

# 基于广义逆的欠驱动航天器姿态机动控制

黄静<sup>1</sup> 李传江<sup>1</sup> 马广富<sup>1</sup> 刘刚<sup>1</sup>

**摘要** 针对欠驱动刚体航天器机动控制问题,应用广义逆方法设计了姿态机动控制器. 首先将三轴稳定欠驱动航天器动力学和运动学系统分解为三个子系统,应用微分几何理论将欠驱动航天器子系统转化为逐点线性形式,并设计了欠驱动航天器子系统渐近稳定控制器,进一步引入了动态尺度广义逆和摄动零控制向量,实现了对另外两轴的控制.设计的广义逆姿态控制器保证了整个系统的渐近稳定性,达到了控制要求.数值仿真实验结果表明了所设计控制律的有效性.

**关键词** 航天器,欠驱动系统,姿态机动,广义逆方法

**引用格式** 黄静,李传江,马广富,刘刚.基于广义逆的欠驱动航天器姿态机动控制.自动化学报,2013,39(3):285–292

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.00285

## Generalised Inversion Based Maneuver Attitude Control for Underactuated Spacecraft

HUANG Jing<sup>1</sup> LI Chuan-Jiang<sup>1</sup> MA Guang-Fu<sup>1</sup> LIU Gang<sup>1</sup>

**Abstract** The methodology based on the concept of generalized inversion is investigated for asymptotic stabilization of underactuated rigid body dynamics under two degrees of actuation. Firstly, the underactuated kinematics and dynamics system is partitioned into three subsystems, and the underactuated subsystem is transformed as the point-wise linear form by differential geometry theory and achieves global realisability. Furthermore, with the introduction of dynamically scaled generalized inversion and perturbed null-control vector, a continuous feedback control law is designed to achieve the attitude stabilization of the underactuated spacecraft. Finally, the analytical and simulation results show that the proposed control methodology is effective.

**Key words** Spacecraft, underactuated system, attitude maneuver, generalised inverse method

**Citation** Jing Huang, Chuan-Jiang Li, Guang-Fu Ma, Gang Liu. Generalised inversion based maneuver attitude control for underactuated spacecraft. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 285–292

欠驱动航天器姿态控制已经成为国际上研究的热点,它是指控制系统部分执行机构如喷气、动量轮等失效而导致其不能提供完整的三轴控制力矩.研究欠驱动航天器的控制问题,对于保障整个系统的正常工作,增加系统的可靠性具有重要的意义,而且由于采用少于标准数量的执行机构来实现控制目标,欠驱动航天器在减低能耗、减轻系统质量等方面具有较大优势.

但欠驱动系统是具有不可积分约束的本质非线性系统,相比于全驱动航天器姿态控制系统,研究结果相对较少.在相关研究中,Crouch<sup>[1]</sup>首先证明

了欠驱动航天器在各种动量转换装置或喷气推力激励下的可控性问题.Byrnes等<sup>[2]</sup>证明了由于不满足Brockett能稳条件,采用光滑定常状态反馈不能使欠驱动航天器达到渐近稳定,因此仅设计了部分稳定控制器.Horri等<sup>[3]</sup>针对该问题,在假设系统动量矩为零的条件下,通过Lyapunov方法提出了不连续的状态反馈姿态稳定控制规律.Tsiotras等<sup>[4–5]</sup>在假设欠驱动轴的初始角度为零的条件下,采用了 $(w, z)$ 参数描述航天器姿态运动学方程,对欠驱动航天器的姿态稳定问题进行了探讨,并提出了一系列不连续时不变的稳定控制器.

进一步,在考虑三轴初始角速度均不为零的情况下,Coverstone-Carroll等<sup>[6]</sup>采用变结构控制方法解决了未考虑欠驱动航天器运动学的全局渐近角速度稳定问题.同样,Bajodah<sup>[7]</sup>也只考虑了欠驱动航天器的角速度稳定问题,提出了奇异摄动反馈线性化和广义逆控制方法,但稳定性分析较为复杂.Casagrande等<sup>[8]</sup>针对欠驱动航天器角速度和姿态渐近稳定问题,提出了时变切换分段控制律,但是这种方法一旦产生误差,有可能不满足切换条件,较易发散,不利于应用于实际系统中,并且在仿真中仅考

收稿日期 2011-01-17 录用日期 2012-07-25  
Manuscript received January 17, 2011; accepted July 25, 2012  
国家自然科学基金(61004072, 61174200),高等学校博士学科点专项  
科研基金(20102302110031)资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China  
(61004072, 61174200) and Doctoral Program Foundation of In-  
stitutions of Higher Education of China (20102302110031)  
本文责任编辑 周军  
Recommended by Associate Editor ZHOU Jun  
1. 哈尔滨工业大学控制科学与工程系 哈尔滨 150001  
1. Department of Control Science and Engineering, Harbin  
Institute of Technology, Harbin 150001  
该文的英文版同时发表在 *Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 3,  
pp. 285–292, 2013.

虑了欠驱动轴初始角速度为零的情况. Behal 等<sup>[9]</sup> 采用了反步设计方法, 针对轴对称欠驱动航天器设计了非线性跟踪控制器, 但仅受限于欠驱动轴角速度初值为零的情况. Cheon<sup>[10]</sup> 研究了采用修正罗德里格参数作为姿态描述方式的欠驱动刚体航天器的姿态稳定问题. 张兵等<sup>[11]</sup> 讨论了以非完整配置的单向推力器系统为执行机构的欠驱动刚体航天器姿态角速度的镇定问题, 但未考虑姿态的稳定. Li 等<sup>[12]</sup> 则利用辅助状态变量法, 研究了一个具有指数收敛的光滑非周期时变控制律, 可以把刚体航天器的姿态局部收敛于平衡点. 黄兴宏等<sup>[13]</sup> 在分析欠驱动航天器姿态动力学和运动学方程的特点后, 提出一种简洁的分段解耦控制策略, 通过常规的 PD 控制律实现了欠驱动航天器的稳定控制. 郑敏捷等<sup>[14]</sup> 也是采用将姿态动力学控制系统和运动学控制系统分开设计的方法, 使用反步控制来实现对失控轴角速度的有效控制, 并证明在失控轴角速度为小量时, 可以将系统控制在平衡点的某一邻域内且其为渐近稳定. 但是这种将动力学子系统与运动学子系统进行解耦控制, 存在控制奇点, 难以实现真正意义上的收敛.

金磊等<sup>[15]</sup> 研究了仅带两个飞轮的姿态稳定控制, 固连于航天器的视线轴指向任意给定惯性方向, 但是基于线性化模型设计的线性二次型调节器 (Linear quadratic regulator, LQR) 的姿态稳定控制器, 具有一定局限性. 王艺等<sup>[16]</sup> 利用中心流形理论的思想推导稳定参数, 使欠驱动航天器进入姿态稳定, 但是参数选取存在问题. 郑彦琴等<sup>[17]</sup> 采用  $(w, z)$  参数描述的姿态运动学方程, 设计了基于退步法的连续时变控制律. 此外, 虽然 Siciliano 等<sup>[18]</sup> 在开环控制的基础上实现了任意姿态和任意角度的控制, 但开环控制的算法较为复杂, 导致该方法的通用性较为有限.

广义逆方法最大的优点是克服了与逆运算相关的矩阵维数和秩的限制, 在解决冗余自由度机器人控制等具有广泛的应用<sup>[19-20]</sup>, Bajodah<sup>[21]</sup> 最初将此方法应用于三轴稳定航天器姿态控制系统中. 由于此方法控制系统中的冗余是在控制过程中而不是在控制变量中, 可控系统包括欠驱动系统为动态冗余的, 也就是说不考虑执行机构的自由度, 应用广义逆方法可以求得非奇异控制器使可控系统达到稳定, 因此可用于解决欠驱动控制问题.

本文在此基础上, 对传统的广义逆方法进行了改进, 提出了一种欠驱动航天器姿态机动光滑渐近控制律. 与文献 [6-7, 11] 相比, 本文不仅考虑了欠驱动航天器的角速度稳定问题, 还使航天器姿态达到了机动目标; 与文献 [4-5, 9] 相比, 本文没有限制航天器失控轴的角速度为零或航天器为轴对称航天器的条件; 与文献 [13-14] 相比, 本文未将动力学与运动学子系统进行解耦控制, 而是在设计过程中, 同

时考虑了欠驱动航天器的动力学与运动学系统, 并证明了系统李雅普诺夫意义下的全局渐近稳定性. 进一步, 考虑了控制力矩的受限问题, 分析得出在力矩受限情况下, 本文设计的控制算法仍然可以保证系统的稳定性. 仿真结果表明, 该控制器能够实现欠驱动航天器的失控轴姿态角速度与姿态四元数的同步收敛, 能够有效地实现欠驱动航天器姿态机动的控制要求, 且系统具有全局渐近稳定性, 具有广泛的应用前景.

## 1 欠驱动航天器系统模型

在不考虑外部激励诱发扰动力矩的情况下, 刚体航天器姿态动力学方程可表示为

$$J\dot{\omega} + \omega^\times J\omega = M \quad (1)$$

式中,  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^\text{T} \in \mathbf{R}^3$  表示航天器本体坐标系  $b$  相对于地心惯性坐标系  $i$  的旋转角速度在  $b$  中的分量, 对于任意向量  $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3]^\text{T} \in \mathbf{R}^3$ , 符

号  $\zeta^\times$  表示斜对称阵:  $\zeta^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{bmatrix}$ ;

$M = [M_1 \ M_2 \ M_3]^\text{T} \in \mathbf{R}^3$  表示有执行机构提供的三轴独立控制力矩. 若航天器本体系的三个坐标轴与其主惯量轴一致, 则转动惯量矩阵  $J = \text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ .

采用四元数姿态描述的航天器姿态误差运动学方程为<sup>[9]</sup>

$$\dot{q}_e = \frac{1}{2}(q_e^\times + q_{e0}I_3)\omega_e, \quad \dot{q}_{e0} = -\frac{1}{2}q_e^\text{T}\omega_e \quad (2)$$

其中,  $\tilde{q}_e = \{q_{e0}, q_e\} \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$  表示在本体坐标系下期望姿态与当前状态的误差, 假设期望角速度为零, 因此,  $\omega = \omega_e$  即为在本体坐标系下期望角速度与当前角速度的误差. 为了方便, 在后文中,  $\tilde{q}_e = \{q_{e0}, q_e\} \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$  采用  $\tilde{q} = \{q_0, q\} \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$  进行表示.

考虑只有两轴独立控制力矩, 不失一般性, 令  $b_1$  轴为欠驱动轴, 即  $M_1 = 0$ . 则方程 (1) 和 (2) 可以写为

$$\dot{\omega} = f(\omega)\omega + \tau \quad (3)$$

$$\dot{q} = f(\tilde{q})\omega, \quad \dot{q}_0 = -\frac{1}{2}q^\text{T}\omega \quad (4)$$

其中,  $\tau = J^{-1}M = [0 \ u^\text{T}]^\text{T} \in \mathbf{R}^3$ ,  $u = [u_2 \ u_3]^\text{T} \in \mathbf{R}^2$ ,  $f(\omega) = -J^{-1}\omega^\times J$ ,  $f(\tilde{q}) = \frac{1}{2}(q^\times + q_0I_3)$ . 令  $x = [q_0 \ q^\text{T} \ \omega^\text{T}]^\text{T} \in \mathbf{R}^7$ , 则欠驱动航天器系统模型可表示为如下的仿射型非线性系统:

$$\dot{x} = F(x) + g(x)u = f(x)\omega + gu \quad (5)$$

为了便于分析欠驱动系统的性质, 将系统 (5) 分解为三个子系统, 分别为欠驱动子系统、伪驱动运动学子系统和全驱动动力学子系统. 令  $\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega}_u \ \boldsymbol{\omega}_a^T]^T \in \mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{q} = [q_u \ \mathbf{q}_a^T]^T \in \mathbf{R}^3$ , 式中欠驱动状态变量  $\mathbf{x}_u = [q_u \ \boldsymbol{\omega}_u]^T \in \mathbf{R}^2$ ,  $\boldsymbol{\omega}_u = \boldsymbol{\omega}_1$ ,  $q_u = q_1$ , 驱动角速度  $\boldsymbol{\omega}_a = [\boldsymbol{\omega}_2 \ \boldsymbol{\omega}_3]^T$ , 伪驱动误差四元数  $\mathbf{q}_a = [q_2 \ q_3]^T$ , 并将矩阵  $f(\boldsymbol{\omega})$  和  $f(\tilde{\mathbf{q}})$  分别分解为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\omega}) &= \begin{bmatrix} f_{11}(\boldsymbol{\omega}) & f_{12}(\boldsymbol{\omega}) \\ f_{21}(\boldsymbol{\omega}) & f_{22}(\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \\ f(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} f_{11}(\tilde{\mathbf{q}}) & f_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) \\ f_{21}(\tilde{\mathbf{q}}) & f_{22}(\tilde{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $f_{11}(\boldsymbol{\omega}), f_{11}(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^{1 \times 1}$ ,  $f_{12}(\boldsymbol{\omega}), f_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^{1 \times 2}$ ,  $f_{21}(\boldsymbol{\omega}), f_{21}(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^{2 \times 1}$ ,  $f_{22}(\boldsymbol{\omega}), f_{22}(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ , 则欠驱动子系统分解为

$$\dot{\mathbf{x}}_u = \begin{bmatrix} 0 & f_{11}(\tilde{\mathbf{q}}) \\ 0 & f_{11}(\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \mathbf{x}_u + \begin{bmatrix} f_{12}(\tilde{\mathbf{q}}) \\ f_{12}(\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_a \quad (7)$$

伪驱动误差四元数运动学子系统为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_a &= [\mathbf{0}_{2 \times 1} \quad f_{21}(\tilde{\mathbf{q}})] \mathbf{x}_u + f_{22}(\tilde{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\omega}_a \\ \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2} (q_u \boldsymbol{\omega}_u + \mathbf{q}_a^T \boldsymbol{\omega}_a) \end{aligned} \quad (8)$$

包含控制向量  $\mathbf{u}$  的全驱动动力学子系统为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_a = [\mathbf{0}_{2 \times 1} \quad f_{21}(\boldsymbol{\omega})] \mathbf{x}_u + f_{22}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega}_a + \mathbf{u} \quad (9)$$

## 2 欠驱动航天器运动学和动力学子系统的稳定控制器设计

由于控制器  $\mathbf{u}$  通过  $\boldsymbol{\omega}_a$  间接控制欠驱动子系统 (7), 为了分析欠驱动系统的稳定性, 我们将欠驱动子系统进行坐标转换, 使其在新的转换系统中能够显现. 定义标量函数  $h(\mathbf{x}_u) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  满足:

$$h(\mathbf{x}_u) = \omega_u + \lambda q_u \quad (10)$$

其中,  $\lambda > 0$  为可调整的标量. 由式 (7) ~ (9) 可得,  $h(\mathbf{x}_u)$  关于  $\mathbf{u}$  的相对阶<sup>[22]</sup> 为 2. 因此, 欠驱动系统为连续二阶可导的. 一般的转换形式为

$$\ddot{h} = \varsigma(h, \dot{h}, t) \quad (11)$$

$h(\mathbf{x}_u)$  沿着欠驱动系统 (5) 的一阶和二阶导数分别为

$$\dot{h}(\mathbf{x}_u) = L_{\mathbf{F}} h(\mathbf{x}_u) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{h}(\mathbf{x}_u) &= \frac{\partial L_{\mathbf{F}} h(\mathbf{x}_u)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \\ &L_{\mathbf{F}}^2 h(\mathbf{x}_u) + L_g L_{\mathbf{F}} h(\mathbf{x}_u) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $L_{\mathbf{F}} h(\mathbf{x}_u)$ ,  $L_{\mathbf{F}}^2 h(\mathbf{x}_u)$  和  $L_g L_{\mathbf{F}} h(\mathbf{x}_u)$  分别表示  $h(\mathbf{x}_u)$  沿  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  和  $g$  向量场方向的李导数, 综合式 (12) 和 (13), 则式 (11) 可写成一种逐点线性形式:

$$\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \beta(\mathbf{x}) \quad (14)$$

其中, 控制系数向量  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^2$  为

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = [L_g L_{\mathbf{F}} h(\mathbf{x}_u)]^T \quad (15)$$

相应的控制负载  $\beta(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}$  为

$$\beta(\mathbf{x}) = -L_{\mathbf{F}}^2 h(\mathbf{x}_u) + \varsigma(h(\mathbf{x}_u), L_{\mathbf{F}} h(\mathbf{x}_u), t) \quad (16)$$

在本文设计中, 我们选择:

$$\varsigma(h, \dot{h}, t) = -a_1 \dot{h} - a_2 h, \quad a_1, a_2 > 0 \quad (17)$$

根据劳思判据, 当  $a_1$  和  $a_2$  为任意正数时, 就得到了一个渐近稳定线性时不变欠驱动系统:

$$\ddot{h} + a_1 \dot{h} + a_2 h = 0 \quad (18)$$

相应的控制负载  $\beta(\mathbf{x})$  表达式为

$$\beta(\mathbf{x}) = -L_{\mathbf{F}}^2 h(\mathbf{x}_u) - a_1 L_{\mathbf{F}} h(\mathbf{x}_u) - a_2 h(\mathbf{x}_u) \quad (19)$$

所有满足式 (14) 的控制量  $\mathbf{u}$  均可实现对失控轴的稳定控制. 下面对  $\mathbf{u}$  的可实现性进行分析.

**定义 1.** 如果对于  $\forall \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^{4 \times 1}$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$  存在  $\mathbf{u}$  满足方程 (14), 则称方程 (18) 为可通过欠驱动系统 (3) 和 (4) 实现的. 如果对于  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}_{3 \times 1}$ ,  $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}_{3 \times 1}$  满足上述条件, 则称方程 (18) 为可通过欠驱动系统 (3) 和 (4) 全局实现的.

**性质 1.** 对于欠驱动线性系统 (18), 如果式 (15) 可以通过欠驱动航天器系统 (3) 和 (4) 全局实现, 那么

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{2 \times 1} \Leftrightarrow h(\mathbf{x}_u) = 0 \quad (20)$$

**性质 2**<sup>[7]</sup>. 定义控制系数向量  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{2 \times 1}$  的非奇异零驱动状态雅克比矩阵  $J_0(\mathbf{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\omega}_a} \Big|_{\boldsymbol{\omega}_a=0}$ , 则欠驱动线性系统 (18) 通过欠驱动航天器系统全局实现的充要条件为

$$\det [J_0(\mathbf{x})] \neq 0, \quad \forall \boldsymbol{\omega}_a \neq 0 \quad (21)$$

根据性质 2, 可以分析欠驱动航天器系统的全局可实现性, 关于反馈线性化转换函数  $h(\mathbf{x}_u)$  的控制系数  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  通过方程 (15) 可以得到:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \lambda q_3 - \frac{J_3 - J_2}{J_1} \omega_3 \\ \frac{1}{2} \lambda q_2 - \frac{J_3 - J_2}{J_1} \omega_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

伴随的非奇异零驱动状态雅克比矩阵的行列式为

$$\det[J_0(\mathbf{x})] = \det \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\omega}_a} \Big|_{\boldsymbol{\omega}_a = \mathbf{0}_{2 \times 1}} \right] = \det \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_3 - J_2}{J_1} \\ -\frac{J_3 - J_2}{J_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

根据性质 2, 很显然, 当  $(J_3 - J_2)/J_1 \neq 0$  时, 由式 (15) 定义的  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  满足式 (21), 所以方程 (18) 是可以通过欠驱动系统 (7)~(9) 全局实现的. 从式 (22) 还可以看出, 欠驱动轴的控制难度与  $(J_3 - J_2)/J_1$  的绝对值大小有关,  $(J_3 - J_2)/J_1$  的绝对值越大, 控制难度越低.

**注 1.** 分析可知只要不是转动惯量  $J_2 = J_3$  的轴对称欠驱动航天器系统, 都是全局可实现的, 文献 [1] 也得到了这个结论. 根据文献 [1] 的可控性条件分析, 航天器系统为  $J_2 = J_3$  的轴对称航天器时, 欠驱动轴  $x$  轴为不可控的, 因此需要假设欠驱动轴初始角速度为零, 只分析两个可驱动轴的航天器系统以简化控制器设计. 本文主要分析  $J_2 \neq J_3$  且欠驱动轴  $x$  轴的初始角速度不为零的航天器系统的控制器设计问题.

**定理 1.** 如果欠驱动动力学方程存在  $J_0(\mathbf{x})$ , 那么可以求得使欠驱动航天器子系统 (7) 达到全局渐近稳定的控制律的无限集为

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \rho(\mathbf{x})\mathbf{y} \quad (24)$$

其中,  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^2$  定义为

$$\bar{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\alpha}^+(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) \quad (25)$$

$\boldsymbol{\alpha}^+(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^2$  表示控制系数向量  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  的广义逆 (Moore-Penrose), 即

$$\boldsymbol{\alpha}^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})}{\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})}, & \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1}, & \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{cases} \quad (26)$$

$\rho(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$  为相应的控制系数向量  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  的空投影矩阵:

$$\rho(\mathbf{x}) = I_{2 \times 2} - \boldsymbol{\alpha}^+(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x}) \quad (27)$$

$\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$  为待确定的零控制向量.

**证明.** 由性质 1 和性质 2 可知, 满足条件 (21) 时, 欠驱动系统 (18) 可以通过欠驱动航天器系统全局实现, 同时意味着当满足逐点线性关系 (14) 时,  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}_{2 \times 1}$ . 将方程 (24) 两边均乘以  $\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x})$ , 得到:

$$\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x}) [\boldsymbol{\alpha}^+(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})\mathbf{y}] = \beta(\mathbf{x}) \quad (28)$$

满足方程 (14). 因此, 控制器  $\mathbf{u}$  通过零控制向量  $\mathbf{y}$  对方程 (14) 的所有解进行了线性参数化, 可实现对失控轴的稳定控制.  $\square$

控制律 (24) 包含两部分, 第一部分  $\bar{\mathbf{u}}$  称为特解, 作用于控制系数向量  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  的广义逆的范围空间中; 第二部分  $\rho(\mathbf{x})\mathbf{y}$  称为辅助解, 由控制系数零投影  $\rho(\mathbf{x})$  将零控制向量  $\mathbf{y}$  投影到控制系数  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  的零空间, 因此  $\mathbf{y}$  被称为零控制向量.  $\mathbf{y}$  的选择不会影响线性系统 (18) 的稳定性, 但是, 本质上影响欠驱动航天器系统 (3) 和 (4) 的全局稳定性. 因此, 下一节将讨论如何设计  $\mathbf{y}$ , 以保证整个欠驱动航天器姿态控制系统的稳定性.

### 3 欠驱动航天器系统全局稳定控制器设计

#### 3.1 动态尺度广义逆

由  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  的广义逆的定义 (26) 可知, 闭环系统的稳定性存在奇异, 为了解决这个问题, 本文引入动态尺度广义逆<sup>[7]</sup>, 以实现渐近稳定广义逆姿态控制. 定义  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  的动态尺度广义逆  $\boldsymbol{\alpha}_s^+(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^2$  为

$$\boldsymbol{\alpha}_s^+(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})}{\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \|\boldsymbol{\omega}_a\|_p^p} \quad (29)$$

其中,  $\|\boldsymbol{\omega}_a\|_p^p$  为  $\boldsymbol{\omega}_a$  的  $p$ -范数,  $p$  为正的动态尺度指标. 采用动态尺度广义逆可以使定理 1 中的控制律变得平滑. 当设计的零控制向量  $\mathbf{y}$  使系统达到稳定时, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\omega}_a\|_p^p \rightarrow 0$ , 此时  $\boldsymbol{\alpha}_s^+(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}^+(\mathbf{x})$ . 最终, 控制器  $\mathbf{u}_s$  设计为

$$\mathbf{u}_s = \boldsymbol{\alpha}_s^+(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x})\mathbf{y} \quad (30)$$

#### 3.2 零控制向量设计

将式 (30) 代入式 (9), 得到闭环欠驱动子系统:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} & f_{21}(\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \mathbf{x}_u + f_{22}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\alpha}_s^+(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x})\mathbf{y} \quad (31)$$

设计零控制向量  $\mathbf{y}$  为

$$\mathbf{y} = \rho^{-1}(\mathbf{x})[-k\mathbf{q}_a - d\boldsymbol{\omega}_a - f_{21}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}_u - f_{22}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}_a] \quad (32)$$

其中,  $k, d > 0$  为任意合适的非负常数.

由式 (27) 可知  $\rho(\mathbf{x})$  存在不满秩的情况, 即  $\rho^{-1}(\mathbf{x})$  不一定存在, 零控制向量  $\mathbf{y}$  有可能不存在. 这里引入摄动量  $\delta$ , 得到新的控制量系数摄动零投影矩阵为

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}, \delta) = I_{2 \times 2} - \varsigma(\delta)\boldsymbol{\alpha}^+(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x}) \quad (33)$$

其中,  $\varsigma(\delta)$  为任意连续的函数, 满足:

$$\varsigma(\delta) = 1 \Leftrightarrow \delta = 0 \quad (34)$$

只要满足式 (34) 的函数均可以, 这里选择较为简单的函数:

$$\varsigma(\delta) = \frac{1}{1 + \delta} \quad (35)$$

**性质 3.** 对于任意  $\delta \neq 0$ , 控制量系数摄动零投影矩阵  $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, \delta)$  均为满秩矩阵.

**证明.**  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  的奇异值为

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})) = \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})\|_2 \quad (36)$$

对  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  进行奇异值分解, 可得:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})\Sigma(\mathbf{x})N^T(\mathbf{x}) \quad (37)$$

其中,  $U(\mathbf{x}) = 1$ ,  $N(\mathbf{x})$  为标准正交矩阵.

$$\Sigma(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})\|_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

根据广义逆的定义式 (26), 可得:

$$\boldsymbol{\alpha}^+(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})\Sigma^+(\mathbf{x}) \quad (39)$$

其中,

$$\Sigma^+(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})\|_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

由式 (37) 和式 (39), 可得:

$$\boldsymbol{\alpha}^+(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})\Sigma^+(\mathbf{x})\Sigma(\mathbf{x})N^T(\mathbf{x}) \quad (41)$$

将式 (41) 代入式 (33) 中, 可得:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\mathbf{x}) &= I_{2 \times 2} - \varsigma(\delta)N(\mathbf{x})\Sigma^+(\mathbf{x})\Sigma(\mathbf{x})N^T(\mathbf{x}) = \\ &N(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 - \varsigma(\delta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} N^T(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (42)$$

所以, 当  $\delta \neq 0$  时,  $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, \delta)$  是满秩的, 结论得证.  $\square$

此时

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\rho}^{-1}(\mathbf{x})[-k\mathbf{q}_a - d\boldsymbol{\omega}_a - f_{21}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}_u - f_{22}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}_a] \quad (43)$$

经计算可知, 应用  $\tilde{\rho}(\mathbf{x})$  和  $\tilde{\mathbf{y}}$  代替控制器  $\mathbf{u}$  (式 (24)) 中的  $\rho(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{y}$ , 同样也满足方程 (14), 因此可以保证  $h(\mathbf{x}_u)$  渐近收敛至 0. 下面进行稳定性分析. 构造如下的 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2k}\boldsymbol{\omega}_a^T\boldsymbol{\omega}_a + (1 - q_0)^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \\ &\frac{1}{2k}\boldsymbol{\omega}_a^T\boldsymbol{\omega}_a + 2(1 - q_0) \end{aligned} \quad (44)$$

基于 Lyapunov 直接方法, 对  $V$  求时间导数, 得到:

$$\dot{V} = \frac{1}{k}\boldsymbol{\omega}_a^T\dot{\boldsymbol{\omega}}_a - 2\dot{q}_0 =$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k}\boldsymbol{\omega}_a^T[f_{21}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}_u + f_{22}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}_a + \\ &\boldsymbol{\alpha}_s^+(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) + \tilde{\rho}(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{y}}] + q_u\boldsymbol{\omega}_u + \mathbf{q}_a^T\boldsymbol{\omega}_a = \\ &\frac{1}{k}\boldsymbol{\omega}_a^T[\boldsymbol{\alpha}_s^+(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) - k\mathbf{q}_a - d\boldsymbol{\omega}_a] + \\ &q_u\boldsymbol{\omega}_u + \mathbf{q}_a^T\boldsymbol{\omega}_a \end{aligned} \quad (45)$$

在平衡点  $\boldsymbol{\omega}_a = \mathbf{0}_{2 \times 1}$  处, 将  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  进行泰勒展开, 得到:

$$\boldsymbol{\alpha}_l(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\omega}_a} \right|_{\boldsymbol{\omega}_a = \mathbf{0}_{2 \times 1}} \boldsymbol{\omega}_a = J_0(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega}_a \quad (46)$$

其中, 零驱动状态雅克比矩阵  $J_0(\mathbf{x})$  由式 (21) 定义. 于是, 动态尺度广义逆在  $\boldsymbol{\omega}_a = \mathbf{0}_{2 \times 1}$  附近线性化为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_s^+(\mathbf{x}) &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_l(\mathbf{x})}{\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \|\boldsymbol{\omega}_a\|_p^p} = \\ &\frac{J_0(\mathbf{x}_u)\boldsymbol{\omega}_a}{\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \|\boldsymbol{\omega}_a\|_p^p} \end{aligned} \quad (47)$$

定义  $\sigma$  为矩阵的  $J_0(\mathbf{x})$  的最大奇异值, 并将式 (10) 代入, 由此可将式 (45) 进一步化简为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1-d}{k}\boldsymbol{\omega}_a^T \frac{J_0(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})}{\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \|\boldsymbol{\omega}_a\|_p^p} \boldsymbol{\omega}_a + q_u\boldsymbol{\omega}_u \leq \\ &\frac{1-d}{k} \frac{\sigma|\beta(\mathbf{x})|}{\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \|\boldsymbol{\omega}_a\|_p^p} \|\boldsymbol{\omega}_a\|^2 + \\ &q_u h(\mathbf{x}_u) - \lambda q_u^2 \end{aligned} \quad (48)$$

由性质 1 和性质 2 可知, 对于期望动力学 (18), 当系统满足条件 (21), 采用控制律  $\mathbf{u}_s$  (30) 保证了  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(\mathbf{x}_u) = 0$ , 于是, 选择  $(1-d)\sigma < 0$ ,  $d > 0$ ,  $k > 0$ , 则  $\dot{V} \leq 0$ , 由 Barbalat 引理推论可知  $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\omega}_a = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}_a = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_u = 0$ . 由  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(\mathbf{x}_u) = 0$ , 可知  $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\omega}_u = 0$ . 欠驱动刚体航天器系统在全局意义下达到期望姿态. 综上, 得出如下结论:

**定理 2.** 考虑欠驱动航天器系统 (7)~(9), 如果函数  $h(\mathbf{x}_u)$  为全局二阶连续可导的函数, 并且满足条件 (10),  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  为控制系数, 定义为 (15),  $\beta(\mathbf{x})$  为关于  $h(\mathbf{x}_u)$  沿欠驱动刚体航天器系统 (5) 中  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  向量场方向李导数的控制负载, 定义为 (16), 设计时不变状态反馈控制器

$$\mathbf{u}_s = \boldsymbol{\alpha}_s^+(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) + \tilde{\rho}(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{y}} \quad (49)$$

其中,  $\boldsymbol{\alpha}_s^+(\mathbf{x})$  为  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  的动态尺度广义逆, 定义为式 (29), 摄动控制系数空投影  $\tilde{\rho}(\mathbf{x})$  和零控制向量  $\tilde{\mathbf{y}}$  分别由

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}, \delta) = I_{2 \times 2} - \varsigma(\delta)\boldsymbol{\alpha}^+(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x}) \quad (50)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\rho}^{-1}(\mathbf{x})[-k\mathbf{q}_a - d\boldsymbol{\omega}_a - f_{21}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}_u - f_{22}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}_a] \quad (51)$$

给出. 如果  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  的零驱动状态雅克比矩阵  $J_0(\mathbf{x})$  满足式 (21), 选择  $(1-d)\sigma < 0$ ,  $d > 0$ ,  $k > 0$ , 则可以使系统达到渐近稳定.

由于在实际中, 执行机构的力矩输出受限对于欠驱动航天器姿态机动过程有重要影响. 进一步考虑输出力矩受限问题, 假设输出力矩最大值为  $\pm u_{\max}$ , 则输出力矩  $\mathbf{u}_d$  表示为

$$\mathbf{u}_d = \begin{cases} \frac{\mathbf{u}_s}{\max(|u_{si}|)} u_{\max}, & \text{若 } \max(|u_{si}|) > u_{\max} \\ \mathbf{u}_s, & \text{否则, } i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (52)$$

引入向量  $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_d \in \mathbf{R}^3$ , 定义为

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{cases} \mathbf{u}_s - \frac{\mathbf{u}_s}{\max(|u_{si}|)} u_{\max}, & \text{若 } \max(|u_{si}|) > u_{\max} \\ \mathbf{0}, & \text{否则, } i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (53)$$

那么, 考虑输出力矩饱和时力矩  $\mathbf{u}_d$  为

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_s - \boldsymbol{\chi} \quad (54)$$

则式 (48) 变为

$$\dot{V} \leq \frac{1-d}{k} \frac{\sigma |\beta(\mathbf{x})|}{\boldsymbol{\alpha}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \|\boldsymbol{\omega}_a\|_p^p} \|\boldsymbol{\omega}_a\|^2 + q_u h(\mathbf{x}_u) - \lambda q_u^2 - \frac{1}{k} \boldsymbol{\omega}_a^T \boldsymbol{\chi} \quad (55)$$

当输出力矩小于力矩最大值时,  $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}$ , 根据上面分析, 系统达到渐近稳定; 当输出力矩大于最大值时, 假设  $\|\boldsymbol{\omega}\|$  是有界的, 那么通过力矩上限和角速度上限可以求得合适的  $d$  和  $k$ , 使  $\dot{V} \leq 0$ , 欠驱动航天器系统达到渐近稳定. 这里只进行了初步的定性分析, 在控制力矩受限情况下的欠驱动系统广义逆控制器的稳定性的具体分析目前还存在一些困难, 具体分析如何获得合适的  $d$  和  $k$  将是进一步研究的内容.

#### 4 数学仿真分析

本节在 Matlab/Simulink 环境下进行数值仿真实验, 验证前一节提出的控制算法的有效性.

仿真条件如下: 欠驱动航天器惯量矩阵为  $J = \text{diag}\{30, 25, 12\} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 姿态和角速度的初值分别为  $\tilde{\mathbf{q}}_e(0) = [0.159, 0.57, 0.57, 0.57]^T$ ,  $\boldsymbol{\omega}_e(0) = [0.15, -0.2, 0.1]^T$ .

控制参数选取为  $\lambda = 20$ ,  $a_1 = 1.4$ ,  $a_2 = 0.49$ ,  $k = 2.25$ ,  $d = 7.5$ ,  $p = 6$ . 采用式 (49) 的广义逆

欠驱动航天器控制器进行仿真实验, 仿真结果如图 1~3 所示. 进一步考虑执行机构出力矩受限的情况, 假设航天器采用飞轮作为执行机构, 最大输出力矩为  $u_{\max} = 0.3 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 采用式 (54) 的控制律进行仿真实验, 控制参数选取同上. 仿真结果如图 4~6 所示.

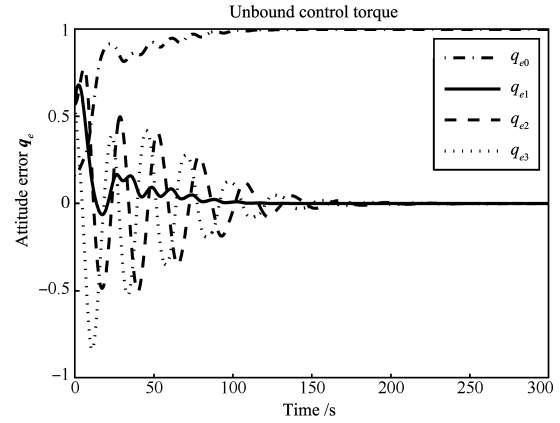


图 1 姿态四元数误差  $\mathbf{q}_e$  时间响应曲线

Fig. 1 Time history of attitude quaternion error  $\mathbf{q}_e$

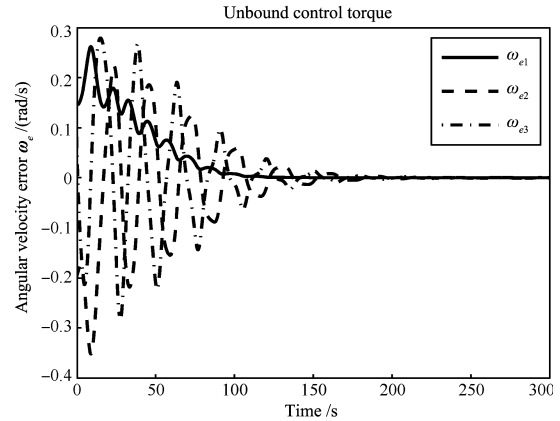


图 2 角速度误差  $\boldsymbol{\omega}_e$  时间响应曲线

Fig. 2 Time history of angular velocity error  $\boldsymbol{\omega}_e$

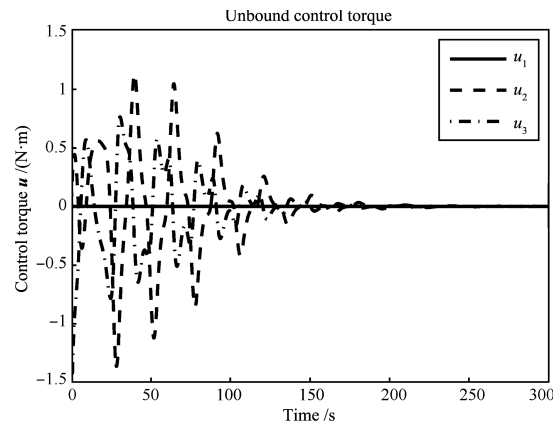
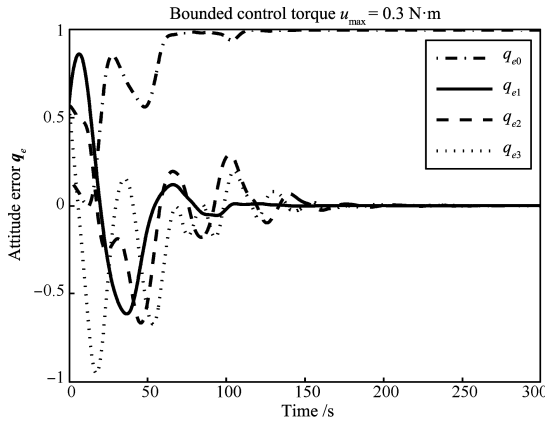
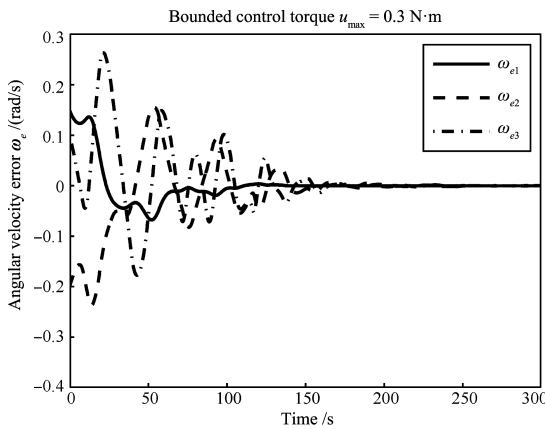
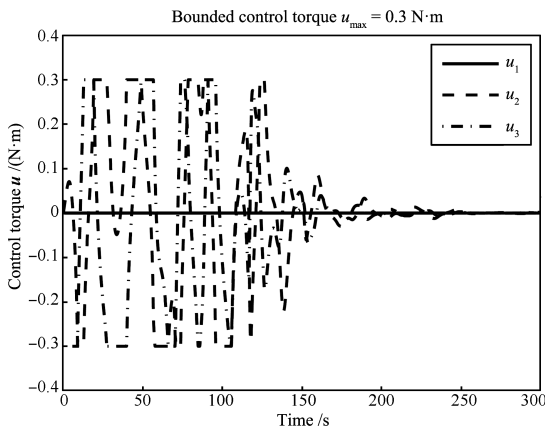


图 3 控制力矩  $\mathbf{u}$  时间响应曲线

Fig. 3 Time history of control torque  $\mathbf{u}$

图4 姿态四元数误差  $q_e$  时间响应曲线Fig. 4 Time history of attitude quaternion error  $q_e$ 图5 角速度误差  $\omega_e$  时间响应曲线Fig. 5 Time history of angular velocity error  $\omega_e$ 图6 控制力矩  $u$  时间响应曲线Fig. 6 Time history of control torque  $u$ 

从图1~3可以看出,在航天器  $x$  轴控制输出失效的情况下,本文提出的基于广义逆的非线性控制器通过对  $y$  和  $z$  轴的控制仍然可以保证闭环系统的稳定性,在大约200秒时完成了航天器姿态机动的任务.由于失控轴是通过对其他两轴的直接控制而达到间接控制的作用,所以在稳定过程中可控轴的

运动会呈现多次振荡的趋势,振荡程度不仅与控制器有关,还取决于转动惯量矩阵  $J$  对角线元素之间的关系.如以  $(J_3 - J_2)/J_1$  作为控制难易程度的指标,则  $(J_3 - J_2)/J_1$  的绝对值越小,控制难度越高.

从图4~6中可以看出,在输出力矩受限时,本文提出的控制算法仍然可以保证系统的稳定性,与控制力矩未受限的情形相比,稳定时间基本相同;并且,由于控制力矩幅值的减小使角速度的变化变慢,减少了振荡的程度,体现了该算法的优越性.但是这里所选取的飞轮最大输出力矩与实际情况相比较,由于本文研究的主要内容并未涉及控制力矩的具体实现方式,所以仿真结果仅作定性分析的参考,具体考虑执行机构的情况将在以后进一步研究.

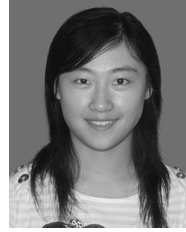
## 5 结论

本文针对三轴稳定欠驱动刚体航天器姿态机动控制问题,首先将三轴稳定欠驱动刚体航天器系统分解为三个子系统,应用微分几何理论将其中的欠驱动航天器子系统转化为逐点线性形式,采用了广义逆方法设计了欠驱动航天器子系统渐近稳定控制器.进一步设计了全局内部稳定零控制向量,实现了对另外两轴的控制.为了保证整个系统的可实现性,在此基础上引入了动态尺度广义逆和摄动零控制向量,并进行了稳定性分析,最终得到完整的广义逆欠驱动航天器姿态机动控制器,并进一步考虑了控制力矩输出受限的情况.最后进行了数值仿真,仿真结果表明,通过合理选择控制参数,该广义逆姿态控制器保证了整个系统的渐近稳定性,达到了控制要求,此控制方法便于实际工程设计参考,并具有一定的应用前景.

## References

- 1 Crouch P E. Spacecraft attitude control and stabilization: applications of geometric control theory to rigid body models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, **29**(4): 321-331
- 2 Byrnes C I, Isidori A. On the attitude stabilization of rigid spacecraft. *Automatica*, 1991, **27**(1): 87-95
- 3 Horri N M, Hodgart S. Attitude stabilization of an underactuated satellite using two wheels. In: Proceedings of the 2003 IEEE Aerospace Conference. Los Angeles: IEEE Press, 2003. 2629-2635
- 4 Tsiotras P, Luo J H. Control of underactuated spacecraft with bounded inputs. *Automatica*, 2000, **36**(8): 1153-1169
- 5 Tsiotras P, Doumtchenko V. Control of spacecraft subject to actuator failures: state-of-the-art and open problems. *Journal of the Astronautical Sciences*, 2000, **48**(2): 337-358
- 6 Coverstone-Carroll V. Detumbling and reorienting underactuated rigid spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1996, **19**(3): 708-710
- 7 Bajodah A H. Asymptotic perturbed feedback linearisation of underactuated Euler's dynamics. *International Journal of Control*, 2009, **82**(10): 1856-1869

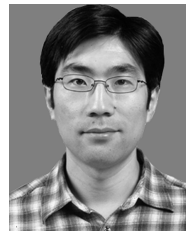
- 8 Casagrande D, Astolfi A, Parisini T. Global asymptotic stabilization of the attitude and the angular rates of an underactuated non-symmetric rigid body. *Automatica*, 2008, **44**(7): 1781–1789
- 9 Behal A, Dawson D, Zergeroglu E, Fang Y. Nonlinear tracking control of an underactuated spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, **25**(5): 979–985
- 10 Cheon Y J. Spin-axis stabilization of gyroless and underactuated rigid spacecraft using modified rodrigues parameters. In: Proceedings of the 2010 SICE Annual Conference. Taipei, China: IEEE, 2010. 492–496
- 11 Zhang Bing, Wu Hong-Xin. Asymptotical stabilization of angular velocity of a rigid spacecraft with two-dimensional complete configuration. *Acta Automatica Sinica*, 2000, **26**(4): 547–551  
(张兵, 吴宏鑫. 二维完整配置下刚性航天器姿态角速度的渐近镇定. 自动化学报, 2000, **26**(4): 547–551)
- 12 Li Shi-Hua, Tian Yu-Ping. Attitude stabilization of a rigid spacecraft with two controls. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(2): 168–174  
(李世华, 田玉平. 带两控制器刚体飞行器的姿态镇定. 自动化学报, 2003, **29**(2): 168–174)
- 13 Huang Xing-Hong, Xu Shi-Jie. Attitude control of an underactuated spacecraft based on piecewise decoupling method. *Journal of Astronautics*, 2007, **28**(3): 531–534, 556  
(黄兴宏, 徐世杰. 欠驱动航天器的分段解耦姿态控制. 宇航学报, 2007, **28**(3): 531–534, 556)
- 14 Zheng Min-Jie, Xu Shi-Jie. Backstepping control for attitude control system of an underactuated spacecraft. *Journal of Astronautics*, 2006, **27**(5): 947–951  
(郑敏捷, 徐世杰. 欠驱动航天器姿态控制系统的退步控制设计方法. 宇航学报, 2006, **27**(5): 947–951)
- 15 Jin Lei, Xu Shi-Jie. Attitude stabilization of an underactuated spacecraft with two reaction wheels. *Chinese Space Science and Technology*, 2009, **29**(2): 8–16  
(金磊, 徐世杰. 带有两个飞轮的欠驱动航天器姿态稳定控制研究. 中国空间科学技术, 2009, **29**(2): 8–16)
- 16 Wang Yi, Ge Xin-Sheng. Attitude control of an underactuated spacecraft base on center manifold theory. *Journal of Beijing Information Science and Technology University (Natural Science Edition)*, 2010, **25**(2): 37–40, 48  
(王艺, 戈新生. 基于中心流形理论的欠驱动航天器姿态控制. 北京信息科技大学学报(自然科学版), 2010, **25**(2): 37–40, 48)
- 17 Zheng Yan-Qin, Ge Xin-Sheng. Time-varying control method for attitude stabilization control system of underactuated rigid spacecraft. *Journal of System Simulation*, 2010, **22**(4): 951–956  
(郑彦琴, 戈新生. 欠驱动刚体航天器姿态稳定的时变控制方法. 系统仿真学报, 2010, **22**(4): 951–956)
- 18 Siciliano B, Khatib O. *Springer Handbook of Robotics*. New York: Springer, 2008
- 19 Peters J, Mistry M, Udwarda F, Nakanishi J, Schaaf S. A unifying framework for robot control with redundant DOFs. *Autonomous Robots*, 2008, **24**(1): 1–12
- 20 Boyer F, Alamir M. Further results on the controllability of a two-wheeled satellite. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, **30**(2): 611–619
- 21 Bajodah A H. Generalised dynamic inversion spacecraft control design methodologies. *IET Control Theory and Applications*, 2008, **3**(2): 239–251
- 22 Khalil H K. *Nonlinear Systems (Third edition)*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002. 505–540



**黄 静** 哈尔滨工业大学控制科学与工程系博士研究生. 2010 年获哈尔滨工业大学控制科学与工程系硕士学位. 主要研究方向为航天器姿态控制, 欠驱动航天器系统. 本文通信作者.

E-mail: huangjing04415@163.com

(**HUANG Jing** Ph. D. candidate in the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. She received her master degree from the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology in 2010. Her research interest covers spacecraft attitude control and underactuated spacecraft system. Corresponding author of this paper.)



**李传江** 哈尔滨工业大学控制科学与工程系副教授. 2006 年获哈尔滨工业大学航天学院控制科学与工程系博士学位. 主要研究方向为航天器姿态控制, 最优控制. E-mail: chuanjiangli@gmail.com

(**LI Chuan-Jiang** Associate professor in the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute

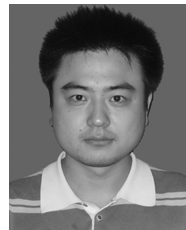
of Technology. He received his Ph. D. degree from the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology in 2006. His research interest covers spacecraft attitude control and optimal control.)



**马广富** 哈尔滨工业大学控制科学与工程系教授. 分别于 1983 年、1987 年、1993 年在哈尔滨工业大学自动控制, 控制理论及应用, 飞行器控制、制导与仿真专业获学士、硕士、博士学位. 主要研究方向为航天器姿态控制, 非线性控制理论. E-mail: magf@hit.edu.cn

(**MA Guang-Fu** Professor in the

Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. He received his bachelor degree in automatic control, his master degree in control theory and application, and his Ph. D. degree in control, guidance and simulation from Harbin Institute of Technology, in 1983, 1987 and 1993, respectively. His research interest covers spacecraft attitude control and nonlinear control theory.)



**刘 刚** 哈尔滨工业大学控制科学与工程系博士研究生. 2010 年获哈尔滨工业大学控制科学与工程系硕士学位. 主要研究方向为航天器动力学与控制.

E-mail: unicorn1114@163.com

(**LIU Gang** Ph. D. candidate in the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technol-

ogy. He received his master degree from the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology in 2010. His research interest covers spacecraft dynamics and control.)