

# Non-Markovian 开放量子系统的特性分析与状态转移

丛爽<sup>1</sup> 胡龙珍<sup>1</sup> 杨霏<sup>1</sup> 刘建秀<sup>1</sup>

**摘要** 针对时间无卷积的二能级 Non-Markovian 开放量子系统, 分别研究了环境截断频率、耦合系数和系统振荡频率对系统衰减系数、相干性和纯度的影响, 并根据不同数值对系统性能影响的分析结果来确定合适的系统仿真实验的参数; 基于李雅普诺夫稳定性定理设计了用于系统状态转移的控制场; 在 Matlab 环境下进行了系统数值仿真实验, 研究了 Non-Markovian 系统自由演化轨迹的特性, 以及在所设计的控制器作用下纯态到纯态的状态转移, 并通过性能对比实验, 验证了所提出的量子李雅普诺夫控制方法应用于 Non-Markovian 系统状态转移的有效性, 同时分析了控制参数、截断频率参数对控制系统性能的影响。

**关键词** Non-Markovian 开放量子系统, 系统特性分析, 量子李雅普诺夫控制, 状态转移

**引用格式** 丛爽, 胡龙珍, 杨霏, 刘建秀. Non-Markovian 开放量子系统的特性分析与状态转移. 自动化学报, 2013, 39(4): 360–370

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.00360

## Characteristics Analysis and State Transfer for Non-Markovian Open Quantum Systems

CONG Shuang<sup>1</sup> HU Long-Zhen<sup>1</sup> YANG Fei<sup>1</sup> LIU Jian-Xiu<sup>1</sup>

**Abstract** The weak-coupled two-level open quantum system described by non-Markovian time-convolution-less master equation is investigated in this paper. The system characteristics with respect to the decay rate  $\beta(t)$ , coherence factor  $Coh$  and purity  $p$  in terms of the cut-off frequency  $\omega_c$ , coupling constant  $\alpha$  and transition frequency  $\omega_0$  are investigated, respectively. The appropriate parameters used in system simulation experiments are determined by analyzing results of different values of parameters for the effects of system performance. The control laws used to transfer the system states are designed on the basis of the Lyapunov stability theorem. Numerical simulation experiments are implemented under the Matlab environment. The features of the free evolution trajectory of the non-Markovian systems and the state transfer from a pure state to a desired pure state under the action of the proposed control laws are studied, respectively. By comparing the experimental results, the effectiveness of the proposed quantum Lyapunov control method applied to the state transfer in non-Markovian open quantum systems is verified. Meanwhile, the influences of different control parameters and cut-off frequencies on the system performance are analyzed.

**Key words** Non-Markovian open quantum systems, characteristics analysis, quantum Lyapunov control, state transfer

**Citation** Shuang Cong, Long-Zhen Hu, Fei Yang, Jian-Xiu Liu. Characteristics analysis and state transfer for non-Markovian open quantum systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(4): 360–370

量子系统根据是否与外界环境有相互作用, 可以分为封闭量子系统和开放量子系统. 封闭量子系统是处于绝对零度条件或不与外界环境发生相互作用, 其系统状态演化是么正的量子系统. 而在实际的量子信息处理和量子计算中, 系统往往难以达

到封闭量子系统的理想条件, 会与外界环境进行相互作用而成为开放量子系统<sup>[1–3]</sup>. 对于忽略环境记忆效应的开放量子系统, 可以通过 Born 近似或 Markovian 逼近得到 Lindblad 型的 Markovian 主方程<sup>[4–5]</sup>, 这种模型广泛应用于量子光学的很多领域<sup>[6]</sup>. 但在另一些情况下, 比如初态的相关与纠缠、量子系统与一个具有纳米结构环境的相互作用等都会导致较长的环境记忆效应, 此时的 Markovian 近似失效, 系统会呈现出 Non-Markovian 特性, 这种特性广泛存在于自旋回波<sup>[7]</sup>、量子点<sup>[8]</sup>、荧光系统<sup>[9]</sup>中. 由于具有记忆效应的 Non-Markovian 量子系统呈现出较复杂的系统特性, 对其状态的操纵和控制也更困难. 近年来, 人们关注的重点主要集中在有关 Non-Markovian 系统物理特性和系统模型的研究上, 例如, Non-Markovian 系统的动力学特性<sup>[10–12]</sup>,

收稿日期 2013-01-25 录用日期 2013-03-27  
Manuscript received January 25, 2013; accepted March 27, 2013  
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2011CBA00200), 国家自然科学基金 (61074050) 资助  
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2011CBA00200) and National Natural Science Foundation of China (61074050)  
本文责任编辑 刘德荣  
Recommended by Associate Editor LIU De-Rong  
1. 中国科学技术大学自动化系 合肥 230027  
1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027  
该文的英文版同时发表在 *Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 4, pp. 360–370, 2013.

Non-Markovian 环境下量子信道中的纠缠动力学特性<sup>[13-15]</sup> 以及 Non-Markovian 开放量子系统动力学模型<sup>[16]</sup> 等. 随着量子控制理论与量子信息技术的发展, 有关 Non-Markovian 开放量子系统控制问题也开始展开. 如采用最优控制<sup>[17]</sup>、最优反馈控制<sup>[18]</sup>、相干反馈控制<sup>[19]</sup> 等系统控制方法以及通过量子广义测量<sup>[20]</sup> 来抑制消相干; 基于 GRAPE 算法<sup>[21]</sup>、基于 Krotov 方法<sup>[22]</sup> 等搜索算法的最优控制用来寻找制备单量子门的最优控制脉冲. 不过人们对 Non-Markovian 开放量子系统状态转移的控制研究比较少, 主要有: 基于微扰理论的最优控制的状态转移<sup>[23]</sup> 和基于啁啾快速绝热过程 (Stark-chirped rapid adiabatic passages, SCRAP) 技术的布居数转移<sup>[24]</sup>. 对于实际中普遍存在的开放量子系统, 如何操控系统的状态, 使之能在环境的影响下, 依然能够演化到人们期望的状态是一项更加具有实际应用价值和挑战性的研究. 从控制方法上来看, 基于李雅普诺夫稳定性定理设计控制律的过程相对简单, 所设计出来的控制律具有解析形式, 从而能够避免迭代计算, 并且可以保证系统在李雅普诺夫控制下至少是稳定的. 量子李雅普诺夫控制方法已经广泛应用于封闭量子系统的状态制备与操控, 例如, 叠加态的制备<sup>[25]</sup>、状态轨迹跟踪<sup>[26-27]</sup>、状态转移<sup>[28-30]</sup> 和系统平衡态的布居控制<sup>[31]</sup> 以及不同李雅普诺夫函数下系统收敛性<sup>[32-33]</sup> 问题研究等. 此外, 还有一些学者研究了量子李雅普诺夫控制在 Markovian 系统的应用<sup>[34-35]</sup>. 然而, 就目前所知, 没有发现有关量子李雅普诺夫控制应用于 Non-Markovian 系统状态转移方面的研究.

本文期望采用基于李雅普诺夫稳定性定理设计控制律, 来操控 Non-Markovian 系统纯态到纯态的状态转移. 研究对象是与高温环境弱耦合的 Non-Markovian 开放二能级量子系统. 采用时间无卷积 (Time-convolution-less, TCL) 形式的动力学主方程, 在假设相互作用哈密顿量为双线性的前提下给出控制系统模型. 在固定其他参数下, 分别研究了环境截断频率、耦合系数和系统振荡频率对系统衰减系数、相干性和纯度的影响, 以便能够为系统仿真实验提供具有 Non-Markovian 特性的参数; 设计了一组基于李雅普诺夫稳定性定理的控制场, 通过调整相应的控制参数来有效地使系统状态向期望的状态演化, 在给定的转移误差允许范围内, 实现了 Non-Markovian 系统从一个给定的初态转移到期望目标态的控制任务; 最后, 在 Matlab 环境下进行了两组数值仿真实验: Non-Markovian 系统状态自由演化和李雅普诺夫控制下的状态转移, 研究了系统自由演化轨迹的特性, 并通过分析实验结果, 验证了所提出的量子李雅普诺夫控制方法应用于 Non-Markovian 系统状态转移的有效性, 并且分析了控

制参数、截断频率参数对控制系统性能的影响.

本文结构安排如下: 第 1 节采用 TCL 形式的主方程给出高温环境下系统的控制模型; 第 2 节分别分析环境截断频率、耦合系数和系统振荡频率对系统特性的影响; 第 3 节进行控制器设计; 第 4 节在 Matlab 环境下进行了系统仿真实验, 分析实验结果以及控制参数、截断频率参数对控制性能的影响; 第 5 节对全文进行总结.

## 1 系统模型的描述

考虑二能级开放量子系统, 假设系统与环境为弱耦合, 且相互作用哈密顿量是双线性的, 采用的 Non-Markovian 动力学主方程是 TCL 形式的主方程<sup>[5]</sup>, 系统的模型可以写为<sup>[17]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_s &= -\frac{i}{\hbar}[H, \rho_s] + L_t(\rho_s) \quad (1) \\ L_t(\rho_s) &= \frac{\Delta(t) + \gamma(t)}{2} \times \\ &\quad ([\sigma_- \rho_s, \sigma_-^\dagger] + [\sigma_-, \rho_s \sigma_-^\dagger]) + \\ &\quad \frac{\Delta(t) - \gamma(t)}{2} ([\sigma_+ \rho_s, \sigma_+^\dagger] + [\sigma_+, \rho_s \sigma_+^\dagger]) \quad (2) \end{aligned}$$

其中,  $\rho_s$  是系统状态密度矩阵;  $H = H_0 + \sum_{m=1}^2 f_m(t)H_m$  为系统总哈密顿量;  $H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z$  是系统自由哈密顿量,  $\omega_0$  为系统的振荡频率;  $H_m$  为控制哈密顿量;  $f_m(t)$  是随时间变化的外部控制场;  $H_1 = \sigma_x, H_2 = \sigma_y$ ;  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  是 Pauli 矩阵  $\sigma$ ;  $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$  是产生和湮没算符. 为了简单起见, 我们取普朗克常数  $\hbar = 1$ .  $L_t(\rho_s)$  描述了系统与环境的相互作用.

在欧姆环境<sup>[17]</sup> 下,  $L_t(\rho_s)$  中的耗散系数  $\gamma(t)$  和扩散系数  $\Delta(t)$  的解析表达式<sup>[36]</sup> 可以表示为

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \frac{\alpha^2\omega_0 r^2}{1+r^2} \{1 - e^{-r\omega_0 t} \times \\ &\quad [\cos(\omega_0 t) + r \sin(\omega_0 t)]\} \quad (3) \\ \Delta(t) &= \frac{\alpha^2\omega_0 r^2}{1+r^2} \{ \coth(\pi r_0) - \cot(\pi r_c) e^{-\omega_c t} \times \\ &\quad [r \cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)] + \frac{\cos(\omega_0 t)}{\pi r_0} \times \\ &\quad [\bar{F}(-r_c, t) + \bar{F}(r_c, t) - \bar{F}(ir_0, t) - \\ &\quad \bar{F}(-ir_0, t)] - \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi} \times \\ &\quad [\frac{e^{-v_1 t}}{2r_0(1+r_0^2)} [(r_0 - i)\bar{G}(-r_0, t) + \\ &\quad (r_0 + i)\bar{G}(r_0, t)] + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2r_c}[\bar{F}(-r_c, t) - \bar{F}(r_c, t)] \quad (4)$$

其中, 常数  $\alpha$  为耦合强度,  $r_0 = \omega_0/2\pi kT$ ,  $r_c = \omega_c/2\pi kT$ ,  $r = \omega_c/\omega_0$ ,  $kT$  是环境温度,  $\omega_c$  是高频截断频率;  $\bar{F}(x, t) \equiv {}_2F_1(x, 1, 1+x, e^{-v_1 t})$ ,  $\bar{G}(x, t) \equiv {}_2F_1(2, 1+x, 2+x, e^{-v_1 t})$ ,  ${}_2F_1(a, b, c, z)$  是 Hypergeometric 函数<sup>[37]</sup>.

在高温近似下, 扩散系数的表达式  $\Delta(t)$  可以写成如下形式<sup>[36]</sup>:

$$\Delta(t)^{HT} = \frac{2\alpha^2 kT r^2}{1+r^2} \times \left\{ 1 - e^{-r\omega_0 t} \left[ \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{r} \sin(\omega_0 t) \right] \right\} \quad (5)$$

通过分析式 (3) 和式 (5) 可以得出: 在高温环境下耗散系数  $\gamma(t) \approx 0$ , 并且  $|\Delta(t)| \gg \gamma(t)$ . 这说明扩散系数  $\Delta(t)$  在高温情况下对系统动力学特性的影响占据着主导性作用. Markovian 和 Non-Markovian 系统的本质区别在于是否存在环境的记忆效应. 定义衰减系数  $\beta_{1,2}(t) = (\Delta(t) \pm \gamma(t))/2$ , 则二者的区别就表现在  $\beta_i(t)$  的符号上: 当  $\beta_i(t) \geq 0$  时, 系统主要呈现 Markovian 特性; 当  $\beta_i(t) < 0$  时, 系统呈现出 Non-Markovian 特性<sup>[38]</sup>. 由分析可知: 在高温环境下, 由于有  $\gamma(t) \approx 0$ , 所以有  $\beta_1(t) \approx \beta_2(t) = \Delta(t)/2 = \beta(t)$ . 值得注意的是: 当系统处于中温或者低温环境时, 高温近似条件及其结果式 (5) 将不再适用, 此时  $\Delta(t)$  的解析表达式需要重新推导,  $\gamma(t)$  将不能再忽略不计,  $\beta_i(t)$  与  $\Delta(t)$ ,  $\gamma(t)$  都相关.

## 2 参数对系统特性的影响

在高温环境下, 通过分析控制系统 (1), 可以发现环境截断频率  $\omega_c$ 、耦合系数  $\alpha$  和系统振荡频率  $\omega_0$  是影响系统性能的重要参数. 本节将研究各参数对系统相干性和纯度性能的影响.

二能级量子系统的状态密度矩阵  $\rho$  与 Bloch 矢量  $\mathbf{r}$  的关系为:  $\rho = (I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma})/2$ , 其中  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  =  $(\text{tr}(\rho\sigma_x), \text{tr}(\rho\sigma_y), \text{tr}(\rho\sigma_z))$ , 且满足  $\|\mathbf{r}\| \leq 1$ , 此时  $\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{bmatrix}$ . 定义相干性为:  $Coh = \|x-iy\| = \|x+iy\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; 定义纯度为:  $p = \text{tr}(\rho_s^2)$ , 那么, 纯度的变化率  $\frac{\partial p}{\partial t}$  为

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= 2\text{tr}(\rho_s \dot{\rho}_s) = \\ &2\text{tr}(\rho_s(-i[H, \rho_s] + L_t(\rho_s))) = \\ &2\text{tr}(\rho_s L_t(\rho_s)) \end{aligned} \quad (6)$$

将式 (2) 代入式 (6), 则有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= 2\text{tr}(\rho_s L_t(\rho_s)) \approx \\ &-4\beta(t)\text{tr}(XX^\dagger - XY - YX + YY^\dagger) = \\ &-4\beta(t)\|X - Y^\dagger\|^2 = -4K\beta(t) \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $X = \rho_s \sigma_-$ ,  $Y = \rho_s \sigma_+$ ,  $K = \|X - Y^\dagger\|^2 \geq 0$ .

由式 (7) 可以看出, Non-Markovian 系统中状态纯度的变化  $\frac{\partial p}{\partial t}$  与  $\beta(t)$  相关, 并且  $\beta(t)$  可正可负, 即纯度的变化是非单调的; 而封闭量子系统中的  $\beta(t)$  为零, 纯度是保持不变的; Markovian 系统中的  $\beta(t)$  是一个正值, 纯度的变化是单调的. 所以纯度的变化体现出了 Non-Markovian 系统与封闭系统、Markovian 系统特性的差异.

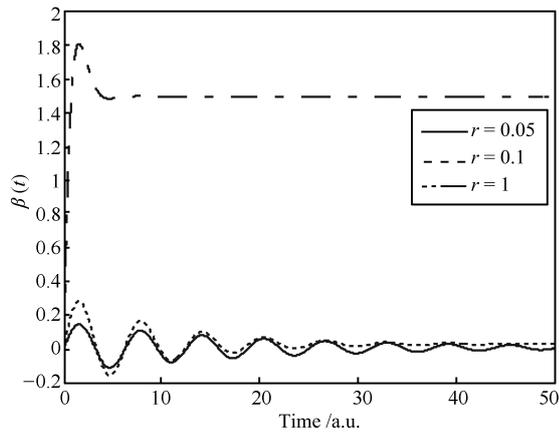
### 2.1 截断频率 $\omega_c$ 对衰减系数 $\beta(t)$ 特性的影响

在保持温度  $kT$ 、系统振荡频率  $\omega_0$  不变的情况下, 截断频率  $\omega_c$  对系统动力学特性的影响体现在参数  $r = \omega_c/\omega_0$  上, 并且高温环境下有:  $\beta_1(t) \approx \beta_2(t) = \Delta(t)/2 = \beta(t)$ , 对式 (5) 进行整理, 可得衰减系数  $\beta(t)$  为

$$\beta(t) = \frac{\alpha^2 kT r^2}{1+r^2} + \frac{\alpha^2 kT r}{\sqrt{1+r^2}} e^{-r\omega_0 t} \sin(\omega_0 t - \arctan r) \quad (8)$$

由式 (8) 可以发现:  $\beta(t)$  是一个随时间振荡衰减的曲线, 且随时间  $t$  的增加,  $\beta(t)$  逐渐衰减, 并最终稳定在一个正值  $\beta_M = \beta(t \rightarrow \infty) = \frac{\alpha^2 kT r^2}{1+r^2}$  上;  $r$  值决定了该曲线的包络线  $\Gamma(t) = \frac{\alpha^2 kT r^2}{1+r^2} + \frac{\alpha^2 kT r}{\sqrt{1+r^2}} e^{-r\omega_0 t}$  的幅值、衰减速度以及这个正值  $\beta_M$  的大小. 当设置参数为:  $\omega_0 = 1$ ,  $kT = 300\omega_0$ ,  $\alpha = 0.1$  时, 对  $r$  分别取 0.05、0.1 和 1 时,  $\beta(t)$  在 50 a.u. 时间内的变化曲线如图 1 所示. 从图 1 可以发现:  $r = 0.05$  时,  $\beta(t)$  以较小的幅值在正负值之间随时间缓慢衰减, 需要较长时间 ( $t \approx 125$  a.u.) 才能到达稳定值  $\beta_M$ ;  $r = 1$  时,  $\beta(t)$  恒为正值并在较短的时间 ( $t \approx 9.80$  a.u.) 内很快衰减到稳定常值  $\beta_M$ . 此外, 高温情况下, 当  $r \approx 0.274$  时,  $\beta(t) \geq 0$  恒成立, 此时系统 (1) 退化为一个 Markovian 系统.

由第 1 节的分析和图 1 可知,  $r$  取值不同, 系统呈现出的特性有明显的差异: 当  $r < 0.274$  时, Non-Markovian 特性和 Markovian 特性交替出现, 但 Non-Markovian 特性会随着时间演化逐渐消失, 系统退化为 Markovian 系统, 并且 Non-Markovian 特性存在时间的长短取决于  $r$  值的大小; 当  $r > 0.274$  时,  $\beta(t)$  会很快到达稳定值, 系统主要呈现 Markovian 特性.

图1 不同  $r$  值下  $\beta(t)$  的变化曲线Fig. 1 Plots of  $\beta(t)$  with different  $r$  values

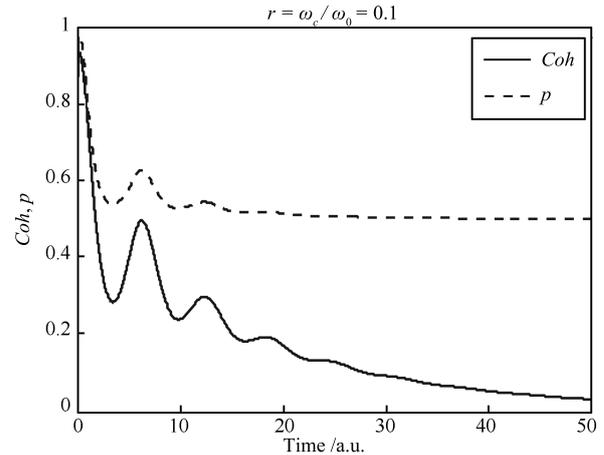
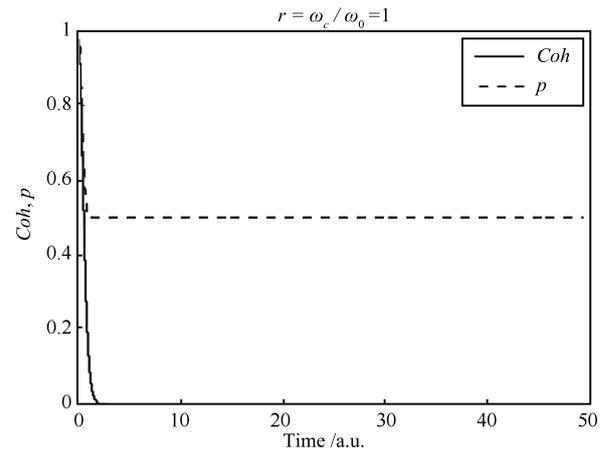
## 2.2 截断频率 $\omega_c$ 对系统相干性和纯度的影响

由第 2.1 节的分析可知,  $r$  值直接决定了  $\beta(t)$  的变化趋势, 本节将进一步研究  $r$  值, 也就是截断频率  $\omega_c$  的值对状态相干性和纯度的影响. 选用系统初态为叠加态  $\rho_0 = [1/3 \ \sqrt{2}/3; \sqrt{2}/3 \ 2/3]$ , 其他参数设置与第 2.1 节中相同, 参数  $r = \omega_c/\omega_0$  分别取值为 0.1 和 1 时, 系统相干性  $Coh$  和纯度  $p$  随时间的变化曲线如图 2 所示, 其中实线表示相干性变化曲线, 虚线表示纯度变化曲线.

从图 2 中可以看出: 不同  $r$  值下系统相干性有明显区别. 当  $r = 0.1$  时, 系统相干性随时间振荡缓慢衰减; 当  $r = 1$  时, 系统相干性很快消失衰减为零, 系统状态演化到平衡态, 此时系统主要呈现 Markovian 特性. 图 2 中系统状态纯度  $p$  的变化可以结合图 1 来解释: 当  $\beta(t) > 0$  时, 导致纯度  $p$  单调递减, 当  $\beta(t) < 0$  时, 纯度  $p$  单调增加, 系统状态的纯度演化遵循式 (7), 对于 Non-Markovian 系统, 纯度  $p$  的大小是在上下波动, 这种上下波动的变化在演化过程中会逐渐消失, 此时  $\beta(t) > 0$  恒成立, 系统的 Non-Markovian 特性消失, 系统退化为 Markovian 开放量子系统, 这就会使纯度  $p$  不断衰减, 状态向着平衡态演化. 为了能够对 Non-Markovian 量子系统进行状态转移控制, 本文系统仿真实验中的系统参数值取为  $r = 0.05$ .

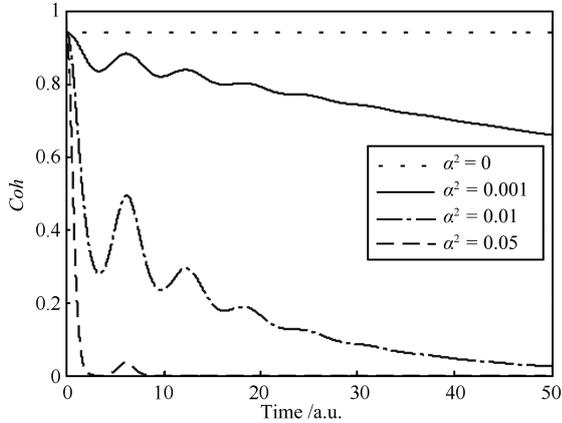
## 2.3 耦合系数 $\alpha$ 对系统相干性和纯度的影响

本文所研究的 Non-Markovian 系统 (1) 是通过对耦合项进行二阶微扰展开的方式获得的, 其限制条件是环境与系统为弱耦合, 本节我们将研究耦合系数  $\alpha^2$  对系统性能的影响. 设置系统初态同第 2.2 节为  $\rho_0 = [1/3 \ \sqrt{2}/3; \sqrt{2}/3 \ 2/3]$ , 参数为:  $\omega_0 = 1$ ,  $kT = 300\omega_0$ ,  $r = 0.1$ , 耦合系数  $\alpha^2$  取不同数值下系统状态相干性及纯度的变化情况如图 3 所示, 其中点线、直线、点划线和虚线分别对应的是  $\alpha^2$  取值

(a)  $r = 0.1$  时  $Coh$  和  $p$  的曲线(a) Plots of  $Coh$  and  $p$  with  $r = 0.1$ (b)  $r = 1$  时  $Coh$  和  $p$  的曲线(b) Plots of  $Coh$  and  $p$  with  $r = 1$ 图 2 不同  $r$  值下系统相干性  $Coh$  和纯度  $p$  随时间的变化曲线Fig. 2 Plots of the coherence factor  $Coh$  and the purity  $p$  with different  $r$  values

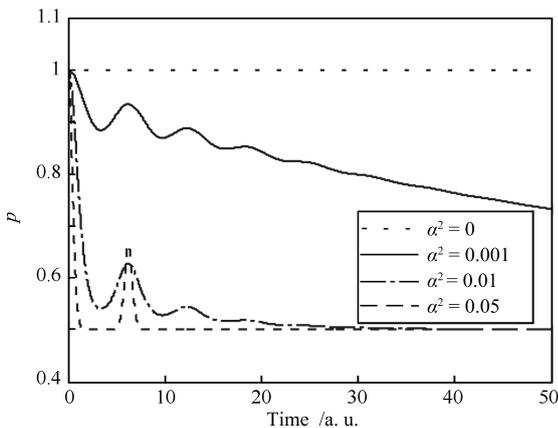
为 0, 0.001, 0.01, 以及 0.05. 从图 3(a) 中可以看出:  $\alpha^2 = 0$  时, 为系统与环境的无耦合作用情况, 此时为一个封闭系统, 系统状态的相干性始终保持一个常值不变, 在图 3(a) 中为一条水平点线. 由式 (3) 和式 (5) 可知, 不管是对于  $\gamma(t)$  还是  $\Delta(t)$ , 耦合系数  $\alpha^2$  与两者都成正比例关系, 耦合系数增大, 则衰减强度以同等幅值增大. 因此状态的退相干特性表现为同频率, 但不同幅值的特性. 从图 3(b) 中可以看出:  $\alpha^2 = 0$  时, 系统状态的纯度不变, 在图 3(b) 中表示为一条幅值为 1 的水平点线, 所以此时系统是以幺正形式演化; 随着耦合强度  $\alpha^2$  的增加, 系统状态趋于稳态的速度越快, 但在趋于稳态的过程中, 其纯度值也是在上下波动的过程中逐渐减小, 而不是单调地减小, 这表明: Non-Markovian 系统

的记忆特性能够使系统失去的信息(纯度减小)部分地又被补偿回来(纯度增大),并且耦合强度越大, Non-Markovian 特性越明显,信息的补偿能力越大. 需要特别指出的是: 实验表明, 当耦合强度  $\alpha^2$  不断增大, 如  $\alpha^2 = 0.1$ , 系统将出现非物理行为, 其表现为状态正定性不再保持, 二阶系统的数值实验表现出状态跑出 Bloch 球外, 这表明耦合系数不再满足系统 (1) 的限制条件. 基于以上分析结果, 在本文的系统仿真研究中, 参数  $\alpha$  值取为  $\alpha = 0.1$ .



(a) 耦合系数对相干性  $Coh$  的影响

(a) Curves of the coherence factor  $Coh$



(b) 耦合系数对纯度  $p$  的影响

(b) Curves of the purity  $p$

图 3 不同耦合系数对系统相干性  $Coh$  和纯度  $p$  的影响

Fig. 3 Curves of the coherence factor  $Coh$  and the purity  $p$  with different  $\alpha^2$  values

#### 2.4 振荡频率 $\omega_0$ 对衰减系数 $\beta(t)$ 特性的影响

通过前面对同一个系统不同环境参数对其特性影响的分析可知: 高频截断频率  $\omega_c$  决定了系统衰减幅值的大小, 但不改变衰减频率. 从式 (5) 中亦可得: 决定衰减频率的是系统振荡频率  $\omega_0$ . 本节我们将通过考察不同的振荡频率对系统衰减系数  $\beta(t)$  的

影响来观察系统性能. 参数分别选为:  $\alpha = 0.1$ ,  $r = 0.1$ , 振荡频率  $\omega_0$  为 1、5 和 10 时, 衰减系数  $\beta(t)$  的变化曲线如图 4 所示. 从图 4 中可以看出: 改变系统振荡频率  $\omega_0$ , 只能改变  $\beta(t)$  的振荡频率, 而不会改变其幅值, 并且  $\omega_0$  越大,  $\beta(t)$  的衰减振荡频率越大. 当  $\omega_0 = 1$  时, 在系统仿真实验中会发现在基于李雅普诺夫方法设计出来的控制律的作用下, 可能未等系统出现 Non-Markovian 性质, 就已经完成了状态转移的过程. 为了研究 Non-Markovian 性质对状态转移的影响, 在本文的系统仿真研究中, 振荡频率  $\omega_0$  的值选为  $\omega_0 = 10$ .

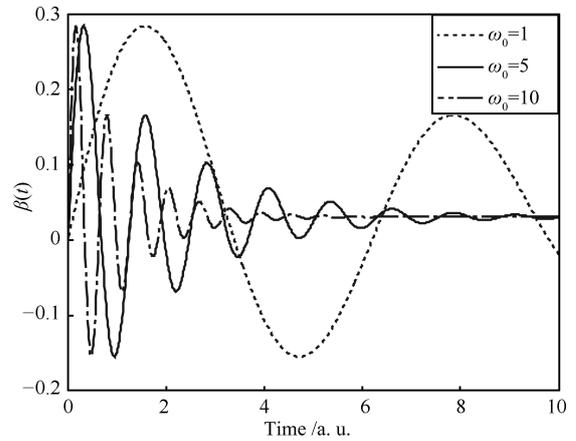


图 4 不同系统振荡频率  $\omega_0$  对  $\beta(t)$  的影响

Fig. 4 Plots of  $\beta(t)$  with different  $\omega_0$  values

### 3 控制器设计

采用基于李雅普诺夫稳定性定理的量子控制方法的基本思想是: 通过构造一个李雅普诺夫函数  $V(x)$ , 同时使其满足三个条件: 1)  $V(x)$  在定义域内连续且具有连续的一阶导数; 2)  $V(x)$  是半正定的, 即  $V(x) \geq 0$  当且仅当  $x = x_0$  时  $V(x_0) = 0$ ; 3)  $\dot{V}(x) \leq 0$ . 根据李雅普诺夫稳定性定理设计的控制律总能保证系统至少是稳定的. 该控制律设计方法的关键在于选出合适的李雅普诺夫函数<sup>[39]</sup>.

选取基于状态距离的李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2} \text{tr} \left( (\rho_s - \rho_f)^2 \right) \quad (9)$$

其中,  $\rho_s$  是系统状态;  $\rho_f$  是目标状态.

记  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_f$  分别是  $\rho_s$ ,  $\rho_f$  的 Bloch 矢量, 度量两个单量子比特状态  $\rho_s$ ,  $\rho_f$  的接近程度常用的是迹距离  $D(\rho_s, \rho_f) = \frac{1}{2} \text{tr} |\rho_s - \rho_f| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|$ , 其几何解释为 Bloch 球上两矢量之间的 Euclid 距离的一半. 将式 (9) 用 Bloch 形式表示为:  $V = \frac{1}{4} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|^2 = D^2(\rho_s, \rho_f)$ , 因此可以用李雅普诺夫函数  $V$  的值来度量  $\rho_s$  与  $\rho_f$  的距离, 并定义系统的转移误差为  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  为一个给定的充分小的正值, 在系统状态转移实验

过程中, 当  $V \leq \varepsilon$  成立, 则认为此时系统状态从给定的初态转移到了目标态.

对  $V$  求时间的一阶导数:

$$\dot{V} = \text{tr}(\dot{\rho}_s(\rho_s - \rho_f)) \quad (10)$$

将式 (1) 代入式 (10), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} = \text{tr}(\dot{\rho}_s(\rho_s - \rho_f)) = & \sum_{m=1}^2 f_m(t) \cdot \text{tr}(i[H_m, \rho_s]\rho_f) + \\ & \text{tr}((L_t(\rho_s) - i[H_0, \rho_s])(\rho_s - \rho_f)) = \\ & f_1(t) \cdot T_1 + f_2(t) \cdot T_2 + C \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $T_m = \text{tr}(i[H_m, \rho_s]\rho_f)$ ,  $m = 1, 2$ , 是一个关于  $\rho_s$  的实函数;  $f_1$  和  $f_2$  分别为待求控制律;  $C = \text{tr}((L_t(\rho_s) - i[H_0, \rho_s])(\rho_s - \rho_f))$ , 称为漂移项, 其符号是不能确定的.

为了得到一个合适的控制律, 希望式 (11) 满足李雅普诺夫定理的条件 3, 即  $\dot{V}(x) \leq 0$ . 本文设计控制律的主要思想是: 通过施加其中一个控制作用来抵消漂移项  $C$  的影响, 设计另一个控制作用来使  $\dot{V} \leq 0$  成立. 由于控制律中存在分数表达式, 为了避免数学计算上的奇异性的出现, 我们在控制律设计过程中引入了一个阈值  $\theta$ , 通过判断  $T_m$  与  $\theta$  的大小关系, 同时分为 3 种情况来决定设计哪个控制作用来抵消漂移项  $C$ , 控制律的具体设计过程如下:

1) 在式 (11) 中, 当  $|T_1| > \theta$  时, 设计控制律:  $f_1 = -C/T_1$  用来抵消漂移项; 设计控制律:  $f_2 = -g_2 \cdot T_2$ ,  $g_2 > 0$ , 则可使  $\dot{V} = -g_2 \cdot T_2^2 \leq 0$  成立. 控制律可以写为:  $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C/T_1 \\ -g_2 \cdot T_2 \end{bmatrix}$ , 其中  $g_2$  是正的可调控制参数.

2) 在式 (11) 中, 当  $|T_1| < \theta$ ,  $|T_2| > \theta$  时, 则用控制律  $f_2$  来消除漂移项, 同 1), 设计的控制律为:  $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 \cdot T_1 \\ -C/T_2 \end{bmatrix}$ , 其中  $g_1$  为正的可调控制参数, 可以保证  $\dot{V} = -g_1 \cdot T_1^2 \leq 0$ .

3) 在式 (11) 中, 当  $|T_1| < \theta$ ,  $|T_2| < \theta$  时, 计算李雅普诺夫函数  $V$  的值来判断系统状态对目标态的逼近程度, 若达到了转移误差  $\varepsilon$ , 则认为控制目标实现, 否则重新选取控制参数  $g_1$  和  $g_2$  的数值.

控制律的设计过程中, 在决定设计哪个控制作用来抵消漂移项  $C$  时, 引入了变量  $\theta$  而不直接以  $T_m \neq 0$  为依据, 其主要原因解释如下: 分析系统状态在 Bloch 球上与  $T_m = 0$  的对应关系, 记  $\mathbf{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$ , 则  $\rho_f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + z_f & x_f - iy_f \\ x_f + iy_f & 1 - z_f \end{bmatrix}$ . 对  $T_1$  和  $T_2$  的表达式进行整理, 得到:

$$T_1 = y_f z - z_f y \quad (12)$$

$$T_2 = z_f x - x_f z \quad (13)$$

由式 (12) 和式 (13) 可知, 当系统状态在转移过程中落在平面  $O_1: z_f y = y_f z$  或者平面  $O_2: z_f x = x_f z$  上时, 这会使相应的  $T_m$  ( $m = 1, 2$ ) 为零, 此时与之相乘的控制律  $f_m$  不论设计为何值, 都只能使  $\dot{V} = 0$  成立,  $V$  值保持不变; 当系统状态转移到平面  $O_1$  和  $O_2$  的交线  $L$  (其方向向量为  $\mathbf{r}_f$ ) 上时,  $T_1$  和  $T_2$  均为零, 计算  $\dot{V} = C$ , 而  $C$  的符号是不确定的, 基于李雅普诺夫稳定性定理设计控制律的方法则不再适用, 此时状态只有满足  $V \leq \varepsilon$  时, 才能认为完成了初态转移到目标态的控制任务, 否则只能重新选取控制参数. 因此, 若直接以  $T_m \neq 0$  为依据来决定设计哪个控制作用来抵消漂移项  $C$ , 当且仅当  $T_m$  ( $m = 1, 2$ ) 均不为零时, 设计的控制律才能严格保证  $\dot{V} < 0$ . 故在控制律设计过程中引入了阈值  $\theta$ , 通过判断  $T_m$  与  $\theta$  的大小关系来保证所设计出的控制律能够有效驱使系统状态不落在平面  $O_1$  和平面  $O_2$  上, 尽可能满足  $\dot{V} < 0$ , 使李雅普诺夫函数  $V$  的值是不断减小, 从而能够达到期望的控制精度  $\varepsilon$ . 根据上述思想设计出的控制律的流程图如图 5 所示, 其中虚线箭头的执行条件需要满足以下两种情况: a) 当  $|T_1| < \theta$ ,  $|T_2| < \theta$  同时成立时, 系统状态位于交线  $L$  附近, 若转移误差未能达到  $\varepsilon$ , 则需要重新选择控制参数. b) 当系统按照情况 1) 和情况 2) 下设计的控制律演化时, 若仍无法达到控制要求, 则需要重新选择控制参数.

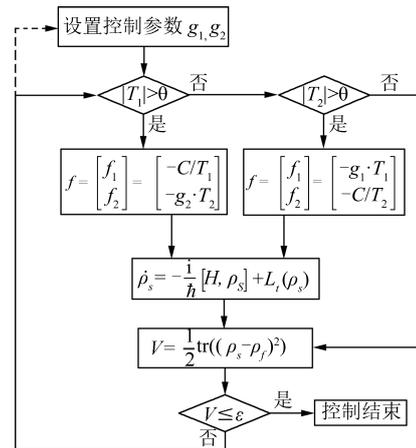


图 5 控制律设计流程图

Fig. 5 The flow chart of designing control laws

需要说明的是, 从控制理论角度来看, 本文基于李雅普诺夫稳定性定理设计的控制律属于反馈控制, 但是反馈状态是通过计算机对系统模型进行仿真获取的, 并不涉及到测量等问题, 因此我们称这种控制策略为“带有反馈的程序控制”<sup>[32]</sup>.

#### 4 系统仿真实验及其结果分析

本节将采用由第 3 节所设计出的控制律进行系统仿真实验,同时对 Non-Markovian 开放量子系统在状态转移控制过程中所表现出的特性进行观察与分析. 系统仿真实验分为两部分: 1) 未加控制时,系统的自由演化. 研究以本征态、叠加态为系统初态的自由演化轨迹,通过观察转移过程中系统状态的纯度变化情况来了解 Non-Markovian 系统不同于封闭量子系统以及 Markovian 开放量子系统自由演化的特性,并以自由演化轨迹为对比实验来验证所提出的控制策略的有效性. 2) 在所提出的量子李雅普诺夫控制作用下,系统状态转移仿真实验. 由于通过对包括从本征态到本征态、本征态到叠加态、叠加态到叠加态以及叠加态到本征态四种情况的状态转移仿真实验结果的分析发现: 纯态与纯态之间的状态转移实验所体现的系统控制特性是相似的,所以我们以叠加态到叠加态的状态转移仿真实验结果为例进行控制系统的特性分析和讨论. 依据第 2 节中各参数对系统特性影响的分析,仿真实验中系统与环境的参数设置如下:  $r = 0.05$ ,  $\omega_0 = 10$ ,  $kT = 30\omega_0$ ,  $\alpha = 0.1$ . 考虑到 Bloch 球能够使二能级系统状态可视化,故系统仿真实验中状态演化轨迹均在 Bloch 球上表示.

##### 4.1 未加控制作用时系统状态自由演化轨迹的实验

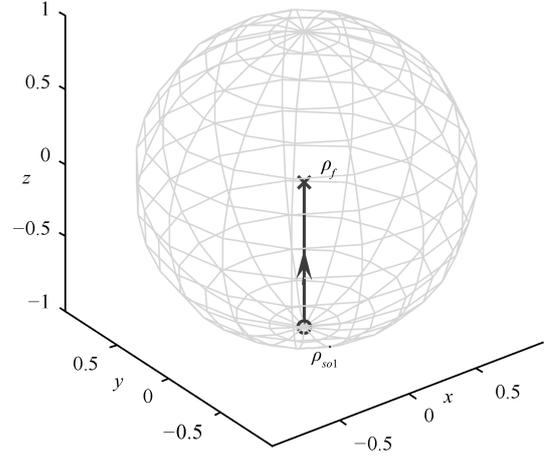
选用两组系统初态分别是本征态  $\rho_{s01} = \text{diag}\{[0, 1]\}$  和叠加态  $\rho_{s11} = [15/16 \quad \sqrt{15}/16; \sqrt{15}/16 \quad 1/16]$  来进行实验,采样周期为  $\Delta t = 0.1 \text{ a.u.}$ . 在状态自由演化的仿真实验中,为了能够观察到状态自由演化的终态,设置了足够长的系统仿真时间,当系统状态不再变化时认为到达了系统稳态. 图 6 为时间为 600 a.u. 时的系统状态的自由演化轨迹,其中“o”表示初态,“x”表示终态. 图 6(a) 和图 6(b) 分别是初态为本征态  $\rho_{s01}$  和初态为叠加态  $\rho_{s11}$  时在 Bloch 球上的自由演化轨迹. 从图 6 中可以看出: 初态为本征态  $\rho_{s01}$  时,其演化轨迹是在 Bloch 球上的  $z$  轴运动; 而初态为叠加态  $\rho_{s11}$  时,其演化轨迹类似螺旋形渐近到达  $\rho_f$ .

系统仿真实验中,以本征态和叠加态为初态的自由演化最终达到的状态均为  $\rho_f = \text{diag}\{[0.4917, 0.5083]\}$ . 在时间  $t$  足够的大,由式 (3) 和式 (5) 可得系统的耗散系数  $\gamma(t)$  和扩散系数  $\Delta(t)$  到达的稳定值分别为

$$\gamma_M = \gamma(t \rightarrow \infty) = \frac{\alpha^2 \omega_0 r^2}{1 + r^2} \quad (14)$$

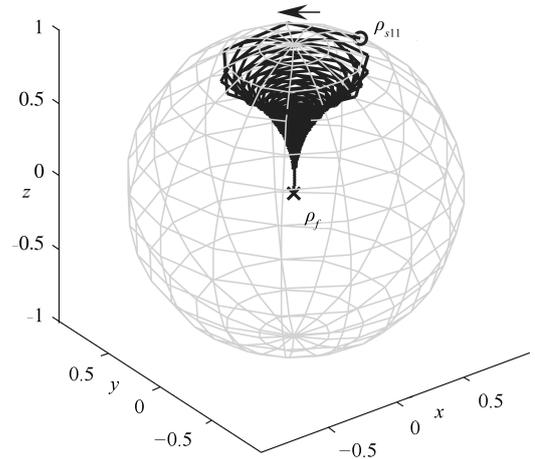
$$\Delta_M = \Delta(t \rightarrow \infty) = 2\alpha^2 kT \frac{r^2}{1 + r^2} \quad (15)$$

未加控制作用时,由  $\dot{\rho}_s = 0$  可得:



(a) 本征态的自由演化轨迹

(a) The free evolution trajectory starting from  $\rho_{s01}$



(b) 叠加态的自由演化轨迹

(b) The free evolution trajectory starting from  $\rho_{s11}$

图 6 系统不同初态的自由演化轨迹

Fig. 6 The free evolution trajectories starting from different states

$$\begin{bmatrix} -(\gamma_M + \Delta_M z) & -\frac{1}{2}[\Delta_M x + y + i(x - \Delta_M y)] \\ -\frac{1}{2}[\Delta_M x + y - i(x - \Delta_M y)] & (\gamma_M + \Delta_M z) \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

可得稳态解的坐标为

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{\gamma_M}{\Delta_M} = -\frac{\omega_0}{2kT} \quad (17)$$

由式 (17) 可知, Non-Markovian 开放二能级量子系统的稳态是由系统本身的振荡频率  $\omega_0$  和系统所处的环境温度  $kT$  所决定的,而与系统自由演化的初态无关. 在所设定的参数下,可以由式 (17) 计

算得出系统稳态的密度矩阵为  $\rho_f = \text{diag}\{[0.4917, 0.5083]\}$ , 这与系统数值仿真实验所获结果完全吻合.

在第 2 节中我们得出 Non-Markovian 系统状态纯度变化是非单调的特性, 下面以本征态为例来说明 Non-Markovian 系统自由演化过程中纯度  $p$  与  $\beta(t)$  的关系以及演化轨迹呈现的特性. 图 7 是初态为本征态  $\rho_{s01}$  时, 系统在仿真时间为 6 a.u. 时自由演化过程中纯度  $p$ ,  $\beta(t)$  以及  $z$  坐标的变化曲线. 从图 7 中可以看出, 在初态为本征态  $\rho_{s01}$  自由演化过程中, 状态在  $z$  轴上并非是从 Bloch 球南极单向转移到系统稳态  $\rho_f$  的,  $z$  坐标是振荡增加的, 纯度  $p$  是振荡衰减的, 且两者变化的时间转折点是一致的, 都是: 当  $\beta(t) > 0$  时,  $p$  是递减的,  $z$  是递增的; 当  $\beta(t) < 0$  时,  $p$  是递增的,  $z$  是递减的, 其中纯度  $p$  与  $\beta(t)$  的变化关系验证了第 2 节的结论.

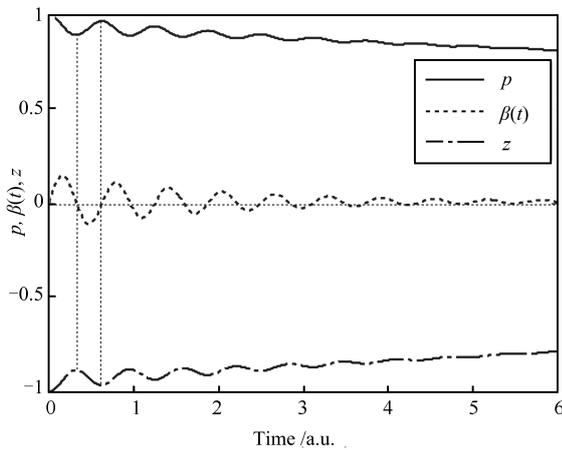


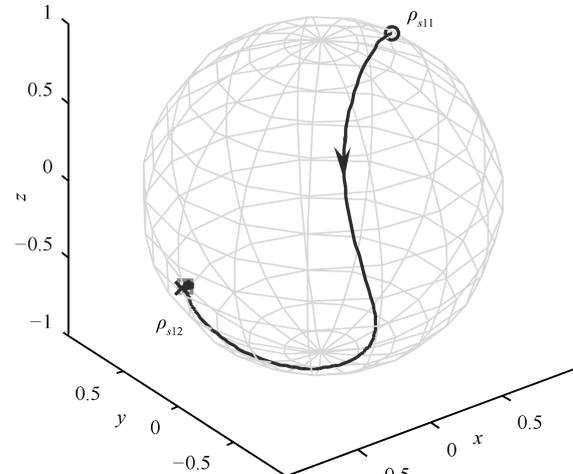
图 7  $p$ ,  $\beta(t)$  和  $z$  坐标随时间变化曲线

Fig. 7 Curves of  $p$ ,  $\beta(t)$  and  $z$  axis

#### 4.2 李雅普诺夫控制作用下的系统状态转移实验

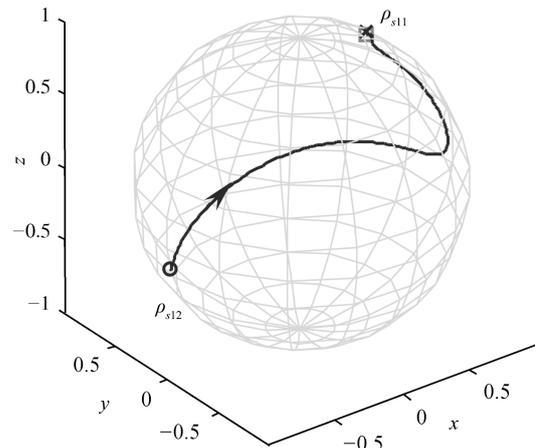
本节主要对叠加态与叠加态之间的状态转移进行数值仿真, 选用的系统的初态和终态分别为叠加态  $\rho_{s11} = [15/16 \ \sqrt{15}/16; \ \sqrt{15}/16 \ 1/16]$  与叠加态  $\rho_{s12} = [3/8 \ -\sqrt{15}/8; \ -\sqrt{15}/8 \ 5/8]$ , 采样周期均为  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$  a.u., 阈值均选定为  $\theta = 1 \times 10^{-4}$ . 图 8 为两组不同控制参数下, 系统不同状态之间的转移轨迹, 其中“o”表示初态, “x”表示目标态, “□”表示系统状态转移的终态. 图 8(a) 是从  $\rho_{s11}$  到  $\rho_{s12}$  的状态转移轨迹, 在选定的控制参数为  $g_1 = 10$ ,  $g_2 = 30$ , 仿真时间为 0.6385 a.u. 情况下, 系统状态与目标态之间的转移误差达到  $\varepsilon = 1.24 \times 10^{-4}$  的性能; 图 8(b) 是从  $\rho_{s12}$  到  $\rho_{s11}$  的状态转移轨迹, 在选定的控制参数为  $g_1 = 4$ ,  $g_2 = 12$ , 仿真时间为 0.714 a.u. 情况下, 系统状态与目标态之间的转移误差达到  $\varepsilon = 1.03 \times 10^{-4}$  的性能. 从图 8 可以看出, 在李雅普诺夫控制律的作用下, 通过调

整控制参数可以实现所期望的控制性能下的不同初态和目标态之间的状态转移. 图 9 是控制律的变化曲线, 其中图 9(a) 和图 9(b) 分别是从  $\rho_{s11}$  转移到  $\rho_{s12}$  以及从  $\rho_{s12}$  转移到  $\rho_{s11}$  状态的控制律变化曲线. 图 9 中采用的是双  $y$  坐标: 横坐标的标度相同, 均为仿真时间, 纵坐标有两个, 左纵坐标表示控制律  $f_1$  (实线) 的大小, 右纵坐标表示控制律  $f_2$  (虚线) 的大小.



(a)  $\rho_{s11}$  到  $\rho_{s12}$  的状态转移轨迹

(a) State-transfer from  $\rho_{s11}$  to  $\rho_{s12}$



(b)  $\rho_{s12}$  到  $\rho_{s11}$  的状态转移轨迹

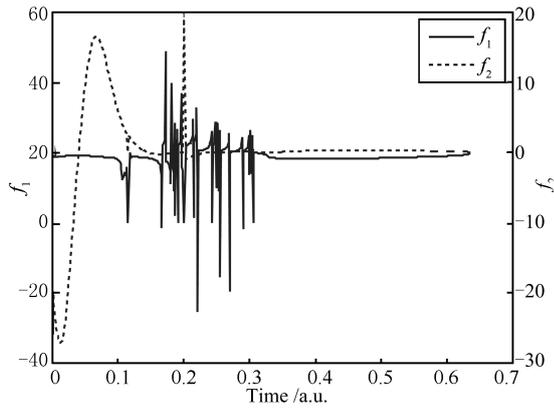
(b) State-transfer from  $\rho_{s12}$  to  $\rho_{s11}$

图 8 系统不同状态之间的转移轨迹

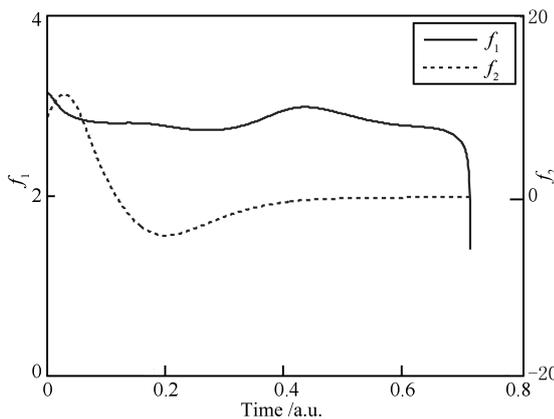
Fig. 8 Two state-transfer trajectories under the designed control laws

对比系统自由演化轨迹和外加控制作用下状态转移轨迹, 可以发现: 在外加控制的作用下, 可以有效地改变状态演化轨迹, 在给定的转移误差性能指标下, 实现 Non-Markovian 开放量子系统纯态与纯态之间的状态转移.

现以  $\rho_{s12}$  到  $\rho_{s11}$  的状态转移为例来具体说明纯



(a) 从  $\rho_{s11}$  转移到  $\rho_{s12}$  的控制律  
(a) Control fields corresponding to Fig. 8 (a)



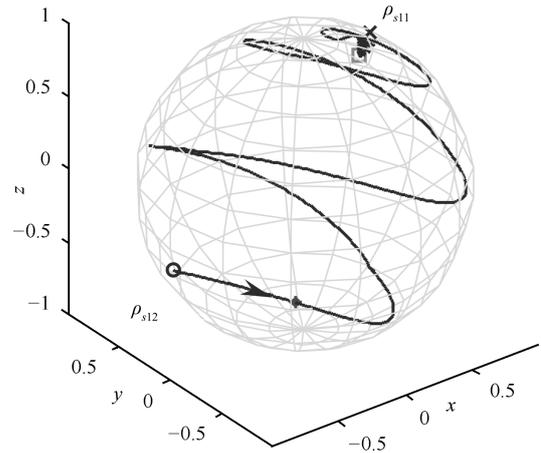
(b) 从  $\rho_{s12}$  转移到  $\rho_{s11}$  的控制律  
(b) Control fields corresponding to Fig. 8 (b)

图9 控制律的变化曲线  
Fig. 9 Control fields

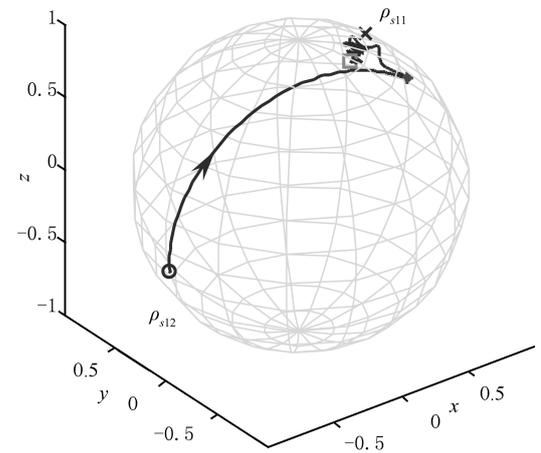
态到纯态的状态转移过程中, 控制参数的大小对控制性能的影响. 图 10 是在相同的仿真时间 6 a.u. 内, 在两组不同的控制参数下,  $\rho_{s12}$  到  $\rho_{s11}$  的状态转移轨迹, 其中“o”表示初态, “\*”表示的是运行 0.1 a.u. 时系统的状态, “x”表示的是目标态, “□”表示系统状态转移的终态. 图 10 (a) 中的控制参数设置为  $g_1 = 4, g_2 = 2$ , 所达到的转移误差最小值为 0.0012; 图 10 (b) 中的控制参数设置为  $g_1 = 4, g_2 = 30$ , 所达到的转移误差的最小值为 0.0014.

从图 10 中可以很清楚地看到: 两种情况下, 系统的终态都未能较好地逼近目标态, 并且发现即使延长仿真时间也不能使转移误差继续减小. 比较图 10 (a) 和图 10 (b) 中的状态转移路径, 可以发现控制参数的大小对初始时间段  $[0, 0.1]$  的状态转移路径有明显的影响. 随着控制参数  $g_2$  的增大, 在初始时间段内系统状态会以较快的速度向目标态转移.

比较图 10 (a) ( $g_1 = 4, g_2 = 2$ )、图 10 (b) ( $g_1 = 4, g_2 = 30$ ) 和图 8 (b) ( $g_1 = 4, g_2 = 12$ ) 三种情况,



(a) 控制参数为:  $g_1 = 4, g_2 = 2$   
(a) Control parameters:  $g_1 = 4, g_2 = 2$



(b) 控制参数为:  $g_1 = 4, g_2 = 30$   
(b) Control parameters:  $g_1 = 4, g_2 = 30$

图 10 不同控制参数下  $\rho_{s12}$  到  $\rho_{s11}$  的状态转移轨迹  
Fig. 10 State-transfer from  $\rho_{s12}$  to  $\rho_{s11}$  with different control parameters

可以发现图 10 (a) 的控制参数  $g_2$  过小, 状态转移轨迹以类螺旋形旋转靠近目标态, 状态转移路径最长; 图 10 (b) 的控制参数  $g_2$  过大, 状态在初始阶段的变化加快, 状态转移路径缩短, 但仍未能实现控制, 只有图 8 (b) 的参数选择合适, 达到了性能指标  $\epsilon$ . 通过多次实验我们还发现, 可以达到性能指标  $\epsilon$  的控制参数  $g_1$  和  $g_2$  的组合有很多, 同时导致系统控制量很大的参数组合也很多.

通过实验我们还研究了  $r = \omega_c/\omega_0$  值的大小对状态转移控制性能的影响. 取  $r = 0.05$  时, 从  $\rho_{s12}$  到  $\rho_{s11}$  的状态转移作为对比, 进一步进行当  $r = 0.01$  时的实验, 调整控制参数为  $g_1 = 4$  和  $g_2 = 10$ , 可以发现: 在仿真时间为 0.512 a.u. 时系统能够以  $\epsilon = 2 \times 10^{-5}$  更小的转移误差实现了控制要求; 当取  $r = 0.1$  时进行实验, 较好的一组控制参数为  $g_1 = 4$  和

$g_2 = 8$ , 系统状态在仿真时间为 0.675 a.u. 时达到转移误差最小值  $\varepsilon = 5.1 \times 10^{-4}$ , 对目标态的逼近程度明显下降; 当取  $r = 1$  时进行实验, 此时被控系统主要呈现出 Markovian 特性, 通过加大控制作用量, 调整控制参数为  $g_1 = 4$  和  $g_2 = 80$ , 所获得的转移误差仅达到  $10^{-2}$  量级, 对目标态的逼近程度大大降低.

## 5 结论

本文主要研究了量子李雅普诺夫控制应用于 Non-Markovian 开放二能级量子系统纯态到纯态的状态转移问题. 采用 TCL 来描述高温环境下系统的控制模型, 分别研究了环境截断频率、耦合系数和系统振荡频率对系统特性的影响; 基于李雅普诺夫稳定性定理设计了一组控制律; 在 Matlab 环境下, 对系统状态自由演化和不同纯态到纯态的状态转移控制进行了数值仿真实验的性能对比与分析, 得出以下结论: 系统自由演化轨迹振荡特性是由非单调的纯度变化导致的; 所设计的控制律能够有效地实现 Non-Markovian 系统从一个给定初态到期望目标态的状态转移; 控制参数、截断频率参数对控制性能有显著的影响.

## References

- Zhang Yong-De. *Principles of Quantum Information Physics*. Beijing: Science Press, 2005. 124–140 (张永德. 量子信息物理原理. 北京: 科学出版社, 2005. 124–140)
- Breuer H P, Petruccione F. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford: Oxford University Press, 2002. 460–496
- Nielsen M A, Chuang I L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 5–44
- Yang Jie. Modeling and Control of Open Quantum Systems [Ph.D. dissertation], University of Science and Technology of China, China, 2011 (杨洁. 开放量子系统的建模及其控制 [博士学位论文], 中国科学技术大学, 中国, 2011)
- Liu Jian-Xiu, Cong Shuang. Research on dynamical models of non-Markovian open quantum system. In: Proceedings of the 13th Conference on System Simulation Technology and Application. Huangshan, Anhui: Scientific Research Publishing, 2011. 264–272 (刘建秀, 丛爽. Non-Markovian 开放量子系统动力学模型的研究. 第 13 届中国系统仿真技术及其应用学术年会论文集. 安徽黄山: 美国科研出版社, 2011. 264–272)
- Carmichael H J. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 5–38
- Huebl H, Hoehne F, Grolik B, Stegner A R, Stutzmann M, Brandt M S. Spin echoes in the charge transport through phosphorus donors in silicon. *Physical Review Letters*, 2008, **100**(17): 177602
- Vaz E, Kyriakidis J. Transient dynamics of confined charges in quantum dots in the sequential tunneling regime. *Physical Review B*, 2010, **81**(8): 085315
- Budini A A. Open quantum system approach to single-molecule spectroscopy. *Physical Review A*, 2009, **79**(4): 043804
- Haikka P, Maniscalco S. Non-Markovian dynamics of a damped driven two-state system. *Physical Review A*, 2010, **81**(5): 052103
- Maniscalco S, Petruccione F. Non-Markovian dynamics of a qubit. *Physical Review A*, 2006, **73**(1): 012111
- Tong Q J, An J H, Luo H G, Oh C H. Decoherence suppression of a dissipative qubit by the non-Markovian effect. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2010, **43**(15): 155501
- Ji Ying-Hua, Xu Lin. Entanglement decoherence of coupled superconductor qubits entangled states in non-Markovian environment. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2011, **28**(1): 58–64 (嵇英华, 徐林. 非马尔科夫环境下耦合超导量子比特纠缠态的纠缠消相干. 量子电子学报, 2011, **28**(1): 58–64)
- Anastopoulos C, Shresta S, Hu B L. Non-Markovian entanglement dynamics of two qubits interacting with a common electromagnetic field. *Quantum information processing*, 2009, **8**(6): 549–563
- Maniscalco S, Olivares S, Paris M G A. Entanglement oscillations in non-Markovian quantum channels. *Physical Review A*, 2007, **75**(6): 062119
- Vacchini B, Breuer H P. Exact master equations for the non-Markovian decay of a qubit. *Physical Review A*, 2010, **81**(4): 042103
- Cui W, Xi Z R, Pan Y. Optimal decoherence control in non-Markovian open dissipative quantum systems. *Physical Review A*, 2008, **77**(3): 032117
- Xi Z R, Cui W, Pan Y. Optimal control of non-Markovian open quantum systems via feedback [Online], available: <http://arxiv.org/abs/1004.4659>, April 26, 2010
- Xue S B, Wu R B, Zhang W M, Zhang J, Li C W, Tarn T J. Decoherence suppression via non-Markovian coherent feedback control. *Physical Review A*, 2012, **86**(5): 052304
- Zhang M, Ou B Q, Dai H Y, Hu D W. Control decoherence by quantum generalized measurement. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(4): 433–437
- Rebentrost P, Serban I, Schulte-Herbrüggen T, Wilhelm F K. Optimal control of a qubit coupled to a non-Markovian environment. *Physical Review Letters*, 2009, **102**(9): 090401
- Hwang B, Goan H S. Optimal control for non-Markovian open quantum systems. *Physical Review A*, 2012, **85**(3): 032321
- Escher B M, Bensky G, Clausen J, Kurizki G. Optimized control of quantum state-transfer from noisy to quiet qubits. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2011, **44**(15): 154015
- Cui W, Xi Z R, Pan Y. Controlled population transfer for quantum computing in non-Markovian noise environment. In: Proceeding of Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 2504–2509

- 25 Cong S, Zhang Y Y. Superposition state preparation based on Lyapunov stability theorem in quantum systems. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2008, **38**(7): 821–827
- 26 Mirrahimi M, Rouchon P, Turinici G. Lyapunov control of bilinear Schrödinger equations. *Automatica*, 2005, **41**(11): 1987–1994
- 27 Wang X T, Schirmer S G. Analysis of Lyapunov method for control of quantum states. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(10): 2259–2270
- 28 Hou S C, Khan M A, Yi X X, Dong D Y, Petersen I R. Optimal Lyapunov-based quantum control for quantum systems. *Physical Review A*, 2012, **86**(2): 022321
- 29 Zhao S W, Lin H, Xue Z G. Switching control of closed quantum systems via the Lyapunov method. *Automatica*, 2012, **48**(8): 1833–1838
- 30 Cong S, Kuang S. Quantum control strategy based on state distance. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(1): 28–31
- 31 Kuang S, Cong S. Population control of equilibrium states of quantum systems via Lyapunov method. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(9): 1257–1263
- 32 Kuang S, Cong S. Lyapunov control methods of closed quantum systems. *Automatica*, 2008, **44**(1): 98–108
- 33 Zhao S W, Lin H, Sun J T, Xue Z G. An implicit Lyapunov control for finite-dimensional closed quantum systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, **22**(11): 1212–1228
- 34 Yi X X, Huang X L, Wu C F, Oh C H. Driving quantum systems into decoherence-free subspaces by Lyapunov control. *Physical Review A*, 2009, **80**(5): 052316
- 35 Wang W, Wang L C, Yi X X. Lyapunov control on quantum open systems in decoherence-free subspaces. *Physical Review A*, 2010, **82**(3): 034308
- 36 Maniscalco S, Piilo J, Intravaia F, Petruccione F, Messina A. Lindblad- and non-Lindblad-type dynamics of a quantum Brownian particle. *Physical Review A*, 2004, **70**(3): 032113
- 37 Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Tables of Integrals, Series and Products*. San Diego: Academic Press, 2007. 812–820
- 38 Lu Xiao-Ming. Quantum Information in Open Quantum Systems [Ph. D. dissertation], Zhejiang University, China, 2011  
(陆晓铭. 开放系统中的量子信息 [博士学位论文], 浙江大学, 中国, 2011)
- 39 Cong Shuang. State manipulation in Lyapunov-based quantum system control methods. *Control Theory and Applications*, 2012, **29**(3): 273–281  
(丛爽. 基于李雅普诺夫量子系统控制方法的状态调控. 控制理论与应用, 2012, **29**(3): 273–281)



**丛爽** 中国科学技术大学自动化系教授. 1995 年于意大利罗马大学获得系统工程专业博士学位. 主要研究方向为运动控制中的先进控制策略, 模糊逻辑控制, 神经网络设计与应用, 机器人协调控制以及量子系统控制. 本文通信作者.

E-mail: scong@ustc.edu.cn

(**CONG Shuang** Professor in the Department of Automation, University of Science and Technology of China. She received her Ph. D. degree in system engineering from University of Rome “La Sapienza”, Italy in 1995. Her research interest covers advanced control strategies for motion control, fuzzy logic control, neural networks design and applications, robotic coordination control, and quantum systems control. Corresponding author of this paper.)



**胡龙珍** 中国科学技术大学自动化系硕士研究生. 2011 年于武汉大学获得学士学位. 主要研究方向为开放量子系统控制. E-mail: lzh1217@mail.ustc.edu.cn

(**HU Long-Zhen** Master student in the Department of Automation, University of Science and Technology of China. She received her bachelor degree from Wuhan University in 2011. Her main research

interest is open quantum systems control.)



**杨霏** 中国科学技术大学自动化系博士研究生. 2008 年于中国科技大学自动化系获得学士学位. 主要研究方向为量子系统控制.

E-mail: yf8610@mail.ustc.edu.cn

(**YANG Fei** Ph. D. candidate in the Department of Automation, University of Science and Technology of China. He received his bachelor degree in automatic control from University of Science and Technology of China in 2008. His main research interest is quantum systems control.)



**刘建秀** 中国科学技术大学自动化系硕博连读研究生. 2008 年于河南科技大学大学获得学士学位. 主要研究方向为量子系统的跟踪控制.

E-mail: zjxliu@mail.ustc.edu.cn

(**LIU Jian-Xiu** Ph. D. candidate in the Department of Automation, University of Science and Technology of China. She received her bachelor degree from University of Science and Technology of Henan in 2008. Her main research interest is quantum systems tracking control.)