^{p_n} + f_{1n}(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{3}$$

这里, 使用的方法非常类似文献 [7] 里的控制器设计方法, 所以推证部分省略, 只给出结果. 运用数学归纳法, 设计出第一步的虚拟控制器, 再设计出第 k 步的虚拟控制器, 最后, 当 $k=n+1$ 时, 设计出最终的控制器为

$$\begin{aligned} u = x_{n+1} = x_{n+1}^* = -\xi_n^{\frac{r_n+\tau}{\sigma}}\beta_n^{p_n}(\boldsymbol{X}_n) = \\ -\beta_n^{p_n}(x_n^{\frac{\sigma}{r_n}} + \beta_{n-1}^{p_{n-1}}(x_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_{n-1}}} + \cdots + \\ \beta_2^{p_2}(x_2^{\frac{\sigma}{r_2}} + \beta_1^{p_1}x_1^{\frac{\sigma}{r_1}})\cdots))^{\frac{r_n+\tau}{\sigma}} \end{aligned}$$

容易得出: $\dot{V}_n(\boldsymbol{X}_n) \le -\sum_{i=1}^n \xi_i^{\frac{2\rho}{\sigma}} \le 0$, 而 $V_n(\boldsymbol{X}_n) = \sum_{k=1}^n \int_{x_k^*}^{x_k} (s^{\sigma/r_k} - x_k^{*\sigma/r_k})^{(2\rho-\tau-r_k)/\sigma} \mathrm{d}s$ 是正定李雅普诺夫函数. 因此, 系统 (1) 和 (2) 是全局渐近稳定的.

接下来, 在假设 1 和 2 条件下, 当参数 τ 为正, 闭环系统 (1) 是局部渐近稳定的, 但当参数 τ 为负时, 闭环系统 (1) 是局部有限时间稳定的. 在控制器 (2) 的作用下, 沿着系统 (1) 对 $V_n(\boldsymbol{X}_n)$ 求导可得: $\dot{V}_n(\boldsymbol{X}_n) \le -\sum_{i=1}^n \xi_i^{\frac{2\rho}{\sigma}} + \omega_1(\boldsymbol{X}_n)f_{21}(\cdot) + \cdots + \omega_{n-1}(\boldsymbol{X}_n)f_{2,n-1}(\cdot)$. 其中, $\omega_i(\boldsymbol{X}_n) = \frac{\partial V_n(\boldsymbol{X}_n)}{\partial x_i}$, $i=1,\cdots,n-1$.

根据文献 [17] 中的定义 1, 可以得到:

$$x_i^*(\varepsilon^{r_1}x_1,\cdots,\varepsilon^{r_{i-1}}x_{i-1}) = \varepsilon^{r_i}x_i^*(\boldsymbol{X}_{i-1})$$

$$V_n(\varepsilon^{r_1}x_1,\cdots,\varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^{2\rho-\tau}V_n(\boldsymbol{X}_n)$$

然后, 利用齐次系统理论, 可以得到:

$$\begin{aligned} \xi_i(\varepsilon^{r_1}x_1,\cdots,\varepsilon^{r_i}x_i) &= \varepsilon^{\sigma}\xi_i(\boldsymbol{X}_i), \\ \omega_i(\varepsilon^{r_1}x_1,\cdots,\varepsilon^{r_n}x_n) &= \varepsilon^{2\rho-\tau-r_i}\omega_i(\boldsymbol{X}_n) \end{aligned} \tag{4}$$

根据假设 1, 可以得到:

$$\begin{aligned} |f_{2i}(\boldsymbol{x})| \le b_{2i}(x_{i+1},\cdots,x_n)(|x_{i+1}|^{\frac{p_i r_{i+1}}{r_{i+1}}} + \cdots + \\ |x_n|^{\frac{p_i r_{i+1}}{r_n}})(|x_{i+1}|^{q_{i,i+1}-\frac{p_i r_{i+1}}{r_{i+1}}} + \cdots + |x_n|^{q_{in}-\frac{p_i r_{i+1}}{r_n}}) \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned} &H_1(\boldsymbol{X}_n) = \xi_1^{\frac{2\rho}{\sigma}} + \cdots + \xi_n^{\frac{2\rho}{\sigma}} \\ &H_2(\boldsymbol{X}_n) = \omega_1(\boldsymbol{X}_n)(|x_2|^{\frac{p_1 r_2}{r_2}} + \cdots + |x_n|^{\frac{p_1 r_2}{r_n}}) + \cdots + \\ &\quad \omega_{n-1}(\boldsymbol{X}_n)\,|x_n|^{\frac{p_{n-1}r_n}{r_n}} \end{aligned} \tag{5}$$

由式 (4) 可以得到, $H_1(\boldsymbol{X}_n)$ 和 $H_2(\boldsymbol{X}_n)$ 的齐次度为 $k=2\rho$. 根据文献 [18], 容易证明存在一个正常数 $\bar{c}$ 使得 $H_2(\boldsymbol{X}_n) \le \bar{c}H_1(\boldsymbol{X}_n)$, 把式 (5) 代入 $\dot{V}_n(\boldsymbol{X}_n)$, 可得:

$$\begin{aligned} &\dot{V}_n(\boldsymbol{X}_n) \le -H_1(\boldsymbol{X}_n) + b_{2i}(x_{i+1},\cdots,x_n)H_2(\boldsymbol{X}_n)\times \\ &\sum_{i=1}^{n-1}(|x_{i+1}|^{q_{i,\,i+1}-\frac{p_i r_{i+1}}{r_{i+1}}} + \cdots + |x_n|^{q_{in}-\frac{p_i r_{i+1}}{r_n}}) \le \\ &\bar{c}b_{2i}(x_{i+1},\cdots,x_n)H_1(\boldsymbol{X}_n)\sum_{i=1}^{n-1}(|x_{i+1}|^{q_{i,\,i+1}-\frac{p_i r_{i+1}}{r_{i+1}}} + \cdots + \\ &|x_n|^{q_{in}-\frac{p_i r_{i+1}}{r_n}}) - H_1(\boldsymbol{X}_n) \end{aligned} \tag{6}$$

由假设 1, 有 $q_{ij} > p_i r_{i+1}/r_j$. 因此, 存在一个区域 $\Omega = \{\boldsymbol{X}_n\,|V_n(\boldsymbol{X}_n) \le \lambda_0\}$ 使得所有的 $\boldsymbol{X}_n \in \Omega$, $\sum_{i=1}^{n-1}(|x_{i+1}|^{q_{i,\,i+1}-p_i r_{i+1}/r_{i+1}} + \cdots + |x_n|^{q_{in}-p_i r_{i+1}/r_n}) \le 1/2\bar{c}\rho$, 其中, $\lambda_0 > 0$.

由式 (6), 容易得到, 对所有的 $\boldsymbol{X}_n \in \Omega$, 有 $\dot{V}_n(\boldsymbol{X}_n) \le -H_1(\boldsymbol{X}_n)/2$, 则可以得到闭环系统 (1) $\sim$ (2) 是局部渐近稳定的.

同样, 容易知道 $V_n^{2\rho/(2\rho-\tau)}(\boldsymbol{X}_n)$ 的齐次度是 $k=2\rho$, 根据文献 [18] 中的引理 2.3, 可以容易地得到, 存在常数 $c > 0$, 使得 $H_1(\boldsymbol{X}_n) \ge cV_n^{2\rho/(2\rho-\tau)}(\boldsymbol{X}_n)$. 则可以得到: $\dot{V}_n(\boldsymbol{X}_n) \le -cV_n^{2\rho/(2\rho-\tau)}(\boldsymbol{X}_n)/2$, $\forall \boldsymbol{X}_n \in \Omega$. 因此, 可以得到, 当 $\tau < 0$ 时, 增益 $2\rho/(2\rho-\tau) \in (0,1)$. 并且根据文献 [17] 的引理 2.1, 可以得到系统 (1) 是局部有限时间镇定的. □

2 非线性系统全局稳定性

为了解决闭环系统 (1) 的全局稳定问题, 整合了一系列嵌套饱和函数和齐次控制器, 并且调整饱和度. 在假设 1 和 2

条件下, 存在一个小常量 $\vartheta > 0$ 和增益 β_i 设计下面控制器, 使得系统 (1) 全局稳定.

$$u = u_n(\boldsymbol{X}_n(t)) = -\beta_n \delta^{\frac{r_{n+1}}{\sigma}}(x_n^{\frac{\sigma}{r_n}} - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1})) \tag{7}$$

其中, $i = 1,\cdots,n-1$, $u_0 = 0$, $u_i(\boldsymbol{X}_i(t)) = -\beta_i\delta^{r_{i+1}/\sigma}(x_i^{\sigma/r_i} - u_{i-1}^{\sigma/r_i}(\boldsymbol{X}_{i-1}))$,

$$\delta(x) = \begin{cases} \vartheta\mathrm{sgn}(x), & \forall |x| > \vartheta \\ x, & \forall |x| \le \vartheta \end{cases}$$

增益 β_i 选取如下:

$$\beta_0 = 0$$

$$\beta_1 > \max\left\{\beta_1^*, 2^{\frac{r_2}{\sigma}}\left(\frac{1+2\bar{d}_1}{\underline{d}_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\right\} \tag{8}$$

$$\beta_i > \max\left\{2^{\frac{r_{i+1}}{\sigma}}\left(\frac{4(1+\beta_{i-1})\alpha_{i-1}+1+2\bar{d}_i}{\underline{d}_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}, \beta_i^*\right\}, \quad i = 2,\cdots,n$$

$$\alpha_1(\beta_1) = \sigma\beta_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(\bar{d}_1(1+\beta_1)^{p_1}+1)$$

$$\begin{aligned}\alpha_j(\beta_1,\cdots,\beta_j) = {} & \frac{\sigma\beta_j^{\frac{\sigma}{r_{j+1}}}}{r_j}(1+\beta_{j-1})^{\frac{\sigma}{r_j - 1}} \times \\ & (1+\bar{d}_j(1+\beta_{j-1})^{p_j}) + \beta_j^{\frac{\sigma}{r_{j+1}}}\alpha_{j-1}(\beta_1,\cdots,\beta_{j-1}), \\ & j = 2,\cdots,n-1\end{aligned} \tag{9}$$

显然, 式 (7) 的控制器 $u = u_n(\boldsymbol{X}_n(t))$ 的幅值在常量 $\beta_n\vartheta^{r_{n+1}/\sigma}$ 的范围内. 并且由于 ϑ 可以取任意小的正常数, 所以控制器 (7) 的幅值也可以任意小. 在证明主结论之前, 先证明下面两个重要的引理.

引理 1. 考虑非线性系统 (1), 在控制器 (7) 作用下, 假设 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$, $j = 1,\cdots,n$, 存在一个常数 $0 < \vartheta_1 < 1$, 使得对任意 $0 < \vartheta < \vartheta_1$, $|f_i(\boldsymbol{x})| \le \vartheta^{\frac{p_i r_{i+1}}{\sigma}}$ 成立.

证明. 由假设 1 可知, 对于任意的 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$, $j = 1,\cdots,n$, 都有:

$$\begin{aligned}|f_i(\boldsymbol{x})| \le {} & b_i(\boldsymbol{X}_n)((1+\beta_0)^{q_{i1}}\vartheta^{\frac{q_{i1}r_1}{\sigma}} + \cdots + \\ & (1+\beta_{n-1})^{q_{in}}\vartheta^{\frac{q_{in}r_n}{\sigma}}) = \\ & b_i(\boldsymbol{X}_n)((1+\beta_0)^{q_{i1}}\vartheta^{\left(\frac{q_{i1}r_1}{\sigma} - \frac{p_i r_{i+1}}{\sigma}\right)} + \cdots + \\ & (1+\beta_{n-1})^{q_{in}}\vartheta^{\left(\frac{q_{in}r_n}{\sigma} - \frac{p_i r_{i+1}}{\sigma}\right)})\vartheta^{\frac{p_i r_{i+1}}{\sigma}}\end{aligned} \tag{10}$$

结合假设 1 和式 (8), 可得, $q_{ij}r_j/\sigma > p_i r_{i+1}/\sigma$ 和常量 β_j, $j = 0,\cdots,n-1$. 并且可以很容易地取出常量 ϑ_1 满足 $0 < \vartheta_1 < 1$, $0 < \vartheta \le \vartheta_1 < 1$, 使得:

$$\begin{aligned}& b_i(\boldsymbol{X}_n)((1+\beta_0)^{q_{i1}}\vartheta^{\left(\frac{q_{i1}r_1}{\sigma} - \frac{p_i r_{i+1}}{\sigma}\right)} + \cdots + \\ & \quad (1+\beta_{n-1})^{q_{in}}\vartheta^{\left(\frac{q_{in}r_n}{\sigma} - \frac{p_i r_{i+1}}{\sigma}\right)}) \le 1\end{aligned} \tag{11}$$

把式 (10) 代入 (11), 可知引理 1 是正确的. □

引理 2. 考虑非线性系统 (1), 假设 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$, $j = i+1,\cdots,n$, 在控制器 (7) 作用下, 对每个 $i = 1,\cdots,n-1$, 存在式 (9) 定义的函数 $\alpha_i(\beta_1,\cdots,\beta_i)$ 和一个常数 $0 < \vartheta_1 < 1$, 使得对任意 $0 < \vartheta < \vartheta_1$, 下式成立:

$$\begin{aligned}& \left|u_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}(\boldsymbol{X}_i(\bar{t})) - u_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}(\boldsymbol{X}_i(\underline{t}))\right| \le \\ & \quad \alpha_i(\beta_1,\cdots,\beta_i)\vartheta^{\frac{\sigma+\tau}{\sigma}}(\bar{t} - \underline{t}), \qquad \forall\bar{t} \ge \underline{t}\end{aligned} \tag{12}$$

证明. 运用数学归纳法来证明式 (12), 设常量 ϑ 满足 $0 < \vartheta \le \vartheta_1$.

第一步.

已知 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$, $j = 2,\cdots,n$, 则对于 $t \in [\underline{t},\bar{t}]$, $x_1(t)$ 是一致连续的, $\dot{x}_1(t)$ 是有界的. 因此, 由 $t_0 = \underline{t}$ 开始, 存在时间序列 t_k, $k = 1,\cdots,N$ 使得 $\left|x_1^{\sigma/r_1}(t_k)\right| = \vartheta$,

$$\begin{aligned}& \left|u_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(x_1(\bar{t})) - u_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(x_1(\underline{t}))\right| \le \\ & \quad \sum_{k=0}^{N}\left|u_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(x_1(t_k)) - u_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(x_1(t_{k+1}))\right|\end{aligned} \tag{13}$$

$t_0 = t$, $t_{N+1} = \bar{t}$ 如果对时间区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 里的所有 t, 都有 $\left|x_1^{\sigma/r_1}(t)\right| \ge \vartheta$, 则 $x_1(t_k)$ 和 $x_1(t_{k+1})$ 有同样的符号, 即 $x_1^{\sigma/r_1}(t_k) \ge \vartheta$, $x_1^{\sigma/r_1}(t_{k+1}) \ge \vartheta$ 或者 $x_1^{\sigma/r_1}(t_k) \le -\vartheta$, $x_1^{\sigma/r_1}(t_{k+1}) \le -\vartheta$, 容易得到 $\left|u_1^{\sigma/r_2}(x_1(t_k)) - u_1^{\sigma/r_2}(x_1(t_{k+1}))\right| = 0$. 因此, 只需要考虑当 $\left|x_1^{\sigma/r_1}(t)\right| \le \vartheta$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$ 时, 时间区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 内的情况.

考虑任一个时间区间 $[\underline{t}^*, \bar{t}^*]$, 其中, $\left|x_1^{\sigma/r_1}(t)\right| < \vartheta$. 由文献 [7] 中的引理 A.1, 知:

$$\begin{aligned}& \left|u_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(x_1(\bar{t}^*)) - u_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(x_1(\underline{t}^*))\right| = \\ & \quad \beta_1^{\frac{\sigma}{r_2}}\left|x_1^{\sigma}(\bar{t}^*) - x_1^{\sigma}(\underline{t}^*)\right| \le \\ & \quad \sigma\beta_1^{\frac{\sigma}{r_2}}\left|x_1(\bar{t}^*) - x_1(\underline{t}^*)\right|\max\left\{x_1^{\sigma-1}(\bar{t}^*), x_1^{\sigma-1}(\underline{t}^*)\right\} \le \\ & \quad \sigma\beta_1^{\frac{\sigma}{r_2}}\vartheta^{(1-r_1)\sigma}\left|x_1(\bar{t}^*) - x_1(\underline{t}^*)\right|\end{aligned} \tag{14}$$

由 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$, $j = 2,\cdots,n$, 再加上引理 1, 可得:

$$\begin{aligned}& \left|x_1(\bar{t}^*) - x_1(\underline{t}^*)\right| \le \\ & \int_{\underline{t}^*}^{\bar{t}^*}\left|d_1(\boldsymbol{x})x_2^{p_1}(s) + f_{11}(x(s)) + f_{21}(x(s))\right|\mathrm{d}s \le \\ & (\bar{d}_1(1+\beta_1)^{p_1}+1)\vartheta^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}}(\bar{t}^* - \underline{t}^*)\end{aligned} \tag{15}$$

当 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$, $j = 2,\cdots,n$, 把式 (15) 代入式 (14), 有:

$$\begin{aligned}& \left|u_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(x_1(\bar{t}^*)) - u_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(x_1(\underline{t}^*))\right| \le \\ & \quad \sigma\beta_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(\bar{d}_1(1+\beta_1)^{p_1}+1)\vartheta^{\frac{\sigma+\tau}{\sigma}}(\bar{t}^* - \underline{t}^*)\end{aligned} \tag{16}$$

此处, 设 $\alpha_1(\beta_1) = \sigma\beta_1^{\sigma/r_2}(\bar{d}_1(1+\beta_1)^{p_1}+1)$. 由于 $\sum_{k=0}^{N}(t_{k+1}-t_k) = (\bar{t} - \underline{t})$, 结合式 (13) 和 (16), 则对于 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$, $j = 2,\cdots,n$, 有 $\left|u_1^{\sigma/r_2}(x_1(\bar{t})) - u_1^{\sigma/r_2}(x_1(\underline{t}))\right| \le \alpha_1(\beta_1)\vartheta^{\frac{\sigma+\tau}{\sigma}}(\bar{t} - \underline{t})$

归纳部分.

假设第 $i-1$ 步成立, 即对于 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$, $j=i,\cdots,n$, 有:

$$\left|u_{i-1}^{\frac{\sigma}{r_i}}(\boldsymbol{X}_{i-1}(\bar{t}))-u_{i-1}^{\frac{\sigma}{r_i}}(\boldsymbol{X}_{i-1}(\underline{t}))\right| \le \alpha_{i-1}(\beta_1,\cdots,\beta_{i-1})\vartheta^{\frac{\sigma+\tau}{\sigma}}(\bar{t}-\underline{t}), \qquad \forall \underline{t} \le \bar{t} \tag{17}$$

下面将证明上述关系当 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$, $j=i+1,\cdots,n$ 时, 在第 i 步也成立.

类似于第一步的证法, 对于任意的终点 $u_i^{\sigma/r_{i+1}}(\boldsymbol{X}_i(\bar{t}))$ 和起点 $u_i^{\sigma/r_{i+1}}(\boldsymbol{X}_i(\underline{t}))$, 存在时间序列 t_k, 使得 $\left|x_i^{\sigma/r_i}(t_k)-u_{i-1}^{\sigma/r_i}(\boldsymbol{X}_{i-1}(t_k))\right|=\vartheta$, 且

$$\left|u_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}(\boldsymbol{X}_i(\bar{t}))-u_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}(\boldsymbol{X}_i(\underline{t}))\right| \le \sum_{k=0}^{N}\left|u_i^{\frac{\omega}{r_{i+1}}}(\boldsymbol{X}_i(t_k))-u_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}(\boldsymbol{X}_i(t_{k+1}))\right| \tag{18}$$

其中, $t_0=\underline{t}$, $t_{N+1}=\bar{t}$. 在这种情况下, 类似于第一步的证明, 对于时间区间 $[t_k,t_{k+1}]$ 里的任意时间 t, 如果 $\left|x_i^{\sigma/r_i}(t)-u_{i-1}^{\sigma/r_i}(\boldsymbol{X}_{i-1}(t))\right| \ge \vartheta$, 则 $\left|u_i^{\sigma/r_{i+1}}(\boldsymbol{X}_i(t_k))-u_i^{\sigma/r_{i+1}}(\boldsymbol{X}_i(t_{k+1}))\right|=0$. 因此, 只需要考虑时间区间 $[t_k,t_{k+1}]$ 里, 下式成立, $\left|x_i^{\sigma/r_i}(t)-u_{i-1}^{\sigma/r_i}(\boldsymbol{X}_{i-1}(t))\right| \le \vartheta$, $\forall t \in [t_k,t_{k+1}]$. 考虑当 $\left|x_i^{\sigma/r_i}(t)-u_{i-1}^{\sigma/r_i}(\boldsymbol{X}_{i-1}(t))\right| \le \vartheta$ 时, 任意一个时间区间 $[\underline{t}^*,\bar{t}^*]$ 的情况. 类似式 (14) 的证明,

$$\begin{aligned}&\left|u_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}(\boldsymbol{X}_i(\bar{t}^*))-u_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}(\boldsymbol{X}_i(\underline{t}^*))\right| \le \\ &\beta_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}\left(\left|x_i^{\frac{\sigma}{r_i}}(\bar{t}^*)-x_i^{\frac{\sigma}{r_i}}(\underline{t}^*)\right|+\right.\\ &\left.\left|u_{i-1}^{\frac{\sigma}{r_i}}(\boldsymbol{X}_{i-1}(\bar{t}^*))-u_{i-1}^{\frac{\sigma}{r_i}}(\boldsymbol{X}_{i-1}(\underline{t}^*))\right|\right) \le \\ &\beta_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}\left(\left|u_{i-1}^{\frac{\sigma}{r_i}}(\boldsymbol{X}_{i-1}(\bar{t}^*))-u_{i-1}^{\sigma/r_i}(\boldsymbol{X}_{i-1}(\underline{t}^*))\right|+\frac{\sigma}{r_i}\times\right.\\ &|x_i(\bar{t}^*)-x_i(\underline{t}^*)|\max\left\{|x_i(\bar{t}^*)|^{\frac{\sigma}{r_i-1}},|x_i(\underline{t}^*)|^{\frac{\sigma}{r_i-1}}\right\}) \le \\ &\beta_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}(\tfrac{\sigma}{r_i}(1+\beta_{i-1})^{\frac{\sigma}{r_i}-1}\vartheta^{1-\frac{r_i}{\sigma}}|x_i(\bar{t}^*)-x_i(\underline{t}^*)|+\\ &\left.\left|u_{i-1}^{\frac{\sigma}{r_i}}(\boldsymbol{X}_{i-1}(\bar{t}^*))-u_{i-1}^{\frac{\varsigma}{r_i}}(\boldsymbol{X}_{i-1}(\underline{t}^*))\right|\right)\end{aligned} \tag{19}$$

对于 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$, $j=i+1,\cdots,n$, 由引理 1 可得:

$$\begin{aligned}&|x_i(\bar{t}^*)-x_i(\underline{t}^*)| \le \\ &\int_{\underline{t}^*}^{\bar{t}^*}\left|d_i(\boldsymbol{x})x_{i+1}^{p_i}(s)+f_{1i}(x(s))+f_{2i}(x(s))\right|\mathrm{d}s \le \\ &(\bar{d}_i(1+\beta_i)^{p_i}+1)\vartheta^{\frac{p_i r_{i+1}}{\sigma}}(\bar{t}^*-\underline{t}^*)\end{aligned} \tag{20}$$

此外, 由于 $\left|x_i^{\sigma/r_i}(t)-u_{i-1}^{\sigma/r_i}(\boldsymbol{X}_{i-1}(t))\right| \le \vartheta$, $\forall t \in [\underline{t}^*,\bar{t}^*]$, 可知:

$$|x_i(t)| \le \vartheta^{\frac{r_j}{\sigma}}(1+\beta_{i-1}^{\frac{\sigma}{r_i}})^{\frac{r_j}{\sigma}} \le \vartheta^{\frac{r_j}{\sigma}}(1+\beta_{i-1})$$

由上式和 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$ 可知, 归纳部分的假设条件是可行的. 由于 $\sum_{k=0}^{N}(t_{k+1}-t_k)=(\bar{t}-\underline{t})$, 把式 (17), (19) 和 (20) 代入式 (18), 可知, 对于任意的 $|x_j| \le \vartheta^{r_j/\sigma}(1+\beta_{j-1})$, $j=i+1,\cdots,n$, 有:

$$\begin{aligned}&\left|u_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}(\boldsymbol{X}_i(\bar{t}))-u_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}(\boldsymbol{X}_i(\underline{t}))\right| \le \\ &\left(\frac{\sigma\beta_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}}{r_i}(1+\beta_{i-1})^{\frac{\sigma}{r_i}-1}(\bar{d}_i(1+\beta_i)^{p_i}+1)+\right.\\ &\left.\beta_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}\alpha_{i-1}(\beta_1,\cdots,\beta_{i-1})\right)\vartheta^{\frac{\sigma+\tau}{\sigma}}(\bar{t}-\underline{t})\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}&\alpha_i(\beta_1,\cdots,\beta_i)=\\ &\frac{\sigma\beta_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}}{r_j}(1+\beta_{i-1})^{\frac{\sigma}{r_i}-1}(\bar{d}_i(1+\beta_i)^{p_i}+1)+\\ &\beta_i^{\frac{\sigma}{r_{i+1}}}\alpha_{i-1}(\beta_1,\cdots,\beta_{i-1})\end{aligned}$$

易知, 式 (12) 在第 i 步也是正确的. 归纳部分的证明就此完成, 因此, 引理 2 也被证明完成. □

由引理 1 和 2, 可以证明下面的主定理.

定理 2. 在假设 1 和 2 作用下, 存在一个常数 $\vartheta \in (0,\vartheta_1]$, 饱和控制器 (7) 使得非线性系统 (1) 全局渐近稳定.

证明. 分两步来证明: 首先, 证明在 β_i 满足条件 (8) 下, 控制器 (7) 使得系统 (1) 的状态收敛到一个由饱和度参数 ϑ 决定的小区域内; 其次, 证明通过调节饱和度, 系统状态将进入定理 1 里的吸引域, 下面用归纳法证明, 通过设置参数 ϑ 满足 $0<\vartheta<\vartheta_1$, 系统状态将一个个地进入一个包含原点的小区域, 并保持在该区域.

第一步. 这一步将证明存在一个时刻 t_1, 使得对所有的 $t \ge t_1$, 有: $\boldsymbol{X}_n(t) \in Q_n=\left\{\boldsymbol{X}_n:\left|x_n^{\sigma/r_n}(t)-u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t))\right|<\vartheta\right\}$.

首先, 利用反证法, 证明存在一个时刻 t_1, 使得对所有的 $t \ge t_1$ 有:

$$\left|x_n^{\frac{\sigma}{r_n}}(t_1)-u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1))\right| \le \frac{\vartheta}{2}$$

假设上式不成立, 则对任意 $t \ge 0$, 有 $\left|x_n^{\sigma/r_n}(t)-u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t))\right| > \vartheta/2$. 有两种情况需要讨论: 情况 1: $x_n^{\sigma/r_n}(t)-u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t)) > \vartheta/2$; 情况 2: $x_n^{\sigma/r_n}(t)-u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t)) < -\vartheta/2$. 首先, 考虑情况 1, 当 $t \ge 0$ 时, 有:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_n(t)=f_n(\boldsymbol{x})-\beta_n^{p_n}d_n(\boldsymbol{x})\times\\ &\delta^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}}(x_n^{\frac{\sigma}{r_n}}(t)-u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t))) \le \\ &-\beta_n^{p_n}\underline{d}_n\left(\tfrac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}}+\vartheta^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}}=-u_n\vartheta^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}}\end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}&u_n=-1+\beta_n^{p_n}\underline{d}_n(\tfrac{1}{2})^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}} \ge -1+\\ &\frac{4(1+\beta_{n-1})\alpha_{n-1}(\cdot)+1+2\bar{d}_n}{\underline{d}_n}\underline{d}_n(\tfrac{1}{2})^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}}2^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}}=\\ &4(1+\beta_{n-1})\alpha_{n-1}(\beta_1,\cdots,\beta_{n-1})+2\bar{d}_n>0\end{aligned} \tag{22}$$

当 $t \ge 0$ 时, 有 $x_n(t)<x_n(0)-u_n\vartheta^{p_n r_{n+1}/\sigma}t$, 结合式 (21) 和 $\left|u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1))\right| \le \beta_{n-1}^{\sigma/r_n}\vartheta$, 对任意的 $t \ge 0$, 有 $\vartheta/2 < x_n^{\sigma/r_n}(t)-u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t)) \le (x_n(0)-u_n\vartheta^{p_n r_{n+1}/\sigma}t)^{\sigma/r_n}+$

$\beta_{n-1}^{\sigma/r_n}\vartheta$. 当时间趋于无穷时, 上式意味着 $\vartheta/2 < -\infty$, 容易发现情况 1 是不成立的. 同理可得, 情况 2 也是不成立的. 总之, 存在一个时刻 t_1, 对任意 $t \geq t_1$, 有 $\left|x_n^{\sigma/r_n}(t_1) - u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1))\right| \leq \vartheta/2$.

下面将继续使用反证法证明下式成立, $\left|x_n^{\sigma/r_n}(t) - u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t))\right| < \vartheta$, $\forall t \geq t_1$. 假设上式不成立, 则至少有一个时刻 $t_1^* > t_1$, 使得 $\left|x_n^{\sigma/r_n}(t_1^*) - u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1^*))\right| = \vartheta$.

具体地, 存在时刻 $t_1 \leq t_1' < \infty$ 和 $t_1' < t_1^* < \infty$ 使得:

$$x_n^{\frac{\sigma}{r_n}}(t_1') - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1')) = \frac{\vartheta}{2} \tag{23}$$

$$x_n^{\frac{\sigma}{r_n}}(t_1^*) - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1^*)) = \vartheta \tag{24}$$

$$\frac{\vartheta}{2} \leq x_n^{\frac{\sigma}{r_n}}(t) - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t)) \leq \vartheta, \quad t \in [t_1', t_1^*] \tag{25}$$

或

$$x_n^{\frac{\sigma}{r_n}}(t_1') - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1')) = -\frac{\vartheta}{2} \tag{26}$$

$$x_n^{\frac{\sigma}{r_n}}(t_1^*) - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1^*)) = -\vartheta \tag{27}$$

$$-\vartheta \leq x_n^{\frac{\sigma}{r_n}}(t) - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t)) \leq -\frac{\vartheta}{2}, \quad t \in [t_1', t_1^*] \tag{28}$$

首先, 考虑式 (23) ∼ (25) 正确的情况, 并且证明其不可能. 结合式 (25) 和 $\dot{x}_n(t) = f_n(\boldsymbol{x}) - \beta_n^{p_n} d_n(\boldsymbol{x})\delta^{p_n r_{n+1}/\sigma}(x_n^{\sigma/r_n}(t) - u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t)))$, 可以得到 $\dot{x}_n(t) < -u_n\vartheta^{p_n r_{n+1}/\sigma}$, $t \in [t_1', t_1^*]$, 此处, u_n 在式 (22) 中定义. 由上式, 有:

$$u_n\vartheta^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}}(t_1^* - t_1') \leq x_n(t_1') - x_n(t_1^*) \tag{29}$$

结合式 (23) 和 $\left|u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1})\right| \leq \beta_{n-1}^{\sigma/r_n}\vartheta$, 当 $r_n/\sigma < 1$ 时, 有:

$$\begin{aligned} x_n(t_1') &\leq (\tfrac{\vartheta}{2} + \beta_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}\vartheta)^{\frac{r_n}{\sigma}} \leq \\ &(1 + \beta_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}})^{\frac{r_n}{\sigma}}\vartheta^{\frac{r_n}{\sigma}} \leq (1 + \beta_{n-1})\vartheta^{\frac{r_n}{\sigma}} \end{aligned} \tag{30}$$

类似地, 由式 (24), 有:

$$\begin{aligned} x_n(t_1^*) &\geq (\vartheta - \beta_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}\vartheta)^{\frac{r_n}{\sigma}} \geq \\ &-(1 + \beta_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}})^{\frac{r_n}{\sigma}}\vartheta^{\frac{r_n}{\sigma}} \geq -(1 + \beta_{n-1})\vartheta^{\frac{r_n}{\sigma}} \end{aligned} \tag{31}$$

把式 (31) 和 (30) 代入式 (29), 有:

$$\begin{aligned} t_1^* - t_1' &\leq \frac{x_n(t_1') - x_n(t_1^*)}{u_n\vartheta^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}}} \leq \frac{2}{u_n}(1 + \beta_{n-1})\vartheta^{\frac{r_n - p_n r_{n+1}}{\sigma}} = \\ &\frac{2}{u_n}(1 + \beta_{n-1})\vartheta^{\frac{-\tau}{\sigma}} \end{aligned} \tag{32}$$

而且, 由式 (29), 知道 $x_n(t_1^*) \leq x_n(t_1')$, 即:

$$\begin{aligned} &x_n^{\frac{\sigma}{r_n}}(t_1^*) - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1^*)) \leq \\ &\quad x_n^{\frac{\sigma}{r_n}}(t_1') - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1')) + \\ &\quad u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1')) - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1^*)) \end{aligned}$$

把式 (23) 和 (24) 代入式 (31), 有:

$$\frac{\vartheta}{2} \leq \left|u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1^*)) - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1'))\right| \tag{33}$$

结合式 (25) 和 $\left|u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1})\right| \leq \beta_{n-1}^{\sigma/r_n}\vartheta$, 有:

$$|x_n(t)| \leq (1 + \beta_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}})^{\frac{r_n}{\sigma}}\vartheta^{\frac{r_n}{\sigma}} \leq (1 + \beta_{n-1})\vartheta^{\frac{r_n}{\sigma}},$$

$$t \in [t_1', t_1^*] \tag{34}$$

结合式 (34) 和引理 2 来估计式 (33), 有:

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta}{2} &\leq \left|u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1^*)) - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_1'))\right| \leq \\ &\alpha_{n-1}(\beta_1, \cdots, \beta_{n-1})\vartheta^{\frac{\sigma+\tau}{\sigma}}(t_1^* - t_1') \end{aligned} \tag{35}$$

把式 (32) 代入式 (35), 有:

$$\frac{\vartheta}{2} \leq \frac{2}{u_n}(1 + \beta_{n-1})\alpha_{n-1}(\beta_1, \cdots, \beta_{n-1})\vartheta \tag{36}$$

另一方面, 把式 (8) 代入式 (22), 有:

$$\begin{aligned} &u_n = -1 + \underline{d}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}}\beta_n^{p_n} > -1 + \\ &\underline{d}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}} 2^{\frac{p_n r_{n+1}}{\sigma}}\frac{4(1 + \beta_{n-1})\alpha_{n-1}(\cdot) + 1 + 2\bar{d}_n}{\underline{d}_n} > \\ &4(1 + \beta_{n-1})\alpha_{n-1}(\cdot) \end{aligned} \tag{37}$$

由式 (36) 和 (37), 有: $\vartheta/2 \leq 2/u_n(1 + \beta_{n-1})\alpha_{n-1}(\beta_1, \cdots, \beta_{n-1})\vartheta < \vartheta/2$. 这将导致矛盾, 易知, 式 (23) ∼ (25) 是不正确的. 同理, 可以很容易地得出式 (26) ∼ (28) 也是不正确的. 总之, 对任意的 $t \geq t_1$, 有 $\left|x_n^{\sigma/r_n}(t) - u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t))\right| < \vartheta$, 也就是说, 对任意 $t \geq t_1$, 有: $\boldsymbol{X}_n(t) \in Q_n = \left\{\boldsymbol{X}_n : \left|x_n^{\sigma/r_n}(t) - u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t))\right| < \vartheta\right\}$.

归纳部分.

假设在第 $i-1$ 步, 存在 $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{i-1}$ 和 $t \geq t_{i-1}$ 满足:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_j(t) \in \left\{\boldsymbol{X}_j : \left|x_j^{\frac{\sigma}{r_j}}(t) - u_{j-1}^{\frac{\sigma}{r_j}}(\boldsymbol{X}_{j-1}(t))\right| < \vartheta\right\}, \\ \forall j = n-i+2, \cdots, n \end{aligned} \tag{38}$$

证明在第 i 步结论同样成立. 类似于第一步的证明, 对任意的 $t_i \geq t_{i-1}$, 证明存在时刻 t_i 满足: $\left|x_{n-i+1}^{\sigma/r_{n-i+1}}(t_i) - u_{n-i}^{\sigma/r_{n-i+1}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i))\right| \leq \vartheta/2$.

假设上式不成立, 即对任意的 $t \geq t_{i-1}$, $\left|x_{n-i+1}^{\sigma/r_{n-i+1}}(t) - u_{n-i}^{\sigma/r_{n-i+1}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t))\right| > \vartheta/2$. 同样存在两种情况, $x_{n-i+1}^{\sigma/r_{n-i+1}}(t) - u_{n-i}^{\sigma/r_{n-i+1}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t)) > \vartheta/2$ 和 $x_{n-i+1}^{\sigma/r_{n-i+1}}(t) - u_{n-i}^{\sigma/r_{n-i+1}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t)) < -\vartheta/2$, 首先考虑前面这种情况, 根据假设, 可以得到估计的控制器如下:

$$\begin{aligned} &u_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}(\boldsymbol{X}_{n-i+1}(t)) = -\beta_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}\delta^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}} \times \\ &\quad\left(x_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(t) - u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t))\right) < \\ &\quad -\beta_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}\left(\tfrac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}} \end{aligned} \tag{39}$$

结合上式, 当 $t \geq t_{i-1}$ 时, 有:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_{n-i+1}(t)=d_{n-i+1}(\boldsymbol{x})u_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}(\cdot)+f_{n-i+1}(\cdot)+\\&\quad d_{n-i+1}(\boldsymbol{x})[x_{n-i+2}^{p_{n-i+1}}(t)-u_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}(\cdot)]\leq\\&\quad -\beta_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}\underline{d}_{n-i+1}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}+f_{n-i+1}(\cdot)+\\&\quad d_{n-i+1}(\boldsymbol{x})[x_{n-i+2}^{p_{n-i+1}}(t)-u_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}(\cdot)]\end{aligned}\tag{40}$$

下面, 估计上式右边的每一项. 首先, 由式 (38), 有 $|x_j|<(1+\beta_{j-1})\vartheta^{r_j/\sigma}$, $j=n-i+2,\cdots,n$. 结合引理 1, 有:

$$|f_{n-i+1}(\boldsymbol{x})|\leq\vartheta^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}},\quad t\geq t_{i-1}\tag{41}$$

当 $0<p_{n-i+1}r_{n-i+2}/\sigma<1$ 时, 由文献 [7] 中的引理 A.1, 易得:

$$\begin{aligned}&\left|x_{n-i+2}^{p_{n-i+1}}-u_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}\right|=\\&\quad\left|[x_{n-i+2}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}]^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}-[u_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}]^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}\right|\leq\\&\quad 2^{1-\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}\left|x_{n-i+2}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}-u_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}\right|^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}\leq\\&\quad 2\vartheta^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}\end{aligned}\tag{42}$$

然而, 当 $p_{n-i+1}r_{n-i+2}/\sigma>1$ 时, 上面方法不可用. 这里, 假定 $p_{n-i+1}r_{n-i+2}/\sigma\in[\eta,\eta+1)$, $\eta\in\mathbf{Z}^+$, 运用中值定理及文献 [7] 里引理 A.1, 可以得到:

$$\begin{aligned}&\left|x_{n-i+2}^{p_{n-i+1}}-u_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}\right|=\\&\left|[x_{n-i+2}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}]^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}-[u_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}]^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}\right|\leq\\&\left|x_{n-i+2}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}-u_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}\right|\times\left|[x_{n-i+2}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}]^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}-1}-\right.\\&\left.[u_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}]^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}-1}\right|\leq\cdots\leq\left|x_{n-i+2}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}-\right.\\&\left.u_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}\right|^{\eta}\times\left|[x_{n-i+2}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}]^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}-\eta}-\right.\\&\left.[u_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}]^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}-\eta}\right|\leq\\&\left|x_{n-i+2}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}-u_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}\right|^{\eta}2^{1-\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}\times\\&\left|x_{n-i+2}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}-u_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+2}}}\right|^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}-\eta}\leq\\&2\vartheta^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}\end{aligned}\tag{43}$$

当 $t\geq t_{i-1}$ 时, 把式 (41) ~ (43) 代入式 (40), 可得:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_{n-i+1}(t)\leq-(\beta_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}\underline{d}_{n-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}-\\&\quad 1-2\bar{d}_{n-i+1})\vartheta^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}=\\&\quad -u_{n-i+1}\vartheta^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}\end{aligned}\tag{44}$$

其中, $u_{n-i+1}=\beta_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}\underline{d}_{n-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}-1-2\bar{d}_{n-i+1}$.

并且由式 (8), 得到:

$$\begin{aligned}&u_{n-i+1}\geq\frac{4(1+\beta_{n-i})\alpha_{n-i}(\beta_1,\cdots,\beta_{n-i})+1+2\bar{d}_{n-i+1}}{\underline{d}_{n-i+1}}\underline{d}_{n-i+1}-\\&\quad 1-2\bar{d}_{n-i+1}>\\&\quad 4(1+\beta_{n-i})\alpha_{n-1}(\beta_1,\cdots,\beta_{n-i})>0\end{aligned}\tag{45}$$

对式 (44) 两边在区间 $[t_{i-1},t]$ 上积分, 得: $x_{n-i+1}(t)\leq x_{n-i+1}(t_{i-1})-u_{n-i+1}\vartheta^{p_{n-i+1}r_{n-i+2}/\sigma}(t-t_{i-1})$.

结合上式和 $|u_{n-i}(\boldsymbol{X}_{n-i})|\leq\beta_{n-i}\vartheta^{r_{n-i+1}/\sigma}$, 可以得到:

$$\begin{aligned}&\frac{\vartheta}{2}<x_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(t)-u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t))\leq\\&\quad\beta_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}\vartheta+(x_{n-i+1}(t_{i-1})-\\&\quad u_{n-i+1}\vartheta^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}(t-t_{i-1}))^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}\end{aligned}$$

上式意味着当时间趋于无穷时, $\vartheta/2<-\infty$. 显而易见, 第一种情况是不可能发生的. 同理, 可以容易地得到第二种情况也是不成立的. 总之, 肯定存在一个时刻 t_i, 使得 $x_{n-i+1}^{\sigma/r_{n-i+1}}(t)-u_{n-i}^{\sigma/r_{n-i+1}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t))<-\vartheta/2$ 成立.

接下来, 运用反证法证明 $\left|x_{n-i+1}^{\sigma/r_{n-i+1}}(t)-u_{n-i}^{\sigma/r_{n-i+1}}\times(\boldsymbol{X}_{n-i}(t))\right|<\vartheta$ 成立. 假设其不成立, 即存在时刻 $t_i'<+\infty$ 和 $t_i^*<+\infty$, 下式成立.

$$x_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(t_i')-u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i'))=\frac{\vartheta}{2}\tag{46}$$

$$x_{n-i+1}^{\frac{\omega}{r_{n-i+1}}}(t_i^*)-u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i^*))=\vartheta\tag{47}$$

$$\frac{\vartheta}{2}\leq x_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(t)-u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t))\leq\vartheta,t\in[t_i',t_i^*]\tag{48}$$

或

$$x_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(t_i')-u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i'))=-\frac{\vartheta}{2}\tag{49}$$

$$x_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(t_i^*)-u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i^*))=-\vartheta\tag{50}$$

$$-\vartheta\leq x_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(t)-u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t))\leq-\frac{\vartheta}{2},\quad t\in[t_i',t_i^*]\tag{51}$$

同样, 先考虑式 (46) ~ (48) 的情况, 并且证明它们是不成立的. 当 $t\in[t_i',t_i^*]$, 结合式 (39), (41) ~ (43) 和 (46), 对式 (44) 两边积分, 得:

$$u_{n-i+1}\vartheta^{\frac{p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}(t_i^*-t_i')\leq x_{n-i+1}(t_i')-x_{n-i+1}(t_i^*)\tag{52}$$

结合式 (46) 和 $\left|u_{n-1}^{\sigma/r_n}(\boldsymbol{X}_{n-1})\right|\leq\beta_{n-1}^{\sigma/r_n}\vartheta$, 有: $x_{n-i+1}(t_i')\leq(1+\beta_{n-i})\vartheta^{r_{n-i+1}/\sigma}$. 类似地, 由式 (47), 知: $x_{n-i+1}(t_i^*)\geq-(1+\beta_{n-i})\vartheta^{r_{n-i+1}/\sigma}$. 把上式代入式 (52), 有:

$$\begin{aligned}&t_i^*-t_i'\leq\frac{2}{u_{n-i+1}}(1+\beta_{n-i})\vartheta^{\frac{r_{n-i+1}-p_{n-i+1}r_{n-i+2}}{\sigma}}=\\&\quad\frac{2}{u_{n-i+1}}(1+\beta_{n-i})\vartheta^{\frac{-\tau}{\sigma}}\end{aligned}\tag{53}$$

此外, 由式 (44), 知道 $x_{n-i+1}(t_i^*)\leq x_{n-i+1}(t_i')$, 这意味着:

$$\begin{aligned}&x_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(t_i^*)-u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i^*))\leq x_{n-i+1}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(t_i')-\\&\quad u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t_i'))+u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i'))-\\&\quad u_{n-i}^{\frac{\sigma}{r_{n-i+1}}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i^*))\end{aligned}$$

把式 (46) 和 (47) 代入式 (52), 可得:

$$\frac{\vartheta}{2} \le \left| u_{n-i}^{\overline{r_{n-i+1}}^{\sigma}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i')) - u_{n-i}^{\overline{r_{n-i+1}}^{\sigma}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i^*)) \right| \tag{54}$$

另外, 结合式 (46) 和 $\left|u_{n-i+1}^{\sigma/r_{n-i+1}}\right| \le \beta_i^{\sigma/r_{n-i+1}}\vartheta$, 当 $t \in [t_i', t_i^*]$ 时, $|x_{n-i+1}(t)| \le (1+\beta_{n-i})\vartheta^{r_{n-i+1}/\sigma}$.

上式与式 (38) 结合, 则当 $t \in [t_i', t_i^*]$ 时, 有: $|x_j(t)| \le (1+\beta_{j-1})\vartheta^{r_j/\sigma}$, $j = n-i+1, \cdots, n$.

已经假定 $0 < \vartheta < \vartheta_1 < 1$, 则由上式知, 可以用引理 2 来估计下式.

$$\begin{aligned}&\left| u_{n-i}^{\overline{r_{n-i+1}}^{\sigma}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i^*)) - u_{n-i}^{\overline{r_{n-i+1}}^{\sigma}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t_i')) \right| \le \\ &\quad \alpha_{n-i}(\beta_1, \cdots, \beta_{n-i})\vartheta^{\frac{\sigma+\tau}{\sigma}}(t_i^* - t_i')\end{aligned} \tag{55}$$

把式 (53) 和 (55) 代入式 (54), 有: $\vartheta/2 \le 2/u_{n-i+1}(1+\beta_{n-i})\alpha_{n-i}(\beta_1, \cdots, \beta_{n-i})\vartheta$.

在式 (45) 中已经证明了

$$\frac{2}{u_{n-i+1}}(1+\beta_{n-i})\alpha_{n-i}(\beta_1, \cdots, \beta_{n-i}) < \frac{1}{2}$$

由此可得下面这个不等式: $\vartheta/2 \le 2/u_{n-i+1}(1+\beta_{n-i})\alpha_{n-i}(\beta_1, \cdots, \beta_{n-i})\vartheta < \vartheta/2$. 很明显, 式 (46) ~ (48) 的情况不可能发生. 同理, 式 (49) ~ (51) 的情况也是不成立的. 总之, 当 $t \ge t_i$ 时, 有:

$$\left| x_{n-i+1}^{\overline{r_{n-i+1}}^{\sigma}}(t) - u_{n-i}^{\overline{r_{n-i+1}}^{\sigma}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t)) \right| < \vartheta$$

这意味着, 当 $t \ge t_i$ 时, $\boldsymbol{X}_{n-i+1}(t) \in Q_{n-i+1} = \left\{\boldsymbol{X}_{n-i+1} : \left| x_{n-i+1}^{\sigma/r_{n-i+1}}(t) - u_{n-i}^{\sigma/r_{n-i+1}}(\boldsymbol{X}_{n-i}(t)) \right| < \vartheta\right\}$.

上式与式 (38) 相结合, 可知当 $t \ge t_i$ 时, $\boldsymbol{X}_j(t) \in Q_j = \left\{\boldsymbol{X}_j : \left| x_j^{\sigma/r_j}(t) - u_{j-1}^{\sigma/r_j}(\boldsymbol{X}_{j-1}(t)) \right| < \vartheta\right\}$, $j = n-i+1, \cdots, n$.

这就完成了归纳部分的证明.

最后一步.

根据上面的证明, 知道存在一个时刻 t_{n-1}, 当 $t \ge t_{n-1}$ 时, 有:

$$\boldsymbol{X}_j(t) \in \left\{\boldsymbol{X}_j : \left| x_j^{\frac{\sigma}{r_j}}(t) - u_{j-1}^{\frac{\sigma}{r_j}}(\boldsymbol{X}_{j-1}(t)) \right| < \vartheta\right\}, \quad j = 2, \cdots, n \tag{56}$$

上式结合 $|u_{j-1}(\boldsymbol{X}_{j-1}(t))| \le \beta_{j-1}\vartheta^{r_j/\sigma}$, 知当 $t \ge t_{n-1}$ 时, 有: $|x_j(t)| \le (1+\beta_{j-1})\vartheta^{r_j/\sigma}$, $j = 2, \cdots, n$. 由引理 1 知, 当 $t \ge t_{n-1}$ 时, 有: $|f_1(\boldsymbol{x})| \le \vartheta^{p_1 r_2/\sigma}$.

此外, 运用文献 [7] 中引理 A.1 和式 (56), 当 $t \ge t_{n-1}$ 时, 有:

$$\begin{aligned}&|x_2^{p_1}(t) - u_1^{p_1}(x_1(t))| = \\ &\quad \left| (x_2^{\frac{\sigma}{r_2}}(t))^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}} - (u_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(x_1(t)))^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}} \right| \le \\ &\quad 2^{1-\frac{r_2 p_1}{\sigma}} \left| x_2^{\frac{\sigma}{r_2}}(t) - u_1^{\frac{\sigma}{r_2}}(x_1(t)) \right|^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}} \le \\ &\quad 2\vartheta^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}}\end{aligned}$$

根据上面的推理, 可以知道:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = d_1(\boldsymbol{x})x_2^{p_1} + f_1(\boldsymbol{x}) = \\ &\quad d_1(\boldsymbol{x})u_1^{p_1}(x_1) + f_1(\boldsymbol{x}) + d_1(\boldsymbol{x})(x_2^{p_1}(t) - u_1^{p_1}(x_1(t))) \le \\ &\quad -d_1(\boldsymbol{x})\beta_1^{p_1}\sigma^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}}(x_1^{\frac{\sigma}{r_1}}(t)) + \vartheta^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}} + 2\bar{d}_1\vartheta^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}}\end{aligned}$$

并且当 $t \ge t_{n-1}$ 时,

$$\dot{x}_1(t) < -u_1\vartheta^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}} < 0, \quad 若 \quad x_1^{\frac{\sigma}{r_1}}(t) > \frac{\vartheta}{2} \tag{57}$$

$$\dot{x}_1(t) \ge u_1\vartheta^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}} > 0, \quad 若 \quad x_1^{\frac{\sigma}{r_1}}(t) \le -\frac{\vartheta}{2} \tag{58}$$

其中, $u_1 := \underline{d}_1\beta_1^{p_1}(1/2)^{p_1 r_2/\sigma} - 1 - 2\bar{d}_1$. 由式 (30), 可知 $\beta_1 > 2^{r_2/\sigma}\left((1+2\bar{d}_1)/\underline{d}_1\right)^{1/p_1}$, 并可得:

$$\begin{aligned}&u_1 = \underline{d}_1\beta_1^{p_1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}} - 1 - 2\bar{d}_1 > \\ &\quad \underline{d}_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}} 2^{\frac{p_1 r_2}{\sigma}} \frac{1+2\bar{d}_1}{\underline{d}_1} - 1 - 2\bar{d}_1 = 0\end{aligned}$$

总之, 当 $x_1^{\sigma/r_1}(t) > \vartheta/2$ 时, 式 (57) 的右边是负常数. 当 $t \ge t_n$ 时, 存在一个时刻 t_n, 使得 $\left|x_1^{\sigma/r_1}(t)\right| < \vartheta/2 < \vartheta$, 即: $x_1(t) \in Q_1 = \left\{x_1 : \left|x_1^{\sigma/r_1}(t)\right| < \vartheta\right\}$, $t \ge t_n$.

结合式 (56), 当 $t \ge t_n$ 时, 可得如下结论, $\boldsymbol{X}_n(t)$ 会进入并保持在下面区间内.

$$\begin{aligned}&Q = \\ &\left\{\boldsymbol{X}_n : \left|x_1^{\frac{\sigma}{r_1}}(t)\right| < \vartheta, \cdots, \left|x_n^{\frac{\sigma}{r_n}}(t) - u_{n-1}^{\frac{\sigma}{r_n}}(\boldsymbol{X}_{n-1}(t))\right| < \vartheta\right\}\end{aligned}$$

因此, 当 $t \ge t_n$ 时, 在控制器 $u_i = x_{i+1}^* = -\beta_i(x_i^{\sigma/r_i} - x_{i-1}^{*\sigma/r_i})^{r_{i+1}/\sigma}$, $i = 1, \cdots, n$ 的作用下, $\boldsymbol{X}_n(t)$ 将进入并保持在区域 Ω 内, 其中, x_i^* 是在定理 2 中定义的.

当时间大于 t_n 时, 饱和控制器 (7) 将退化为控制器 (2). 通过调节参数 ϑ, 可以得到:

$$Q \subset \Omega = \{\boldsymbol{X}_n : V_n(\boldsymbol{X}_n) \le \lambda_0\}$$

其中, Ω 是在定理 2 中定义的. 运用定理 2, 知道闭环系统 (1) 和 (7) 是局部渐近稳定的. 总之, 闭环系统 (1) 和 (7) 的全局渐近稳定性被证明. □

推论 1. 在假设 1 和 2 的条件下, 如果假设 1 中的常量 τ 是负的, 则闭环系统 (1) 和 (7) 是全局有限时间镇定的.

证明. 在假设 1 和 2 的条件下, 定理 2 保证了闭环系统的状态在一个有限时间内将会进入区域 Ω, 并在其后时间保持在区域 Ω 内. 在区域 Ω 内, 运用定理 1, 可得当 $\tau < 0$ 时, 闭环系统是有限时间稳定的. 因此, 闭环系统 (1) 和 (7) 是全局有限时间镇定的. □

3 仿真

本文所做工作更偏向于理论研究. 但本文所研究的系统是有实际应用价值的, 文献 [19] 中的三阶弹簧系统就是一个比较好的高阶系统例子.

通过一个例子来说明本文的结果是文献 [17] 结果的延伸.

例 1. 考虑下面这个非线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= k_1x_1^a + x_2 + k_2x_3^b \\ \dot{x}_2 &= x_3^3 \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned} \tag{59}$$

针对系统 (59), 当 $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, 这是一个齐次系统, 当 $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, 这是一个下三角系统, 当 $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, 这是一个上三角系统, 当 $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, 这是一个全矩阵系统. 当 $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $b = 2$ 时, 系统 (59) 就和文献 [17] 中的例 5.2 等同.

由系统 (59), 易知, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$. 为了保证全局稳定性, 由假设 1 可知:

$r_1 = 1$, $r_2 = 1 + \tau$, $r_3 = \dfrac{1 + 2\tau}{3}$, $r_4 = \dfrac{1 + 5\tau}{3}$

$$\begin{aligned}q_{11} &= a = \frac{p_1r_2}{r_1} = 1 + \tau > 0 \\ q_{13} &= b > \frac{p_1r_2}{r_1} = 1 + \tau > 0\end{aligned} \tag{60}$$

易知, 对于任何 $\tau > -1$, 可以选取不同的 $a > 0$, $b > 0$ 去满足上面的条件. 因此, 当 $\tau > 0$ 时, 并且 a, b 满足式 (60), 由定理 2 可知, 系统 (59) 是全局渐近稳定的. 当 $-1 < \tau < 0$ 时, 且 a, b 满足式 (60), 由引理 2 可知, 系统 (59) 是全局有限时间镇定的.

选取适当的参数 $\beta_{1,2,3}$ 和 ε, 可以设计如下的控制器:

$$u = -\beta_3 \left(\sigma^{a_4} \left(x_3^{a_3} + \beta_2^{a_3}\sigma \left(x_2^{a_2} + \beta_1^{a_2}\sigma \left(x_1^{a_1}\right)\right)\right)\right)$$

此处, $a_1 = \sigma/r_1$, $a_2 = \sigma/r_2$, $a_3 = \sigma/r_3$, $a_4 = r_4/\sigma$, $\sigma \geq \max_{1\leq i\leq 4}\{r_i\}$.

例如, 当 $\tau = -2/15$ 时, 选取 $\sigma = 1$, 则 $a_1 = 1$, $a_2 = 15/13$, $a_3 = 45/11$, $a_4 = 1/9$. 当 $\tau = 1$ 时, 选取 $\sigma = 3$, 则 $a_1 = 3$, $a_2 = 3/2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2/3$, 这就包含了文献 [17] 的例 5.2.

由例 1 知, a 和 b 的约束依赖于参数 τ. 因此, 可以通过选取恰当的参数 τ 来设计合适的控制器. 而且在本文中, 幂次 p_i 不再限制为奇数, 实际上, 在本文中, p_i 只要求是两个奇数的比值.

例 2. 为了与文献 [17] 进行对比, 选取如下连续非线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= k_1x_1^a + \left(1 + \sin^2(x_1)\right) x_2^{\frac{3}{5}} + k_2x_2^b \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned} \tag{61}$$

这里, 选取 $p_1 = 0.6 < 1$, 可以运用本文的方法设计控制器使得系统 (61) 全局稳定. 同样, 选取 $\tau = -0.4$, 则 $p_1 = 0.6$, $p_2 = 1$, $a = 0.6$, $b > 0.6$ (此处选 $b = 1$). 由假设 1, 可知: $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0.6$, and $\sigma \geq \max_{1\leq i\leq 3}\{r_i\}$, 选取 $\sigma = 1$, 则 $a_1 = \sigma/r_1 = 1$, $a_2 = \sigma/r_2 = 1$, $a_3 = r_3/\sigma = 0.6$, 根据推论 1, 选取适当的参数 β_1, β_2 和 ε, 系统 (61) 在下面控制器作用下是有限时间镇定的.

$$\begin{aligned}u = -\beta_2\sigma^{a_3} \left(x_2^{a_2} + \beta_1^{a_2}\sigma \left(x_1^{a_1}\right)\right) = \\ -\beta_2\sigma^{0.6} \left(x_2 + \beta_1\sigma \left(x_1\right)\right)\end{aligned}$$

选取增益 $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 25$ 及 $\varepsilon = 0.3$. 图 1 显示了非线性系统的全局有限时间镇定情况, 图 2 显示了控制输入的变化情况

4　结论

本文通过结合扩展的加密积分方法[7] 和嵌套饱和技术[10], 研究了一类非线性系统的全局稳定性. 本文的优点集中在以下三个方面: 1) 考虑的是全矩阵形式的非线性系统, 而不是下三角形式或者上三角形式的系统; 2) 降低了对非线性系统的限制条件; 3) 通过调节控制器里的一些参数, 可以得到非线性系统的全局有限时间镇定设计方法.

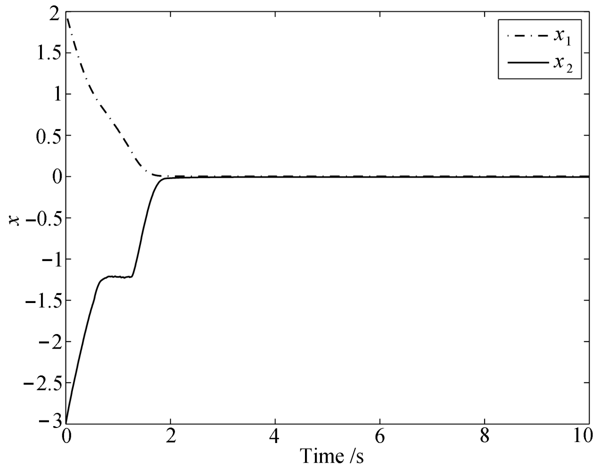

图 1　状态轨迹

Fig. 1　State trajectory

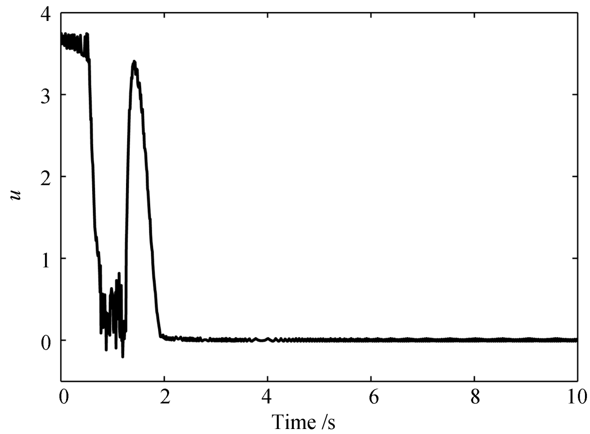

图 2　控制输入

Fig. 2　Control input

References

1 Isidori A. *Nonlinear Control Systems II*. Berlin: Springer, 1995

2 Kokotovic P V, Freeman R A. *Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques*. Berlin: Springer, 1996

3 Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: Wiley-Interscience, 1995

4 Lin W, Qian C J. Adding one power integrator: a tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems. *Systems & Control Letters*, 2000, **39**(5): 339−351

5 Qian C J, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(7): 1061−1079

6 Polendo J, Qian C J. A universal method for robust stabilization of nonlinear systems: unification and extension

of smooth and non-smooth approaches. In: Proceedings of the 2006 American Control Conference. Minneapolis, MN: IEEE, 2006. 4285−4290

7 Polendo J, Qian C J. An expanded method to robustly stabilize uncertain nonlinear systems. *Communications in Information and Systems*, 2008, **8**(1): 55−70

8 Mazenc F, Praly L. Adding integrations, saturated controls, and stabilization for feedforward systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(11): 1559−1578

9 Sepulchre R, Jankovic M, Kokotovic P V. Integrator forwarding: a new recursive nonlinear robust design. *Automatica*, 1997, **33**(5): 979−984

10 Teel A R. A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(9): 1256−1270

11 Teel A R. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems and Control Letters*, 1992, **18**(3): 165−171

12 Lin W, Li X J. Synthesis of upper-triangular non-linear systems with marginally unstable free dynamics using state-dependent saturation. *International Journal of Control*, 1999, **72**(12): 1078−1086

13 Isidori A. *Nonlinear Control Systems, vol. II: Communications and Control Engineering Series*. Springer: London, 1999

14 Ye X D. Universal stabilization of feedforward nonlinear systems. *Automatica*, 2003, **39**(1): 141−147

15 Chen T S, Huang J. Disturbance attenuation of feedforward systems with dynamic uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(7): 1711−1717

16 Qian C J, Lin W. Using small feedback to stabilize a wider class of feedforward systems. In: Proceedings of the 14th IFAC World Congress. Beijing, China, 1999. 309−314

17 Ding S H, Qian C J, Li S H. Global stabilization of a class of upper-triangular systems with unbounded or uncontrollable linearizations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, **21**(3): 271−294

18 Qian C J, Li J. Global output feedback stabilization of upper-triangular nonlinear systems using a homogeneous domination approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, **16**(9): 441−463

19 Rui C L, Reyhanoglu M, Kolmanovsky I, Cho S, McClamroch N H. Nonsmooth stabilization of an underactuated unstable two degrees of freedom mechanical system. In: Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control. San Diego, California, USA: IEEE, 1997. 3998−4003

周映江 东南大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为非线性自适应控制, 高超声速飞行器控制. E-mail: zhou_4714@163.com
(**ZHOU Ying-Jiang** Ph. D. candidate at the School of Automation, Southeast University. His research interest covers nonlinear adaptive control and hypersonic vehicle control.)

王 莉 东南大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为高超声速飞行器控制, 自适应控制. E-mail: wanglshenhl@126.com
(**WANG Li** Ph. D. candidate at the School of Automation, Southeast University. Her research interest covers hypersonic vehicle control and adaptive control.)

孙长银 东南大学自动化学院教授. 主要研究方向为智能控制理论及其应用, 非线性系统分析与优化, 模式识别. 本文通信作者.
E-mail: cysun@seu.edu.cn
(**SUN Chang-Yin** Professor at the School of Automation, Southeast University. His research interest covers intelligent control theory and its application, nonlinear system analysis and optimization, and pattern recognition. Corresponding author of this paper.)