

# 网络控制系统的最新研究综述

游科友<sup>1</sup> 谢立华<sup>2</sup>

**摘要** 随着传感、信号处理和通信技术的快速发展,关于网络控制系统 (Networked control systems, NCSs) 的研究引起了极大的关注. 本文拟回顾关于网络控制系统的最新研究进展. 为揭示反馈通信网络对控制系统的影响, 主要讨论了为满足不同控制目的所需的各种网络条件, 例如: 在时变信道的环境下, 保证线性系统可镇定性所需的最低编码率; 在间断观测的环境下, 保证卡尔曼滤波器稳定性的临界丢包条件; 在时不变连接图的环境下, 达到线性多自主体系统趋同性所需的网络拓扑结构; 在通信资源有限的情况下, 基于事件驱动的采样与控制方法等.

**关键词** 网络控制系统, 线性系统, 数据率, 丢包, 事件驱动控制, 趋同性

**引用格式** 游科友, 谢立华. 网络控制系统的最新研究综述. 自动化学报, 2013, 39(2): 101–118

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.00101

## Survey of Recent Progress in Networked Control Systems

YOU Ke-You<sup>1</sup> XIE Li-Hua<sup>2</sup>

**Abstract** With the rapid development of sensing, information processing, and communication technologies, the research in the emerging area of networked control systems (NCS) has attracted considerable attention in the research community. The purpose of this survey is to provide a review of state-of-the-art of such research. We particularly discuss various network conditions required for different control purposes, such as the minimum rate coding for stabilizability of linear systems in the presence of time-varying channel capacity, the critical packet loss rate for the stability of the Kalman filter with intermittent observations, network topology for coordination of networked multi-agent systems, as well as event-driven sampling for energy and communication efficiency. The common goal of discussion on these topics is to reveal the effect of the communication network on the operation of the networked systems.

**Key words** Networked control systems, linear systems, data rate, packet loss, event-based control, consensus

**Citation** Ke-You You, Li-Hua Xie. Survey of recent progress in networked control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(2): 101–118

网络控制系统 (Networked control systems, NCS) 是由通信网络组成闭环回路的空间分布式控制系统, 如图 1 所示. 通信网络是为了连接分布在不同空间位置上的组成单元, 如执行器、传感器和控制器. 这种特性使其易于设计大规模系统, 而且 NCS 相对于传统控制系统有较低的安装费用、易于系统维修与保养等优势. NCS 的重要应用包括传感器网络、工业控制网络、多自主体的协调控制和微机电系统 (Micro electro mechanical systems,

MEMS)<sup>[1]</sup>, 其共同目的是通过部署共享网络进行数据交换来控制一个或者多个回路系统. 从系统生物学的角度, 基因调控网络也可认为是一个 NCS. 它是由相互作用的基因和与其关联的蛋白质组成的网络系统.

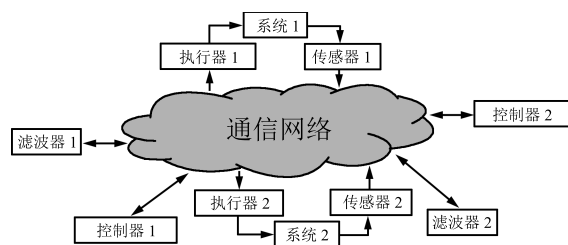


图 1 NCS 的结构

Fig. 1 General NCS architecture

控制和通信的相互作用使得在控制闭环回路中加入通信网络的 NCS 的分析和设计变得复杂. 基于通信网络的控制系统给通信、信号处理和控制等技术提出了新的挑战. 近年来, 许多文献对此进行了深入的研究, 并主要集中于诸如数字反馈信道所需最

收稿日期 2012-10-31 录用日期 2012-11-08  
Manuscript received October 31, 2012; accepted November 8, 2012

国家自然科学基金 (61120106011) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61120106011)

本文为黄琳院士约稿  
Recommended by Academician HUANG Lin  
1. 清华大学自动化系 北京 100084, 中国 2. 南洋理工大学电气与电子工程学院 新加坡 639798, 新加坡

1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China 2. EXQUISITUS, Centre for E-City, School of Electrical and Electronic Engineering, Nanyang Technological University, Singapore 639798, Singapore

该文的英文版同时发表在 *Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 2, pp. 101–118, 2013.

低通信数据率 (Communication data rate)、损失信道 (Lossy channel) 的丢包条件、线性多自主体系统趋同所需的网络拓扑结构、基于事件驱动的网络系统控制方法等问题。它们统称为基于网络的控制, 也被确定为控制领域的关键研究方向之一<sup>[2]</sup>。本综述分别介绍基于信息、网络、图论和采样理论的网络控制系统的研究方法。

## 1 综述概要

本文将主要讨论 NCS 领域中需要重点考虑的问题。

第 2 节将分析 NCS 所采用的网络的特性, 因为 NCS 的控制设计主要受网络类型的影响。

第 3 节将简短地回顾系统控制技术演变的历史。通过本节能够清晰地了解到控制系统中使用的传感与计算技术如何影响控制设计的发展, 如数字计算机的出现和使用促使研究者去探索数字控制技术。类似的, 网络在反馈回路中的应用不但促进了 NCS 的研究, 而且使得发展大规模分布式控制系统变得可行。

第 4 节将分别讨论在无噪和有噪反馈信道下镇定线性系统所需的最低通信数据率问题。其中, 对有噪信道的情形, 主要关注具有随机丢包的网络。我们将应用信息论的方法建立对应的数据率定理。

第 5 节将应用网络理论的方法建立在随机丢包情况下保证卡尔曼滤波器的稳定性的充要条件, 并且提出随机采样方法来处理丢包过程的相关性。

第 6 节将讨论线性多自主体系统的趋同控制。其目的是为揭示在常用的控制协议下, 自主体的动态特性和网络拓扑结构对多自主体系统趋同的影响。

第 7 节将简单介绍基于事件驱动的多自主体系统的趋同控制问题。该方法的优点在于能够减少信号传输次数, 和减低对通信网络的要求。

第 8 节总结了全文, 并提出了几个需要进一步研究的课题。

## 2 通信网络的局限性

NCS 的优点在于闭环回路中使用网络来达到远程控制的目的。但是, 网络的物理局限性也影响了 NCS 的控制性能。因此, 了解 NCS 中使用的网络是有必要的。

现有 NCS 的通信网络包括 DeviceNet<sup>[3]</sup>, Ethernet<sup>[4]</sup>, FireWire<sup>[5]</sup> 等。NCS 的性能很大程度上受网络特性如网络的有限数据传输率、延时、数据丢包等的影响。

任何的通信网络信道在单位时间内只能传输有限的信息。因此, 在网络控制中, 系统的组成单元之间在单位时间内也只能交换有限的信息。但使用

非常粗糙的反馈信息可能给 NCS 的稳定性及控制性能带来极大的影响。例如, 在微机电系统阵列的单芯片中, 可具有  $10^4 \sim 10^6$  个执行器或传感器, 应考虑如何通过无线链路如 Bluetooth<sup>TM</sup> 或 IEEE 802.11 (b) 来形成反馈回路和使用反馈网络协议如 CAN<sup>[1]</sup>。尽管单位时间内总的信息传输量 (如比特数) 可能较大, 但有效分配到每个回路的传输量只是很少的一部分<sup>[6]</sup>。

利用数字网络来传输信号, 需先对信号进行采样, 并编码成二进制序列, 再经网络传输至另一端, 最后在接收端对接收到的信号进行解码。时变的网络环境 (如拥塞) 和信道质量将导致采样和解码之间存在变化的时延, 如媒体存取延时 (网络接收信道的输入数据所耗费的时间)<sup>[7]</sup> 和传输延时 (数据在网络中传播的时间)。在反馈控制系统中, 延时是我们关心的主要问题之一。

此外, 外界环境的变化 (如随机出现大金属物体) 将不可避免地影响通信信道的传播质量, 甚至阻断该通信链路。因此, 数据在网络传输过程中可能存在丢失现象, 这在无线链路中更为常见, 特别是对于通信资源有限 (如能量有限) 的无线链路。由于较大的时延, 接收端收到的数据可能已过时, 有时这也被认为是数据丢失。本质上, 这说明了某些可靠的网络传输协议 (如 TCP) 并不适合 NCS, 因为过时的数据在实时控制中的作用通常是有限的。

通信网络在闭环控制回路引起的其他问题还包括传输错误、信息保密、网络安全等。这些因素将不可避免地降低 NCS 的控制性能, 甚至导致系统不稳定。

## 3 控制技术的简要发展史

早在上个世纪 50 年代, 由于数字计算机作为反馈控制的运行平台, 研究的重心从传统的反馈控制<sup>[8]</sup> 转移到数字控制技术<sup>[9]</sup>。这要求从连续时间/连续状态转变到离散时间/离散状态的控制模型。因而, 在数字控制中需要额外考虑的问题包括有效的采样机制、有限字长和相位滞后补偿。至今, 数字控制技术已相对成熟<sup>[10]</sup>。

然而, 使用空间分布式的结构来控制一个或更多的动态系统加快了新的控制技术的发展, 如化工工程和电力系统。过去, 这些系统的组成部件是通过点对点的有线连接联系在一起, 且系统的设计需要所有传感器的信息。这种集中式的点对点系统并不能满足如模块化、分散控制、综合诊断、快速和易维修、成本低等的需求<sup>[11]</sup>。随着传感和通信技术的发展, 我们可以在传感器内嵌入低成本的微处理器, 且传感器之间可以通过共享数字网络或无线信道来交换信息。具有这样架构的控制系统并不需要传统方

法所需的中央控制单元。

NCS 的研究主要受闭环回路中使用的网络类型所影响. 经过广泛的研究和发展, 一些为工业控制的网络协议已被采纳. 例如, 控制器区域网络 (Controller area network, CAN) 是德国罗伯特博世 (Robert Bosch) 公司在 1983 年为汽车行业所开发的<sup>[12]</sup>. 另一个工业网络 PROFIBUS 是在 1987 年由六家德国公司和五家德国的研究所共同开发<sup>[13]</sup>. 大约在同一时期, 许多其他的工业网络协议如现场总线 (Foundation fieldbus) 和设备网 (DeviceNet) 等相继出现. 这些工业网络可以通过减少布线 and 加强分布式智能的方法来提高 NCS 的效率、灵活性和可靠性. 从而降低安装费用、重复配置和维护时间等成本. 因此, 许多在欧洲制造的汽车通过集成 CAN 都引入了嵌入式系统.

近年来, 整合设备的发展趋势从有线通信到无线通信. 虽然无线网的使用增强了系统的灵活性, 但一旦采用了无线网络, 信道将变得更加不可预测, 其可靠性和通信时效性就成为一大问题. 因此就无法假定接收到的数据是准确的、及时的和完整的. 从有线到无线的通信信道的转变突出了重要的潜在应用优势, 但也引入了一些目前关于 NCS 研究的挑战性课题.

NCS 的另一个重要优势在于分布式控制. 这归功于低成本但功能较强大的数据处理器, 从而使传感器的数据能就近处理. 通常情况下, 分布式控制是利用局部的反馈信息来控制 and 协调多个子系统. 所以, 若通信网络不存在如延时和丢包等的局限性, 直观上分布式控制性能不如集中式控制. 但在实际网络控制中, 分布式控制比集中式控制更具有鲁棒性、扩展性 (Scalability)、安全性等优点. 多架无人机组 (Unmanned aerial vehicles, UAVs) 的编队就是一个典型的分布式控制系统. 在高速飞行中, 无人机之间的通信变得十分困难. 同时, 这也要求设计计算简便的分布式控制策略.

总而言之, NCS 的出现促使我们综合地考虑控制、通信和计算技术. 传统控制理论只考虑如何利用反馈信息来达到某特定的控制目标. 通常忽略通信对控制的影响. 而通信理论主要考虑如何把信息从一端可靠地传输到另一端, 但忽略传输信息的用途. 这导致在过去, 控制和通信的研究并没有太多的交叉点. NCS 的分析与设计必须综合利用控制和通信理论.

## 4 基于信息论的控制方法

### 4.1 基于无噪数字信道的线性系统的镇定问题

现有关于 NCS 的量化状态反馈控制的研究主

要集中在如图 2 所示的系统结构. 确切地说, 考虑  $n$  维离散时间系统:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (1)$$

其中,  $x_k \in \mathbf{R}^n$  是系统的状态,  $u_k \in \mathbf{R}^m$  是控制输入, 且  $(A, B)$  是可镇定的.

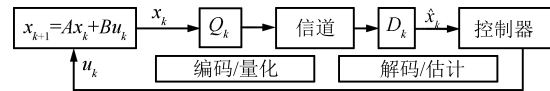


图 2 量化反馈控制系统

Fig. 2 Quantized feedback control

NCS 的显著特性是控制器和被控对象间的信息传递是由通信网络来实现. 由于通信网络单次只能传输有限比特数的信息, 所以连续取值的状态  $x_k$  在传输前必须离散化. 为此, 利用量化器  $Q_k: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{S}_k$  把状态  $x_k$  映射到可数集合  $\mathcal{S}_k$  中的某个元素  $s_k$ , 且量化器的输出再编码成可用于通信传输的二进制序列. 在信道的另一端, 解码器收到信道输出并恢复  $x_k$ . 基于状态估计  $\hat{x}_k$ , 控制器产生控制输入信号并作用到被控对象. 在整个过程中, 量化器把连续取值的状态变量离散化 (如四舍五入), 故存在量化误差, 即通常  $x_k - \hat{x}_k \neq 0$ . 很明显, 量化器是一非线性算子. 一个根本问题是如何刻画量化误差对系统的影响. 直观上, 若通信数据率越低, 即  $\mathcal{S}_k$  的元素个数越少, 量化误差越大; 反之亦然. 如果量化误差太大, 控制器了解到系统的信息越少, 以致于可能无法镇定该系统.

量化反馈控制的研究并不是一个新课题. 事实上, 自 1956 年来一直是重要的研究领域<sup>[14]</sup>. 在文献 [14] 中, Kalman 研究了量化对采样系统的影响. 早先研究量化反馈控制主要是受实现控制系统的数字电脑所影响. 特别地, Kalman<sup>[14]</sup> 指出如果一个稳定的控制输入信号经有限字长的量化, 则反馈系统会表现出极限环 (Limit cycles) 和混沌 (Chaos) 行为. 因有限字长的微处理器引起的量化分辨率相对较高, 即量化误差较小, 早期大部分关于数字控制的工作都集中在减少量化的影响<sup>[15-16]</sup>. 他们共同的方法是将量化误差建模为一加性随机噪声. 从而, 可以借用随机系统的研究方法.

然而, 上述观点在某些新的应用环境中被质疑. 如在无线传感器网络中, 为了节省能量, 通常只能允许传播非常粗糙的量化信息. 相应的工作可以追溯到文献 [17]. 该文作者将量化输出理解为观测到被量化对象的部分信息, 并证明了历史量化输出数据的重要性. 特别的, 利用量化反馈信息来镇定开环不稳定线性系统存在最低的通信数据率. 也就是说, 如果通信数据率低于一定的值, 则不能构造编码/解码

和控制器来镇定开环不稳定系统. 自那时起, 已发展了多种研究量化反馈的控制方法.

量化反馈的研究可基于量化器是否是静态或动态来划分. 静态量化器的量化层数 (Quantization level) 固定且无记忆, 而动态量化器具有记忆性, 但更复杂, 潜在的功能也更强大. 对数量化器是最有趣的静态量化器之一, 其量化层数以指数形式增长且相对量化误差一致有界. 事实上, 对数量化器是二次镇定意义下镇定不稳定线性系统的最粗糙量化器<sup>[18]</sup>, 且最粗糙的量化密度  $\rho$  可显式地由开环系统的不稳定极点来表示. 这里, 量化器  $Q(\cdot)$  的量化密度由下式给出:

$$\rho = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\#Q[\epsilon]}{-\ln \epsilon}$$

其中,  $\#Q[\epsilon]$  表示量化器  $Q(\cdot)$  落在区间  $[\epsilon, 1/\epsilon]$  上的量化层数.

文献 [19] 为研究对数量化器对量化反馈控制系统的影响, 提出了一种扇形界方法 (Sector bound method). 该方法把量化误差理解为在扇形界内的非线性时变扰动, 揭示了扇形界方法是研究二次镇定意义下基于量化反馈镇定不稳定系统的方法. 基于此, 鲁棒绝对稳定性 (Absolute stability) 理论<sup>[20]</sup> 等分析工具可用于研究量化的影响. 由于时不变性的特点, 无记忆性的量化器需要无限量化层数来保证量化反馈系统的渐近稳定性. 但在有限量化层数的情况下, 量化误差将无法消除, 则只能得到实用稳定性 (Practical stability)<sup>[21]</sup>, 即闭环系统的状态被控制在状态空间的某个有界子集内. 但可以利用动态缩放的方法使该子集变得任意小. 这促使我们去设计有限量化层数的动态量化器<sup>[22-25]</sup>.

Brockett 等<sup>[25]</sup> 研究线性系统基于有限量化层数的动态均匀量化器的可镇定性问题, 并指出存在对量化精度的动态调整策略和相应的量化状态反馈控制律来镇定开环不稳定的线性系统. 因量化层数由信道的通信数据率来决定, 这就提出了一个基本问题: 量化和控制器之间需要传输多大的信息量才能镇定开环不稳定的线性系统? 基于不同的问题背景, 多位研究者对此问题进行了研究<sup>[24, 26-30]</sup>. 确切地说, 记  $\mu_k$  为量化器  $Q_k$  的输出个数, 即  $\mu_k$  表示集合  $\mathcal{S}_k$  的势. 显然, 这需要  $\lceil \log_2 \mu_k \rceil$  比特长的存储单元来表示量化器的输出. 则平均数据率 (记为  $R$ ) 由下式给出:

$$R = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log_2 \mu_i \text{ 比特/样本}$$

数据率定理是说为达到量化反馈线性系统的渐近稳定性, 平均通信数据率必须严格大于一下界, 即

$$R > \sum_{i=1}^n \max\{0, \log_2 |\lambda_i|\} = H(A) \quad (2)$$

上式中,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  表示矩阵  $A$  的所有特征根. 如果  $R > H(A)$ , 则可以设计动态量化器及其相应的控制律使得闭环量化反馈系统渐近稳定. 注意, 下界  $H(A)$  只取决于开环系统的不稳定极点, 而不依赖于量化反馈信息的编码和解码方式, 也与控制策略无关.

很显然, 该性质与著名的香农信道编码定理<sup>[31]</sup> 十分相似. 即为保证可靠 (解码错误的概率任意小) 地发送一信息源, 信道的数据率必须严格大于信息的熵率 (Entropy rate)<sup>[32]</sup>. 在文献中,  $H(A)$  通常用来描述线性系统不确定性的增长速率, 并称为系统的拓扑熵 (Topological entropy)<sup>[33]</sup>. 而通信数据率刻画了利用反馈信息来减少系统不确定的速率. 为获得闭环系统的渐近稳定性, 不确定性减少速率必须严格大于其增长速率. 我们还注意到, 不稳定极点越大, 反馈回路就需要越大的数据率来保证闭环系统的渐近稳定性. 这与我们的直观认识是一致的.

上述结果是假设传输数据包的网络不存在信道不确定性. 然而, 经典通信理论中的有限信道容量定理不仅考虑了有限通信数据率的影响, 也包含信道的延时、丢包等不确定性因素. 许多相关的信息理论也是基于带噪声的信道模型. 所以对 NCS 的分析和设计应考虑带有噪声的数字信道. 对此问题的初步研究, 在有噪信道下, 保证线性系统可镇定性所需要最低通信数据率的问题吸引了研究者的广泛兴趣. 但该问题的研究结果并不如无噪信道的情形成熟, 因为不稳定状态变量之间的最优数据率分配与信道的不确定性相耦合, 而且也取决于不同意义下的可镇定性概念<sup>[34-41]</sup>. 最近对此问题的研究也取得了一些重要的进展.

## 4.2 基于有噪数字信道的线性系统的镇定问题

许多研究者将第 4.1 节的研究框架推广到有噪数字信道的模型. 因存在信道的不确定性, 解码器并不能准确接收到量化器的输出  $s_k$ . 这将进一步增大反馈信号的信息损失. 相对于无噪信道, 需要更大的数据率来弥补信道不确定性引起的信息损失. 我们感兴趣的是需要多少额外的数据率去弥补由信道不确定性引起的信息损失, 才能保证网络控制系统的可镇定性. 虽然这个问题在 2005 年由 Tatikonda 等<sup>[34]</sup> 开始研究, 但一般向量线性系统的情况至今仍未完全解决. 在文献 [34] 中, 作者声称如果信道的香农容量超过  $H(A)$ , 则对有随机外界干扰的线性系统可以几乎处处被控制在一个有界区域内<sup>[34]</sup>. 但文献 [40] 证明这一结果是错误的. 相反, 如果删除信道 (Erasure channel) 的删除概率不为零, 则对存在

一致下界的外部干扰的不稳定线性系统, 无论如何都不能利用量化反馈几乎处处被镇定. 研究者对几乎处处可镇定的概念进行了更深层次的探讨<sup>[41-43]</sup>.

然而, 对于基于有噪信道的线性系统的均方可镇定性, 结果则大相径庭. 这里, 我们讨论 Gilbert-Elliott 信道模型<sup>[44]</sup>, 即信道的数据丢包过程由时齐马尔科夫过程<sup>[45]</sup>描述. 确切地, 我们用二元取值过程  $\gamma_k$  来表示接收端是否收到  $k$  时刻的数据包. 若  $\gamma_k = 1$ , 则表示数据包成功发送到接收端, 而  $\gamma_k = 0$ , 表示存在数据丢包. 本文中的所有随机变量/向量都定义在统一的概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上.  $\Omega$  表示所有可能发生的事件集,  $\mathcal{F}$  是定义在事件集  $\Omega$  上的  $\sigma$ -域,  $\mathbb{P}$  是在  $\mathcal{F}$  的概率测度. 马尔科夫过程的转移概率矩阵为

$$(\mathbb{P}\{\gamma_{k+1} = j | \gamma_k = i\})_{i,j \in \mathbb{S}} = \begin{bmatrix} 1-q & q \\ p & 1-p \end{bmatrix} \quad (3)$$

上式中,  $\mathbb{S} = \{0, 1\}$  表示马尔科夫过程的状态集合. 为避免出现显而易见的情形, 假设失效率  $p$  和恢复率  $q$  严格大于 0 小于 1. 故马尔科夫过程是遍历的. 显然,  $p$  越小  $q$  越大意味着通信网络更可靠.

我们采用类 TCP 的网络协议<sup>[46]</sup>, 即存在反馈信道使得解码器能够发送 ACK 至编码器. 因而, 发送端可以了解控制器是否成功接收了在前一时刻发送的数据包.

**定义 1.** 如果闭环系统满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|x_k\|^2] = 0$$

则称网络控制系统是均方可镇定的. 其中,  $\mathbb{E}[\cdot]$  是基于概率测度  $\mathbb{P}$  的数学期望算子.

**定理 1**<sup>[37-39]</sup>. 如果  $\gamma_k$  是一独立同分布过程, 即  $p + q = 1$ , 则基于网络的线性标量系统 ( $A = \lambda$ ) 达到均方可镇定性的充要条件为

$$\mathbb{E} \left[ \frac{|\lambda|^2}{2^{2\gamma_k R}} \right] < 1 \quad (4)$$

不等式 (4) 具有如下直观的解释. 如果数据包在传输过程中丢失, 则控制器没有收到任何系统的信息. 解码器对系统状态的均方估计误差将以  $|\lambda|^2$  的速率增长. 如果数据包能够经信道成功发送, 解码器的均方估计误差至少可以降低  $2^{2R}$  倍, 其中  $R$  是信道每次传输的信息量 (即比特数). 如果在平均意义下, 均方估计误差的增长速率  $|\lambda|^2$  超过降低速率  $2^{2\gamma_k R}$ , 则通过该信道传输的信息不足以补偿由系统自身动态特性引起的不确定性增长, 故此量化反馈闭环系统不能达到均方稳定.

如果不存在丢包现象, 相应的  $\gamma_k = 1$ . 不等式

(4) 可简化为

$$R > \log_2 |\lambda|$$

这与著名的数据率定理一致. 令  $R \rightarrow \infty$ , 则推出  $p < |\lambda|^{-2}$ . 这与基于网络丢包模型的结果一致<sup>[47-50]</sup>.

然而, 将以上分析推广至一般向量线性系统, 则要求通信数据率最优地分配给对应不同增长率的状态变量. 为得到 NCS 均方可镇定性的必要条件, 由熵-功率不等式<sup>[31]</sup> 和式 (4) 可得:

$$\mathbb{E} \left[ \frac{|\det(A^u)|^{\frac{2}{n^u}}}{2^{2\gamma_k \frac{R}{n^u}}} \right] < 1 \quad (5)$$

其中,  $A^u \in \mathbf{R}^{n^u \times n^u}$  是  $A$  的不稳定部分. 因为对任何有界的控制输入,  $A$  的稳定部分对应的状态变量 (向量) 会自动均方收敛.

如果传输的信息量能够镇定  $A$  的整个不稳定部分对应的状态空间, 则很明显也能够镇定该空间的任何不变子空间. 受此启发, 也许可以推出更强的必要条件. 由于不稳定部分对应的状态子空间存在相互作用, 我们将其解耦成多个不稳定子系统. 不失一般性, 假设  $A = \text{diag}\{J_1, \dots, J_u, A_s\}$ , 其中  $A_s$  对应于  $A$  的稳定部分,  $J_i$  是对应于  $A$  的不稳定特征根  $\lambda_i$  的实基本 Jordan 块<sup>[51]</sup>. 例如, 若  $\lambda_i$  是实数, 那么

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

若  $\lambda_i = a_i + b_i i$  是复数, 即  $b_i \neq 0$ , 则令  $D(\lambda_i) = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix}$ , 有:

$$J_i = \begin{bmatrix} D(\lambda_i) & I & & \\ & D(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & D(\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (7)$$

对于任意子集  $S = \{u_1, \dots, u_s\} \subset \{1, \dots, u\}$ , 定义  $J^{(S)} = \text{diag}\{J_{u_1}, \dots, J_{u_s}\}$ , 可以得到相应的解耦子系统:

$$x_{k+1}^{(S)} = J^{(S)} x_k^{(S)} + B^{(S)} u_k^{(S)} \quad (8)$$

其中,  $x_k^{(S)}$  是对应于  $J^{(S)}$  的不稳定状态变量 (向量). 注意到, 如果  $x_k$  通过信道传输的信息能被镇定, 那

么  $x_k^{(S)}$  也能够利用相同的信息量被镇定. 令  $n^S = \dim(x_k^{(S)})$ , 则可得到如下更强的必要条件:

$$\mathbb{E} \left[ \frac{|\det(J^{(S)})|_{n^S}^2}{2^{2\gamma_k \frac{R}{n^S}}} \right] < 1, \quad \forall S \subset \{1, \dots, u\} \quad (9)$$

容易验证, 如果没有丢包, 即  $\gamma_k = 1$ , 则不等式 (9) 可简化为不等式 (2). 注意到, 在建立必要性条件的编码策略并没有考虑随机丢包的影响, 故可能不是充分的. 事实上, 可镇定系统的最优编码 (利用最低通信数据率) 策略, 应考虑丢包的影响. 直观上, “重要” 的状态变量可能需要重复传输来降低在传输过程中的丢包概率. 与无噪数字信道相比, 考虑丢包影响的最优编码的设计也是最困难的部分. 遗憾的是, 此问题仍待解决.

至于充分性, 设计适应丢包过程的向量量化器具有挑战性. 值得一提的是, 对给定的任意随机向量, 能否设计一个最优向量量化器使得均方量化误差最小还不得而知. 目前的方法是通过设计标量量化器<sup>[37, 39, 52]</sup> 来量化状态向量中的每一个不稳定变量. 由于此方法不考虑状态变量之间的相关性, 则不可避免地需要更高的数据率. 该方法对每一个不稳定状态变量分配足够的数据率, 并且将其动态变化过程视为一独立的标量系统.

很明显, 当丢包过程  $\gamma_k$  是一马尔科夫过程, 则存在时间上的相关性. 上文的方法将不再适用. 为克服此困难, 我们从另一个角度来理解具有丢包过程的网络控制问题. 具体来说, 如果  $k$  时刻存在数据包丢失, 这相当于在该时刻没有进行采样. 从这个角度, 我们可得到一随机采样系统. 记  $t_k$  为控制器接收到第  $k$  个数据包的时刻. 在数学上可表示为

$$\begin{aligned} t_1 &= \inf\{k | k \geq 1, \gamma_k = 1\} \\ t_2 &= \inf\{k | k > t_1, \gamma_k = 1\} \\ &\vdots \\ t_j &= \inf\{k | k > t_{j-1}, \gamma_k = 1\} \end{aligned} \quad (10)$$

容易验证, 第  $k$  个数据包接收的时间  $t_k$  是一随机停时. 由于存在数据丢包,  $t_k$  通常不等于实际的采样时间  $k$ . 不失一般性, 令  $\gamma_0 = 1$  和  $t_0 = 0$ . 定义逗留时间  $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ , 可得到如下随机时变系统:

$$x_{t_{k+1}} = A^{\tau_{k+1}} x_{t_k} + \tilde{B} \tilde{U}_{t_k} \quad (11)$$

其中,  $\tilde{B} = [B \ AB \ \dots \ A^{\tau_{k+1}-1} B]$ , 且  $\tilde{U}_k^T = [u_{t_{k+1}-1}^T \ \dots \ u_{t_k}^T]$ . 对以上随机时变系统的研究通常需要  $\tau_k$  的统计信息.

**引理 1**<sup>[53]</sup>. 逗留时间  $\tau_k$  是一独立同分布的随机

过程, 其概率分布函数为

$$\mathbb{P}\{\tau_1 = i\} = \begin{cases} 1 - p, & i = 1 \\ pq(1 - q)^{i-2}, & i > 1 \end{cases}$$

这个引理从某种意义上指出了如何处理具有时间相关性的马尔科夫丢包过程. 由于篇幅有限, 本文不加以论述.

**引理 2**<sup>[39]</sup>. 在马尔科夫丢包模型下, 基于网络的标量系统 ( $A = \lambda$ ) 的均方可镇定性的充要条件为

$$\mathbb{E} \left[ \frac{|\lambda|^{2\tau_k}}{2^{2R}} \right] < 1 \quad (12)$$

如果没有丢包现象, 即  $\tau_k = 1$ , 不等式 (12) 可简化为式 (2). 类似地, 通过令  $p + q = 1$ , 不难验证不等式 (12) 可简化为式 (4). 直观上, 上式表明数据率  $R$  应该足够大才能克服在数据丢包的那段时间间隔里, 系统状态变量的不确定性增长. 对于随机采样系统 (11), 控制器在每个采样时间点  $t_k$  总能接收到  $R$  比特的信息. 但是开环矩阵  $A^{\tau_k}$  是随机时变的. 对于原始的离散时间系统 (1), 由于存在数据丢包, 控制器收到的数据率是时变的. 同样, 推广到一般向量系统的难度也主要在于如何最优分配不稳定状态变量之间的数据率.

在不同的可镇定意义下, 基于有噪信道的线性系统可镇定性所需的最低数据率也不同. 例如, 基于删除信道的某些向量线性系统, 保证几乎处处可镇定的充要条件是信道的香农容量必须严格大于系统的拓扑熵, 即  $H(A)$ <sup>[34, 40–41]</sup>. 但在其他可镇定的意义下, 如矩可镇定性 (Moment stabilization), 该结论却不成立<sup>[36, 54]</sup>.

注意到, 上述关于量化器的设计只是分析了系统的可镇定性, 并没有考虑量化反馈系统的控制性能. 近年来, 基于有噪数字信道的网络, Como 等<sup>[55]</sup> 提出了两种实值信号在任何时间可靠传输的编码策略, 并刻画了编码策略及揭示了线性系统的收敛速率与计算复杂度的相互关系. 在文献 [56] 中, 通过量化新息过程, 可以设计在渐近最小均方估计误差意义下的最优量化器. 显然, 为达到系统的最优性能, 量化器与控制律需要综合设计. 由于量化过程的非线性, 这类问题通常具有挑战性. 这不仅因为量化器与控制器之间的相互影响, 也因在不同的控制性能指标下, 最优量化器–控制器可能完全不同. 例如, 在文献 [18–19] 中, 为得到单输入线性系统的二次可镇定性, 最粗糙的量化器是对数量化器. 同时, 对数量化器在最低数据率的意义下, 也是镇定线性系统的最优量化器<sup>[22]</sup>. 尽管对数量化器被用来分析 LQR 和  $H_\infty$  最优控制问题<sup>[19]</sup>, 通常它也不是最优的, 至少我们还不清楚其最优性. 最优量化反馈控制

的研究也是非常有意思且具有挑战性的问题<sup>[57-62]</sup>.

## 5 基于网络理论的控制方法

与上一节基于信息论的方法不同, 基于网络理论的控制/估计方法对时变信道的建模在文献中也得到研究. 在这种情况下, 信道的不确定性建模成一随机丢包过程. 数据包被看做单个整体, 再经过网络发送. 通常有两种典型的随机过程来对信道的丢包过程进行建模. 一种是独立同分布的二元取值过程<sup>[46, 50, 63-72]</sup>, 另一种是马尔科夫过程<sup>[47-48, 73-77]</sup>.

我们关心的是由网络信道不确定性引起的数据包如何影响系统的状态估计. 为研究此问题, 考虑随机离散线性系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $x_k \in \mathbf{R}^n$  和  $y_k \in \mathbf{R}^m$  分别表示系统的状态和量测.  $w_k \in \mathbf{R}^n$  和  $v_k \in \mathbf{R}^m$  是零均值的高斯过程, 其协方差矩阵分别为  $Q > 0$  和  $R > 0$ . 量测矩阵  $C$  是行满秩的, 即  $\text{rank}(C) = m \leq n$ . 系统的初始状态  $x_0$  是均值为  $\hat{x}_0$  和协方差矩阵为  $P_0 > 0$  的高斯随机向量. 进一步,  $w_k$ ,  $v_k$  和  $x_0$  是相互独立的.

系统的量测  $y_k$  经不可靠的通信信道传输到远程估计器, 如图 3 所示. 由于信道衰减或拥塞, 数据包在信道的传播过程中可能存在丢失现象. 类似地,  $\gamma_k$  表示估计器是否收到量测  $y_k$ . 估计器也知道  $\gamma_k$  的信息. 不考虑延时等其他不确定因素, 则在第  $k$  时刻, 估计器能获得以下信息:

$$z_k = \{\gamma_k y_k, \gamma_k\}$$

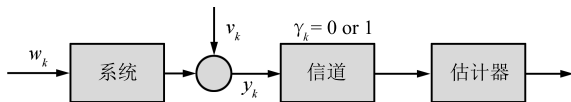


图 3 网络系统的估计

Fig. 3 Networked estimation configuration

基于上述网络系统, Sinopoli 等<sup>[50]</sup> 证明了卡尔曼滤波器仍是最小均方误差 (Minimum mean-square error, MMSE) 估计. 为得到最优估计, 只需要对标准卡尔曼滤波器做微小的改动, 即当量测信息丢失时, 滤波只有时间上的更新. 确切地说, 令  $\mathcal{Z}_k = \{z_1, \dots, z_k\}$  表示在  $k$  时刻估计器所收到的最大信息量. 分别记系统状态的 MMSE 估计与一步预测为  $\hat{x}_{k|k} = \mathbb{E}[x_k | \mathcal{Z}_k]$  和  $\hat{x}_{k+1|k} = \mathbb{E}[x_{k+1} | \mathcal{Z}_k]$ . 相应的估计和预测误差协方差矩阵定义为  $P_{k|k} = \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T | \mathcal{Z}_k]$  和  $P_{k+1|k} = \mathbb{E}[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})^T | \mathcal{Z}_k]$ .

根据卡尔曼滤波器的最优性<sup>[50]</sup>, 我们得到:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \gamma_k K_k (y_k - C \hat{x}_{k|k-1}) \quad (14)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - \gamma_k K_k C P_{k|k-1} \quad (15)$$

其中, 卡尔曼增益  $K_k = P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + R)^{-1}$ . 并且, 卡尔曼滤波在时间上的更新也是最优的, 即  $\hat{x}_{k+1|k} = A \hat{x}_{k|k}$ ,  $P_{k+1|k} = A P_{k|k} A^T + Q$  和  $\hat{x}_{0|-1} = \bar{x}_0$ ,  $P_{0|-1} = P_0$ .

由于网络的随机数据丢包, 预测误差的协方差矩阵也是随机的. 这跟标准卡尔曼滤波器不一样, 其预测误差协方差矩阵是确定性的. 令  $P_k = P_{k|k-1}$ , 则  $P_k$  的更新方程为

$$P_{k+1} = A P_k A^T + Q - \gamma_k A P_k C^T (C P_k C^T + R)^{-1} C P_k A^T \quad (16)$$

为揭示随机丢包对估计的影响, 对  $P_k$  的刻画得到大量的研究. 由于迭代方程 (16) 关于  $P_k$  是非线性的, 通常很难对  $P_k$  的变化情况进行分析. 在文献 [75] 中, 作者考虑  $\mathbb{P}(P_k \leq M)$  (即预测协方差矩阵  $P_k$  小于或等于正定矩阵  $M$  的概率) 来分析卡尔曼滤波的估计效果. 这与  $P_k$  的累积分布函数是相关的. 对于标量系统, 该概率值可以显式地给出, 但是对于向量系统, 只能给出它的上下界<sup>[75]</sup>. 这与文献 [77] 的思想类似. 对于独立同分布的丢包过程, 文献 [72] 引进了随机有界的性能指标. 值得一提的是, 基于不同的性能指标或问题背景, 随机数据包丢对估计效果的影响也大相径庭.

为考察在随机丢包情况下的卡尔曼滤波器的稳定性, 我们考虑  $P_k$  的平均有界性, 即:

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} \mathbb{E}[P_k] < \infty^1$$

其中, 数学期望是基于丢包过程  $\gamma_k$  而取的.

对于标准卡尔曼滤波器<sup>[78]</sup>, 即对所有的  $k \in \mathbf{N}$  有  $\gamma_k = 1$ . 我们知道  $(C, A)$  可检测就可保证协方差矩阵不发散. 由于  $\gamma_k$  在两个状态之间随机切换, 迭代式 (16) 变成了随机时变系统. 从而, 要建立关于  $\gamma_k$  的充要条件使得  $P_k$  达到平均稳定性是非常困难的. 当  $\gamma_k = 0$ , 迭代式 (16) 变成了李雅普诺夫迭代. 如果  $A$  是不稳定的, 则预测误差协方差矩阵存在增大的趋势. 但是, 当切换到  $\gamma_k = 1$  且  $(C, A)$  可检测, 预测误差协方差矩阵将可能变小. 为保证  $P_k$  的平均有界性, 可以推测  $\gamma_k$  在两状态之间应存在一个临界概率. 基于此, 有必要先考虑简单情形. 特别的, 考虑  $\gamma_k$  是独立同分布的过程, 且丢包概率为  $p = 1 - \mathbb{E}[\gamma_k]$ . 直观上, 丢包概率越大, 信息损失越严重, 则  $P_k$  发散的可能性更大. 是否存在临界丢包概率使

<sup>1</sup>存在正定矩阵  $\bar{P}$  使得对所有  $k \in \mathbf{N}$ , 有  $\mathbb{E}[P_k] \leq \bar{P}$ .

得只要丢包概率小于该值, 估计误差协方差矩阵即可达到平均有界性? 答案是肯定的.

**定理 3**<sup>[46, 50]</sup>. 若  $(A, Q^{1/2})$  可控,  $(C, A)$  可检测, 且  $A$  不稳定, 则存在一个临界值  $p_c \in (0, 1)$  满足下列性质:

1) 当  $p_c \leq p \leq 1$ ,  $\exists P_0 \geq 0$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} E[P_k] = \infty$ ;

2) 当  $0 \leq p < p_c \forall P_0 \geq 0$ , 使得  $\sup_{k \in \mathbf{N}} E[P_k] \leq M_{P_0}$ .

其中,  $M_{P_0} > 0$  取决于初始条件  $P_0 \geq 0$ , 且令

$$\bar{p} = \frac{1}{\max_i \{|\lambda_i|^2\}} \quad \text{和}$$

$$\underline{p} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \max\{1, |\lambda_i|^2\}}$$

则  $\underline{p} \leq p_c \leq \bar{p}$ . 特别地, 若  $C$  是可逆的, 则  $p_c = \bar{p}$ ; 若  $C$  的秩为 1, 则  $p_c = \underline{p}$ .

存在临界值  $p_c$  是因为  $E[P_k]$  关于  $p$  是单调递增的. 事实上, 若  $p = 1$ , 则  $\exists P_0 \geq 0$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} E[P_k] = \infty$ . 然而, 当  $p = 0$ , 对  $\forall P_0 \geq 0$ , 有  $\sup_{k \in \mathbf{N}} E[P_k] < \infty$ . 故不难理解存在满足上述性质的  $p_c$ . 由于  $P_{k+1} \geq (1 - \gamma_k)AP_kA^T + Q$ , 则  $p_c \leq \bar{p}$ . 为得到  $p_c$  的下界, 先找到  $E[P_k]$  的上界. 在等式 (16) 两端取期望且利用 Jensen 不等式<sup>[79]</sup>, 得到:

$$E[P_{k+1}] \leq AE[P_k]A^T + Q - (1-p)AE[P_k]C^T(CE[P_k]C^T + R)^{-1}CE[P_k]A^T$$

不难验证对所有的  $k \in \mathbf{N}$  有  $E[P_k] \leq M_k$ . 其中,  $M_k$  可通过下面修正的 Riccati 迭代给出:

$$M_{k+1} = AM_kA^T + Q - (1-p)AM_kC^T(CM_kC^T + R)^{-1}CM_kA^T$$

且初始条件  $M_0 = P_0$ .

与式 (16) 相比, 上述迭代是确定性的. 则可以利用线性矩阵不等式中的方法来分析式 (17) 的解<sup>[80]</sup>. 基于此, 可以建立不等式  $\underline{p} \leq p_c$ .

由于  $p_c$  描述了保证卡尔曼滤波器稳定性所允许的最大丢包概率, 大量的研究工作集中在刻画  $p_c$  的具体值<sup>[50, 67-68, 81]</sup>. 例如, 若  $C$  对应可观子空间的那部分是满秩的<sup>[67]</sup> 或者系统  $(A, C)$  是非退化的 (Non-degenerate)<sup>[68]</sup>, 则  $p_c = \bar{p}$ . 并以此猜测对所有  $(A, C)$  可检测的系统是否成立  $p_c = \bar{p}$ ? 事实上, 有具体的例子说明  $\underline{p} < p_c < \bar{p}$ <sup>[47]</sup>. 则进一步的问题是如何具体刻画  $p_c$ ? 通过考察上述的方法, 我们发现其保守性是由于  $E[P_k]$  的两个不同上下界. 当然, 该方法表明  $p_c$  的刻画可能依赖系统的结构, 如观测矩阵  $C$  的结构.

为了充分利用系统的结构, 需要发展新的研究方法. 由于分析  $P_k$  的平均有界性的主要难点在于迭代式 (16) 是非线性的, 新方法应避免直接对此迭代分析. 更进一步, 上述研究方法仅对独立同分布的丢包过程  $\gamma_k$  成立. 注意到  $P_k$  是 MMSE 估计的协方差矩阵. 在系统 (13) 的噪声是高斯的假设下, MMSE 估计与最小二乘 (LS) 估计是等价的. 事实上, 利用 LS 的估计方法, 可以得到保证在丢包情况下的卡尔曼滤波器的稳定性的充要网络丢包条件.

考虑马尔科夫丢包模型. 特别地,  $\gamma_k$  是具有转移概率矩阵 (3) 的马尔科夫过程. 类似地, 我们也利用引理 1 来处理马尔科夫过程的相关性. 基于随机停时  $t_k$  的定义, 很明显估计器收到量测  $y_{t_1}, \dots, y_{t_k}$ . 对系统 (13) 进行迭代, 可以得到下列方程组<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} y_{t_k} &= Cx_{t_k} + \tilde{v}_{t_k} \\ y_{t_{k-1}} &= CA^{t_{k-1}-t_k}x_{t_k} + \tilde{v}_{t_{k-1}} \\ &\vdots \\ y_{t_1} &= CA^{t_1-t_k}x_{t_k} + \tilde{v}_{t_1} \end{aligned}$$

其中,  $\tilde{v}_{t_i}$  是关于  $v_{t_i}$  和  $w_{t_i}, w_{t_i+1}, \dots, w_{t_k}$  的线性组合. 令  $Y_{t_k} = [y_{t_k}, \dots, y_{t_1}]$ ,  $V_{t_k} = [\tilde{v}_{t_k}, \dots, \tilde{v}_{t_1}]$  和

$$M_{t_k} = \begin{bmatrix} C \\ CA^{t_{k-1}-t_k} \\ \vdots \\ CA^{t_0-t_k} \end{bmatrix} \quad (17)$$

则上述方程组可表示为:  $Y_{t_k} = M_{t_k}x_{t_k} + V_{t_k}$ . 从而可以利用 LS 的方法来估计  $x_{t_k}$ . 特别地,  $x_{t_k}$  的 LS 估计是  $\hat{x}_{t_k} = (M_{t_k}^T M_{t_k})^{-1} M_{t_k}^T Y_{t_k}$ .

由于 LS 估计和 MMSE 估计是等价的, 那么

$$P_{t_k|t_k} = E[(\hat{x}_{t_k} - x_{t_k})(\hat{x}_{t_k} - x_{t_k})^T | \mathcal{Z}_{t_k}] = (M_{t_k}^T M_{t_k})^{-1} M_{t_k}^T \text{cov}(V_{t_k}) M_{t_k} (M_{t_k}^T M_{t_k})^{-1}$$

其中,  $\text{cov}(V_{t_k})$  表示  $V_{t_k}$  的协方差矩阵. 可以验证, 存在正值  $\alpha$  使得  $\text{cov}(V_{t_k}) \geq \alpha I$ . 另一方面, 若  $A$  的所有特征根都落在单位圆外, 存在正值  $\beta$  使得对任意的  $k \geq 0$  有  $\text{cov}(V_{t_k}) \leq \beta I$ <sup>[82]</sup>. 利用坐标变换对  $A$  的稳定和不稳定部分进行分解, 则对应于  $A$  的稳定部分的状态变量会自动达到均方有界, 故  $A$  的稳定部分并不影响卡尔曼滤波器的有界性条件. 对于  $A$  的临界稳定部分, 即落在单位圆上的特征根, 我们对其施加微小扰动使其变得严格不稳定<sup>[82]</sup>. 也就是说, 下述假设并不失一般性.

**假设 1.**  $A$  的所有特征根都落在单位圆外.

<sup>2</sup>假定  $A$  是可逆的.



在上述假设下, 有:

$$\alpha(M_{t_k}^T M_{t_k})^{-1} \leq P_{t_k|t_k} \leq \beta(M_{t_k}^T M_{t_k})^{-1} \quad (18)$$

则  $P_{t_k|t_k}$  有界性等价于  $(M_{t_k}^T M_{t_k})^{-1}$  的有界性. 由于我们更关心  $P_k$  的有界性, 因此需要验证它是否与  $P_{t_k|t_k}$  的有界性等价. 结论是肯定的<sup>[47]</sup>. 故只需要考虑  $(M_{t_k}^T M_{t_k})^{-1}$  的平均有界性. 令  $\widetilde{M}_{t_k} = M_{t_k} A^{-t_k}$ , 那么  $M_{t_k}^T \widetilde{M}_{t_k}$  正是随机时变系统的可观测矩阵<sup>[83]</sup>, 则其有界性条件由系统的可观性决定. 例如, 若  $C$  是非奇异的, 则

$$M_{t_k}^T M_{t_k} \geq ((A^{t_0-t_k})^T C^T C A^{t_0-t_k})^{-1} \geq \lambda_m(C^T C)(A^{-t_k})^T A^{-t_k}$$

其中,  $\lambda_m(C^T C) > 0$  表示  $C^T C$  的最小特征根. 记  $\lambda_M$  为矩阵  $A$  的谱半径, 若  $|\lambda_M|^2(1-q) < 1$ , 则由引理 1 知,

$$E[(M_{t_k}^T M_{t_k})^{-1}] \leq \lambda_m(C^T C)^{-1} E[(A^{t_k})^T A^{t_k}] < \infty$$

类似地, 可以证明不等式  $|\lambda_M|^2(1-q) < 1$  也是必要的. 注意到若  $p+q=1$ , 则马尔科夫过程简化为独立同分布过程. 其临界丢包概率为  $p_c = 1/|\lambda_M|^2$ , 这与定理 3 是吻合的.

对于一般的观测矩阵  $C$ , 如  $\text{rank}(C) = m < n$ , 则分析丢包情况下的卡尔曼滤波器的有界性十分复杂. 我们用二阶系统来阐释这个问题. 很明显, 二阶系统的开环矩阵  $A$  有如下几种情形:

$$1) A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix};$$

$$2) A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\} \text{ 且 } |\lambda_1| \neq |\lambda_2|;$$

3)  $A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$  且  $\lambda_1 = \lambda_2 \exp(2\pi\psi i)$ ,  $\psi$  是无理数,  $i^2 = -1$ .

4)  $A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$  且  $\lambda_1 = \lambda_2 \exp(2\pi\psi i)$ , 有理数  $\psi = r/d$ ,  $d > r \geq 1$  是互不可约的正整数;

$$5) A = \text{diag}\{\lambda, \lambda\}.$$

以上是为了探究随机量测丢包如何影响系统的可观性. 如果  $(C, A)$  是可观的, 则在满足条件 1)~3) 的情况下, 对于所有  $k \in \mathbf{N}$ ,  $(C, A^k)$  也可观. 这个性质在条件 4) 下并不满足. 事实上, 对所有  $k \geq 1$ , 有  $(C, A^{kd})$  不可观. 这意味着量测  $\{y_{kd}\}_{k \in \mathbf{N}}$  仅仅可以观测系统的一个模态 (Mode). 若要观测到系统的所有模态, 必须依靠来自集合  $\{y_{kd}\}_{k \in \mathbf{N}}$  以外的测量值. 对于满足条件 1)~3) 的系统, 则不存在此问题. 这直观上暗含了在情况 4) 下, 估计误差协方差矩阵的有界性条件要强于情况 1)~3). 需要注意的是在情况 5) 下,  $(C, A)$  并不可观. 则若  $|\lambda| \geq 1$ , 标准卡尔曼滤波器也将发散<sup>[78]</sup>.

**定理 4**<sup>[47]</sup>. 若二阶网络系统 (13) 满足假设 1,

且  $(C, A)$  是可观测的, 丢包过程是马尔科夫过程, 其转移概率矩阵为 (3), 那么,

1) 若  $A$  满足条件 4), 则  $\sup_{k \in \mathbf{N}} E[P_k] < \infty$  的充要条件为  $(1 + \frac{pq}{(1-q)^2})(|\lambda_M|^2(1-q))^d < 1$ ;

2) 否则,  $\sup_{k \in \mathbf{N}} E[P_k] < \infty$  的充要条件为  $|\lambda_M|^2(1-q) < 1$ .

对于独立同分布的随机丢包模型, 即  $p+q=1$ , 定理 4 中 1) 的充要条件简化为  $p < |\lambda_M|^{-2d/(d-1)}$ , 这暗含了临界丢包率为  $p_c = |\lambda_M|^{-2d/(d-1)}$ . 所以, 定理 3 给出的界不是紧的.

与定理 3 比较, LS 方法充分考虑了系统的结构, 包括观测矩阵  $C$  的结构和  $A$  的每个特征值的存在形式. 我们还从二阶系统中了解到保证  $P_k$  平均有界性的充要网络条件很大程度上取决于系统的结构. 这也阐明了 LS 方法扩充到高阶情形的难点<sup>[47, 77, 84-85]</sup>.

## 6 基于图论的控制方法

网络控制的另一类问题是基于网络进行信息交换的多自主体系统的协同控制. 多自主体系统包含大量由通信链路连接的节点或自主体, 用来了解多个个体之间的相互作用. 在自然界、工程应用和社会环境中, 广泛存在这样的系统<sup>[86]</sup>. 如基因之间的相互交流、由人际关系建立起来的社会网络. 由于其包括编队控制<sup>[87-88]</sup>、分布式传感器网络<sup>[89-90]</sup>、集群控制<sup>[91-92]</sup>、分布式计算<sup>[93]</sup> 和同步耦合混沌振荡<sup>[94-96]</sup> 在内的许多领域的广泛应用, 多自主体系统的分布式控制吸引了多学科领域的研究者的广泛兴趣. 它们共同的特性是, 每个个体缺乏对整个系统全局的了解, 只能利用其邻近的信息来完成特定的全局目标.

多自主体系统的重要问题之一是研究单个自主体的动态特性和连接自主体的拓扑结构如何影响系统的行为. 最近, NCS 的出现促进了多自主体系统的研究. 其中, 关注的问题之一是多自主体系统的趋同控制. 这要求单个自主体通过局部通信来设计控制策略, 使得所有网络中的自主体达到趋同. 为实现此目标, 关键是设计出基于网络拓扑结构的控制协议, 使得随着时间的变化, 所有自主体的状态渐近达到趋同.

关于多自主体系统的分布式计算起始于 Borkar 等在 1982 年的工作<sup>[97]</sup>. 即多个自主体对同一随机向量进行估计. 每个自主体一旦收到新的观测值或是其他自主体的估计, 则更新其自身的估计. 通过该协议, 所有自主体的估计渐近达到趋同. 对于分布式决策的异步渐近趋同性问题在文献 [98-99] 中有所研究. 事实上, 在计算机科学领域, 并行计算的趋同性问题也得到广泛的研究<sup>[98-102]</sup>.

上述前期工作给多自主体系统中的分布式控制和群体行为的研究奠定了基础. 在文献 [103] 中, Vicsek 等通过仿真表明对于离散时间模型的  $n$  个自治自主体, 每个自主体利用自身及其“邻居”的平均移动方向来更新其下一步的移动方向. 在没有中央处理单元的情况下, 所有自主体的移动方向最终趋同. 该工作引起了系统与控制领域的研究者的兴趣. 在文献 [104] 中, Jadbabaie 等对此现象给出了理论上的解释, 并对其他几种类似的模型给出了收敛性证明. 该工作促使研究者去建立多自主体系统达到趋同的连接网络条件<sup>[105–106]</sup>. 例如, 为使得多自主体系统渐近收敛到它们初始值的平均, 时不变的通信连接图必须至少包含一生成树 (Spanning tree). 更进一步, 趋同的速度取决于图的拉普拉斯矩阵的最小非零特征根<sup>[105, 107]</sup>. 对于时变拓扑的情况, 在足够多的时间段里面, 通信连接图应至少包含一生成树<sup>[104, 108–109]</sup>.

趋同性问题的研究大体上可以根据自主体动态方程是连续或离散分为两类. 若自主体的动态方程是由一阶积分器给出, 则对于连续时间系统的趋同研究是基于图的拉普拉斯矩阵理论, 而对于离散时间的情况是基于 Perron 矩阵理论. 研究一阶积分器自主体系统的重要工作包括连续时间趋同性<sup>[87, 107–108, 110–111]</sup> 和离散时间的趋同性<sup>[104, 108–109, 112]</sup>. 而文献 [113–116] 研究高阶积分器的自主体动态方程的趋同性.

考虑由  $N$  个自主体组成的离散时间多自主体系统. 每个自主体的动态方程为

$$x_{k+1}^i = x_k^i + h \cdot u_k^i \quad (19)$$

其中,  $x_k^i \in \mathbf{R}$  为第  $i$  个自主体在  $k$  时刻的状态,  $h$  为采样步长. 分布式的控制输入  $u_k^i$  为

$$u_k^i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_k^j - x_k^i) \quad (20)$$

其中,  $\mathcal{N}_i$  表示有信息传递给第  $i$  个自主体的自主体集合, 也称之为第  $i$  个自主体的邻居. 如果  $j \in \mathcal{N}_i$ , 则  $a_{ij} > 0$ , 否则  $a_{ij} = 0$ . 趋同控制的目的是使所有网络中的自主体状态达到渐近趋同, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k^i - x_k^j\| = 0 \quad (21)$$

更进一步, 若要求  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = 1/N \cdot \sum_{i=1}^N x_k^i$ , 则被称为平均趋同. 我们借用图的理论<sup>[117]</sup> 来刻画自主体之间的相互作用. 特别地, 定义图  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ , 其中  $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$  代表所有自主体组成的集合, 而  $\mathcal{E}$  表示自主体之间的相互作用. 如果从自主体  $j$  可以发送信息到自主体  $i$ , 则  $(j, i) \in \mathcal{E}$ . 这里, 我们只考虑简单图, 则  $(i, i) \notin \mathcal{E}$ . 自主体  $i$  的邻居定

义为  $\mathcal{N}_i = \{j | (j, i) \in \mathcal{E}\}$ . 令自主体之间的加权邻接矩阵为  $\mathcal{A} = (a_{ij})$ , 相应的度数矩阵定义为  $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_N\}$ , 其中  $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ . 拉普拉斯矩阵为  $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$ . 记  $x_k = [(x_k^1)^T, \dots, (x_k^N)^T]^T$ , 则有:

$$x_{k+1} = (I - h\mathcal{L})x_k \quad (22)$$

步长  $h \in (0, (\max_i d_i)^{-1})$ . 所以, 趋同问题可以转化为对 Perron 矩阵  $\mathcal{P} = I - h\mathcal{L}$  的研究. 故著名的 Perron-Frobenius 理论<sup>[52]</sup> 至关重要<sup>[105]</sup>. 文献 [108] 表明如果  $\mathcal{G}$  包含一生成树, 即存在某自主体使得从该自主体到任何其他自主体都可找到一条通信路径, 则  $\mathcal{P}$  有代数重数为 1 的特征根  $\lambda = 1$ , 而其他所有特征值都严格落在单位圆内, 且存在一个非负特征向量  $v$  使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}^k = \mathbf{1}v^T$ , 且  $v^T \mathbf{1} = 1$ ,  $\mathcal{P}^T v = v$ . 这意味着  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}^k x_0 = \mathbf{1}(v^T x_0)$ . 对于时变连接拓扑图, 乘积矩阵  $\prod_{i=1}^k \mathcal{P}_i$  可以用遍历性质<sup>[104]</sup> 来分析. 总之, 一阶积分器的离散时间多自主体系统的趋同问题, 可以方便地转化为对 Perron 矩阵的分析.

很自然的延伸是考虑更一般的线性向量动态方程的自主体, 如:

$$x_{k+1}^i = Ax_k^i + Bu_k^i \quad (23)$$

基于常用的控制协议

$$u_k^i = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_k^j - x_k^i) \quad (24)$$

其中,  $x_k^i \in \mathbf{R}^n$ , 且所有自主体都利用统一的增益矩阵  $K$ . 直观上, 此控制协议的目的是使各自主体朝某共同的目标靠近. 但不稳定的开环矩阵  $A$  将使自主体逐渐分离. 要达到趋同性则需综合考虑前两者的作用强度. 该问题在近期的文献 [118–127] 中引起了越来越多的关注.

把控制协议 (24) 代入动态方程 (23), 得到:

$$x_{k+1} = (I \otimes A - \mathcal{L} \otimes BK)x_k \quad (25)$$

其中,  $\otimes$  表示 Kronecker 乘积<sup>[51]</sup>. 显然, 与一阶积分器的自主体情形不同, 此时 Perron 矩阵理论将不再适用.

在本节中, 我们提出综合利用系统控制理论和图论的控制设计方法. 镇定系统是设计增益矩阵使闭环系统的状态渐近收敛于零, 而趋同问题是设计增益矩阵使所有自主体的状态渐近收敛到一维流形. 而对于一阶积分器的自主体系统, 所有自主体的状态则收敛到固定点  $v^T x_0$ .

很明显, 有  $\mathcal{L}\mathbf{1} = 0$ , 则存在相应的左特征向量  $u \in \mathbf{R}^N$  满足  $u^T \mathcal{L} = 0$  和  $u^T \mathbf{1} = 1$ . 在式 (25) 两边

乘以  $u^T \otimes I$ , 并令  $\bar{x}_k = (u^T \otimes I)x_k$ , 则有:

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k \quad (26)$$

故如果  $A$  是不稳定的, 每个自主体的状态将不再收敛于一个固定点. 不难验证, 多自主体系统达到趋同当且仅当  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k^i - \bar{x}_k\| = 0, \forall i \in \mathcal{V}$ . 定义偏移向量  $\delta_k^i = x_k^i - \bar{x}_k$ , 则:

$$\delta_{k+1}^i = A\delta_k^i + BK \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\delta_k^j - \delta_k^i) \quad (27)$$

令  $\delta_k = [\delta_k^1, \dots, \delta_k^N]^T$ , 类似地得到:

$$\delta_{k+1} = (I \otimes A - \mathcal{L} \otimes BK)\delta_k \quad (28)$$

由于  $(u^T \otimes I)\delta_k = (u^T \otimes I)x_k - (u^T \otimes I)(\mathbf{1} \otimes I)\bar{x}_k = 0$ , 所以为分析方程 (28) 的渐近稳定性, 先将其稳定的状态变量 (向量) 解耦出来. 特别地, 存在变换矩阵  $T \in \mathbf{R}^{N \times N}$  使得  $T\mathcal{L}T^{-1} = \text{diag}\{J_1(\mu_1), J_2(\mu_2), \dots, J_s(\mu_s)\}$ , 则系统 (28) 可解耦为几个子系统. 其中,  $J_i(\mu_i)$  是由  $\mathcal{L}$  的特征根  $\mu_i$  对应的 Jordan 矩阵块组成. 令  $\tilde{\delta}_k = (T \otimes I)\delta_k$ , 再根据  $T\mathcal{L}T^{-1}$  的结构, 可以将其划分为  $\tilde{\delta}_k^T = [(\tilde{\delta}_k^1)^T, \dots, (\tilde{\delta}_k^s)^T]$ . 基于此, 我们得到多个解耦子系统:

$$\tilde{\delta}_{k+1}^i = (I \otimes A - J_i(\mu_i) \otimes BK)\tilde{\delta}_k^i, \forall i \in \{1, \dots, s\} \quad (29)$$

由于  $\mathcal{L}\mathbf{1} = 0$ , 其中必存在一个为零的  $\mu_i$ . 为简单起见, 令  $\mu_1 = 0$ . 那么, 对于  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{\delta}_k\| = 0$  的必要条件为  $J_1(0) = 0$ . 即拉普拉斯矩阵  $\mathcal{L}$  的零特征值为单根. 也就是说,  $\mathcal{G}$  至少包含一生成树. 注意到  $\mathcal{L}^T u = 0$ , 则  $\tilde{\delta}_k^1 = (u^T \otimes I)\delta_k = 0$ , 所以有如下定理.

**定理 5.** 在控制协议 (24) 的作用下, 多自主体系统 (23) 达到趋同的充要条件为  $\mathcal{G}$  至少包含一生成树, 且存在增益矩阵  $K$  使得闭环矩阵  $A - \mu_i BK, \forall i \in \{2, \dots, s\}$  的所有特征根都严格落在单位圆内.

上述定理将设计增益矩阵  $K$  达到趋同性的问题转化为同时镇定  $s - 1$  个系统的问题<sup>[128]</sup>. 通常, 同时可镇定问题是非常难解的. 但因上述同时镇定问题具有特殊的结构, 可以利用 Riccati 不等式来设计增益矩阵  $K$ .

**引理 2**<sup>[127]</sup>. 给定正数  $\eta \in \mathbf{R}$ , 考虑如下形式的修正 Riccati 不等式:

$$P > A^T P A - (1 - \eta^2) A^T P B (B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (30)$$

若  $A$  不稳定, 但  $(A, B)$  可镇定, 那么存在临界值  $\eta_c \in (0, 1)$ , 使得对任意正数  $\eta < \eta_c$ , 不等式 (30) 总

存在正定矩阵解  $P$ . 且

$$\prod_{i=1}^n (\max\{1, |\lambda_i|\})^{-1} \leq \eta_c \leq \left( \max_i |\lambda_i| \right)^{-1}$$

如果  $B$  是可逆的, 则  $\eta_c = (\max_i |\lambda_i|)^{-1}$ ; 如果  $B$  的秩为 1, 则  $\eta_c = (\prod_{i=1}^n \max\{1, |\lambda_i|\})^{-1}$ ; 否则  $\eta_c$  需通过解线性矩阵不等式来得到.

如果  $A$  是稳定的, 很显然式 (30) 总存在正定矩阵的解. 在这种情况下, 令  $\eta_c = 1$ .

**定理 6**<sup>[127]</sup>. 若  $\mathcal{G}$  包含一生成树且下面条件成立:

- 1)  $(A, B)$  是可镇定的;
- 2) 存在  $\omega \in \mathbf{R}$ , 满足:

$$\eta(\omega) = \max_{i \in \{2, \dots, s\}} |1 - \omega \mu_i| < \eta_c \quad (31)$$

则控制增益  $K = \omega(B^T P B)^{-1} B^T P A$  可以使多自主体系统 (23) 在控制协议 (24) 的作用下达到趋同, 其中  $P$  是 Riccati 不等式 (30) 在  $\eta = \eta(\omega)$  下的正定矩阵解.

事实上, 令  $\eta_i = 1 - \omega \mu_j$ , 那么, 对所有的  $i \in \{2, \dots, s\}$  有  $|\eta_i| \leq \eta(\omega)$ . 利用给出的增益矩阵  $K$ , 可以验证对所有的  $i \in \{2, \dots, s\}$ , 有:

$$\begin{aligned} & (A - \mu_i BK)^H P (A - \mu_i BK) - P = \\ & A^T P A - (1 - |\eta_i|^2) \frac{A^T P B B^T P A}{B^T P B} - P \leq \\ & A^T P A - (1 - \eta^2) \frac{A^T P B B^T P A}{B^T P B} - P < 0 \end{aligned}$$

这隐含了  $A - \mu_i BK$  的所有特征值严格落在单位圆内, 即  $K$  可以同时镇定系统  $(A, \mu_i B)$ .

根据式 (31), 可得到如下结论.

**引理 3.** 令  $\mu_j = r_j \exp(\theta_j i)$ , 则不等式 (31) 成立当且仅当交集

$$\bigcap_{j=2}^s \left( \frac{\cos \theta_j - \sqrt{\eta_c^2 - \sin^2 \theta_j}}{r_j}, \frac{\cos \theta_j + \sqrt{\eta_c^2 - \sin^2 \theta_j}}{r_j} \right) \quad (32)$$

是非空的. 同时等价于

$$\frac{1 - \eta_c^2}{\min_{j \in \{2, \dots, s\}} r_j f(\theta_j)} < \min_{j \in \{2, \dots, s\}} \frac{f(\theta_j)}{r_j} \quad (33)$$

其中,  $f(\theta) = \cos \theta + \sqrt{\eta_c^2 - \sin^2 \theta}$  是关于  $\theta \in (0, \arcsin(\eta_c))$  的递减函数, 且  $\arcsin(\cdot)$  是  $\sin(\cdot)$  的反函数.

若自主体的动态方程具有某特定结构, 定理 7 的条件也是必要的.

**定理 7**<sup>[118]</sup>. 假定矩阵  $A$  不包含稳定的特征根, 且  $B$  的秩为 1, 在控制协议 (24) 作用下, 多自主体系统 (23) 达到趋同的必要条件为:

- 1)  $(A, B)$  是可控的;
- 2)  $\mathcal{G}$  至少包含一生成树, 且存在  $\omega \in \mathbf{R}$  满足:

$$\eta(\omega) = \max_{i \in \{2, \dots, s\}} |1 - \omega \mu_i| < \eta_c$$

对于无向图,  $\mathcal{L}$  的所有特征根为实数且非负的, 即  $\mu_i \geq 0$ . 将所有特征根从小到大排列, 即  $0 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_s$ , 则存在  $\omega$  满足式 (31) 的条件可显式地表示为

$$\frac{1 - \frac{\mu_2}{\omega}}{1 + \frac{\mu_s}{\omega}} < \eta_c \quad (34)$$

所以, 自主体的动态方程和连接拓扑图对趋同性问题的影响就解耦了. 特别地, 连接图对达到趋同的影响可以用  $\mu_2/\mu_s$  来刻画. 在文献 [94–95] 中,  $\mu_2/\mu_s$  表示网络的同步因子, 而自主体动态方程的影响可由  $\eta_c$  来刻画.

根据文献 [129] 中的引理 A.1 和引理 A.2, 可以立刻得到同步因子 (即  $\mu_2/\mu_s$ ) 的上界:

$$\frac{\mu_2}{\mu_s} \leq \frac{\min_i d_i}{\max_i d_i}$$

在无向图的情况下,  $\mu_2$ <sup>[105, 107]</sup> 决定了一阶积分器的自主体系统达到趋同的收敛速率. 利用 Courant-Weyl 交错不等式<sup>[52]</sup>, 在无向不完全图中添加无向边将会使  $\mu_2$  增大, 这意味着收敛到趋同的速度将不会变慢. 然而, 增加无向边可能会导致网络的同步因子变小. 例如, 考虑如下两个图的拉普拉斯矩阵

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}_1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

和

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}_2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

很明显, 对应的图  $\mathcal{G}_2$  是在  $\mathcal{G}_1$  加入一无向边得到的, 且通过计算得到,  $\mathcal{G}_2$  的同步因子为 0.3970, 但  $\mathcal{G}_1$  的同步因子为 0.4. 所以, 在控制协议 (24) 下, 通过增加图的边, 可能会使多自主体系统失去趋同性. 这似乎不太符合直观, 因为具有“更好”连通性的图, 其趋同性能力反而更弱. 一种可能的解释是因为我们限制的控制协议的形式. 添加图的边是否增大或减少网络的同步因子至今还没有定论<sup>[95]</sup>.

利用充分小的采样周期对任何连续时间系统采样, 其离散化系统 (23) 的不稳定特征根则可以任意趋近于 1. 故可以验证, 此离散系统的  $\eta_c$  也可以任意接近 1. 所以, 只要连接图包含一生成树, 则不等式 (31) 将会成立. 这和文献 [130] 的结果是一致的. 事实上, 对于连续时间系统, 信息可以连续地获取. 对于达到趋同性来说, 通信网络的同步因子就显得没那么重要.

因多自主体系统可能部署在不确定的环境中, 其通信拓扑结构可能随机改变. 在此情况下, 一阶积分器多自主体系统的随机趋同性问题在文献 [131–136] 中有专门的讨论. 文献 [132, 136] 考虑通信拓扑图是随机时变的, 并得到动态特征为一阶积分器的多自主体系统达到趋同的充要条件是平均连接图必须包含一生成树. 这里, 平均 (期望) 是相对于随机拓扑图的不变分布而取的. 该结果在文献 [131] 中推广至马尔科夫跳变的随机拓扑结构, 且自主体的动态方程式为连续的二阶积分器. 在这种情况下, 达到多自主体趋同的充要条件是所有马尔科夫过程的正常返状态的并是强连通的. 在文献 [137] 中, 类似的结论推广至离散的情形. 然而, 在时变连接拓扑的情形下, 多自主体系统 (23) 的趋同性问题变得复杂<sup>[138–141]</sup>.

## 7 基于采样理论的控制方法

如果系统的初始状态和动态方程已知, 且不存在过程扰动, 则可以利用开环控制器实现大多数控制目标. 然而, 不确定性不可避免地存在于实际系统中, 基于反馈信息的闭环控制器来处理不确定性更加有利. Ramaprasad 在文献 [142] 中定义反馈信息为“在某种方式上, 用来改变系统参数的实际水平和参考水平之间的差距的信息”. 从这个角度来看, 好的采样机制应尽可能多地减少上述不确定. 传统的采样方法在时间上进行周期采样. 该方法的好处在于系统的分析和设计较为简单. 特别地, 线性时不变连续系统经周期采样得到的采样系统也是线性的, 且可由常系数的差分方程表示. 目前, 关于周期性地施加控制输入的研究已相当成熟.

然而, 这种与系统进程无关的采样方法从通信的角度上看可能并不是最有效的. 我们可以选择一

种基于事件驱动的采样方法, 即当系统发生重大变化时, 才对其进行采样. 与前面时间驱动的采样相比, 基于事件驱动的控制设计与分析通常非常复杂. 关于这种控制方法的研究其实并不新颖, 在上世纪 60~80 年代也有大量的工作<sup>[143]</sup>.

最近, 基于网络的事件驱动控制在 NCS 领域重新吸引了研究者的广泛兴趣, 因为它可以在控制性能和网络控制的约束 (如通信负载、计算负荷、系统成本等) 之间找到更好的平衡<sup>[144]</sup>. 文献 [143] 证明了相对传统周期采样的控制, 基于事件驱动的控制方法可以使得系统输出的方差明显减低. 这表明在降低网络带宽需求方面, 此控制方法有很大的潜力<sup>[145]</sup>. 如因通信资源有限, 经网络传输量测或控制输入的个数将有严格的限制. 这促使我们发展各种事件驱动的采样/通信协议来降低对通信次数需求<sup>[146-155]</sup>.

基于事件驱动的控制方法的关键问题是应如何“最佳”地生成事件. 很显然事件不可能随意产生, 即事件的生成应避免 Zeno 现象. 也就是说, 在有限时间内, 事件发生的次数是有限的<sup>[156]</sup>. 直观上, 事件发生次数越少, 即采样次数越少, 则控制器得到的反馈信息就越少. 当定义事件时, 以上两个相互矛盾的因素应综合考虑. 而且最佳事件的设计依赖于不同的性能指标, 这使得问题更加复杂. 此外, 基于事件驱动的采样系统的分析通常需要处理不连续性、时变性等难点问题.

本节利用多自主体系统的趋同问题来简要说明如何设计基于事件驱动的控制方法<sup>[154]</sup>. 自主体的动态方程表述为

$$\frac{dx_t^i}{dt} = u_t^i, \quad t \geq 0, \quad i \in \mathcal{V} \quad (35)$$

自主体  $i$  连续地观测其自身的状态  $x_t^i$ . 自主体将基于“某事件”的发生来决定何时广播其当前的状态给邻近的自主体. 这与传统方法中连续地或者周期性地广播其状态信息不同. 令第  $i$  个自主体的状态估计为  $\hat{x}_t^i = x_{t_k^i}^i, t \in [t_k^i, t_{k+1}^i)$ , 其中,  $t_0^i, t_1^i, \dots$  是对第  $i$  个自主体事件发生的时间.

根据文献 [107], 采用如下基于事件驱动的控制协议<sup>[154]</sup>:

$$u_t^i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\hat{x}_t^i - \hat{x}_t^j) \quad (36)$$

考虑自发事件驱动的控制, 即第  $i$  个自主体的事件产生仅取决于其当前的真实状态和估计状态信息. 具体而言, 若满足条件  $f^i(t, x_t^i, \hat{x}_t^i) > 0$ , 则自主体  $i$  产生一事件, 并广播其当前的真实状态信息给邻近的自主体. 因此, 事件发生的时刻可以由下式迭代给

出:

$$t_{k+1}^i = \inf \{t : t > t_k^i, f^i(t, x_t^i, \hat{x}_t^i) > 0\}$$

直观的想法是若系统发生了重大变化, 如自主体  $i$  的真实状态和估计状态相差较大, 则该自主体广播其当前的状态信息给邻近的自主体. 从而, 自主体  $i$  的邻居能够对其状态保持较好的估计. 所以, 定义  $f^i(t, x_t^i, \hat{x}_t^i) = |x_t^i - \hat{x}_t^i| - h^i(t)$ , 其中  $h^i(t) > 0$  是定义事件的阈值. 特别地,  $h^i(t) = c_0 + c_1 \exp(-\alpha t)$ , 其中  $c_i$  与  $\alpha$  是非负的. 当然, 还有许多其他方法来定义事件.

若连接图是无向的, 在文献 [154] 中已证明, 通过选择  $c_0 + c_1 > 0$  和  $0 < \alpha < \mu_2$ , 基于事件驱动控制的多自主体系统可避免 Zeno 现象, 且存在一致的下界  $\tau > 0$  使得  $\inf_{k \in \mathbb{N}, i \in \mathcal{V}} |t_k^i - t_{k+1}^i| \geq \tau$ . 进一步, 偏移向量以指数速度收敛于以原点为球心、 $r = \|\mathcal{L}\| \sqrt{N} \frac{c_0}{\mu_2}$  为半径的球.

因最终收敛区域的大小可以通过调整参数  $c_0$  来改变, 这个结果是非常有意义的. 如果  $c_0 > 0$ , 则基于上述事件驱动方法, 对邻居的状态估计误差则无法消除. 故偏移向量不能渐近收敛到 0. 但令  $c_0 = 0$ , 则多自主体系统能达到趋同性. 此外,  $\alpha$  也不能太大. 否则, 自主体的状态收敛速度会大于阈值衰减速度, 这可能引起 Zeno 现象. 注意到  $\mu_2$  决定了在连续状态反馈情况下, 多自主体系统达到趋同性的收敛速度<sup>[107]</sup>.

另一个重要的问题是如何衡量事件驱动控制方法带来的好处, 如在单位时间采样的次数是多少、趋同性的收敛速度又如何受此影响? 这些问题都具有挑战性, 至今尚未解决.

## 8 结语

本文回顾了网络控制领域当前的发展状况, 对一些重要问题提出了见解. 读者可以从文中所提及的相应文献中找到更深层次的讨论. 我们寄希望于读者能从中发现新的问题, 并在此领域继续努力. 需要指出的是, 因篇幅和作者能力有限, 本文的讨论未能涵盖所有网络控制领域的研究.

基于作者的理解, 本文最后提出一些未来值得研究的方向.

### 1) 网络控制中的信息传输理论

如文中所提及, 在过去几十年 NCS 领域最重要的研究进展是基于信息论的网络控制方法. 其研究主要集中在镇定不稳定系统所需的最低数据率/带宽上. 基于是否为无噪信道、是否存在过程扰动, 我们得到了各种涉及不稳定开环极点的最低数据率的结果. 其中最大的挑战在于扰动和通信信道的不确定性. 目前结果表明, 信息论中常用的信道容量 (如

香农容量) 并不能充分刻画存在扰动的动态系统对信息的需求. 在信息论中, 要渐近达到香农容量, 先对信息进行编码, 且需要增加编码的长度来提高通信的可靠性, 从而导致通信时延增大. 故基于有限数据率的反馈控制机制, 还需要建立一套同时考虑传输时延、信息可靠性等的信息传输理论.

## 2) 量化性能控制

目前很多关于数据率的研究结果大多只涉及镇定性的问题. 在网络控制领域, 研究控制系统的性能是十分必要的. 显然, 控制系统的性能既依赖于通信网络, 也与控制器有关. 故不能单独设计控制器或通信网络. 特别地, 研究通信数据率与控制性能之间的关系, 以及建立计算高效和易于实现的控制编码-解码和控制策略, 具有重要理论和实际意义. 如何综合设计通信网络和控制器的的问题还需进一步的研究.

## 3) 多自主体系统的网络拓扑结构和通信数据率

目前, 基于信息理论的控制方法主要研究单回路的控制系统. 对于网络控制系统, 一个重要的推广是多系统/回路共享通信资源. 所以, 对于多自主体和多回路控制的大规模协作系统, 研究有效的编码-解码策略和网络拓扑结构是十分重要的. 在文献 [118] 中表明, 若以状态反馈能达到趋同, 则只要通信网络中每一条链接的数据率都大于一个显式给出的下界, 以量化状态反馈也可达到多自主体系统的趋同. 尽管这个结果很有意义, 但其关于数据率的保守性仍不清楚. 所以, 建立多自主体系统达到趋同所需与网络拓扑结构相关的最低数据率是十分有趣的. 这可能需要结合信息论和图论的方法.

## 4) 不确定大规模网络系统的协同控制

目前多自主体系统的研究存在许多不足. 如假定通信链路是可靠的、单个自主体能获得网络拓扑结构的一些全局信息等. 注意到网络运行环境的改变, 比如在多个自主体之间大块金属物体的随机出现将不可避免地影响信道的通信质量. 所以, 考虑通信信道是时变的情形更有意义. 基于时变图论的趋同性研究将大大加深对多自主体系统的理解. 对于固定的连接图, 基于常用的控制协议, 多自主体系统趋同性问题可转化为同时可镇定的问题. 然而, 这一关键步骤在时变图中并不适用, 所以需要提出一套新的方法. 另一方面, 在网络控制系统领域, 有可能出现不同类型的自主体加入或者离开网络的现象. 这时, 假设每个自主体完全了解其他自主体的动态方程是不现实的. 这也需要一些新思想去解决如何使得每个自主体在优化自己的性能指标的同时, 最小化对其他自主体的干扰.

## 5) 网络安全与容错控制

毋庸置疑, 网络安全是十分重要的. 最近在网络

安全领域, 有许多研究. 其大多基于可观测性等网络结构特性的分析. 其他值得更深一步研究包括基于网络反馈系统的鲁棒控制和容错控制等.

## References

- Lian F L, Moyne J R, Tilbury D M. Performance evaluation of control networks: Ethernet, Controlnet, and DeviceNet. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, **21**(1): 66–83
- Murray R M, Astrom K J, Boyd S P, Brockett R W, Stein G. Future directions in control in an information-rich world. *IEEE Control Systems Magazine*, 2003, **23**(2): 20–33
- Lawrenz W. *CAN System Engineering: from Theory to Practical Applications*. New York: Springer Verlag, 1997
- Tanenbaum A S. *Computer Networks* (Forth edition). New Jersey: Prentice Hall, 2002
- Anderson D. *Firewire System Architecture: IEEE 1394A*. Chicago: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1999
- Nair G N, Fagnani F, Zampieri S, Evans R J. Feedback control under data rate constraints: an overview. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 108–137
- Hespanha J P, Naghshtabrizi P, Xu Y G. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 138–162
- Nyquist H. Regeneration theory. *Bell System Technical Journal*, 1932, **11**(3): 126–147
- Bennett S. A brief history of automatic control. *IEEE Control Systems Magazine*, 1996, **16**(3): 17–25
- Franklin G F, Powell J D, Emami-Naeini A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994
- Yang T C. Networked control system: a brief survey. *IET Proceedings — Control Theory and Applications*, 2006, **153**(4): 403–412
- Farsi M, Ratchiff K, Barbosa M. An overview of controller area network. *Computing and Control Engineering Journal*, 1999, **10**(3): 113–120
- Weigmann J, Kilian G. *Decentralization with PROFIBUS-DP: Architecture and Fundamentals, Configuration and Use with SIMATIC S7*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 2000
- Kalman R. Nonlinear aspects of sampled-data control systems. In: *Proceedings of the 1956 Symposium on Nonlinear Circuit Analysis*. 1956, **6**: 273–313
- Curry R E. *Estimation and Control with Quantized Measurements*. Cambridge: MIT Press, 1970
- Miller R K, Michel A N, Farrell J A. Quantizer effects on steady-state error specifications of digital feedback control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, **34**(6): 651–654
- Delchamps D F. Stabilizing a linear system with quantized state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(8): 916–924
- Elia N, Mitter S K. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(9): 1384–1400
- Fu M Y, Xie L H. The sector bound approach to quantized feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(11): 1698–1711
- Willems J C. *The Analysis of Feedback Systems*. Cambridge: The MIT Press, 1971

- 21 LaSalle J, Lefschetz S. *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*. New York: Academic Press, 1961
- 22 You K, Su W Z, Fu M Y, Xie L H. Attainability of the minimum data rate for stabilization of linear systems via logarithmic quantization. *Automatica*, 2011, **47**(1): 170–176
- 23 Fu M Y, Xie L H. Finite-level quantized feedback control for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(5): 1165–1170
- 24 Wong W S, Brockett R W. Systems with finite communication bandwidth constraints II: stabilization with limited information feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(5): 1049–1053
- 25 Brockett R W, Liberzon D. Quantized feedback stabilization of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(7): 1279–1289
- 26 Baillieul J. Feedback coding for information-based control: operating near the data-rate limit. In: Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, NV, USA: IEEE, 2002. 3229–3236
- 27 Nair G N, Evans R J. Stabilizability of stochastic linear systems with finite feedback data rates. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2004, **43**(2): 413–436
- 28 Tatikonda S, Mitter S. Control under communication constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(7): 1056–1068
- 29 Matveev A S, Savkin A V. Multirate stabilization of linear multiple sensor systems via limited capacity communication channels. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2005, **44**(2): 584–617
- 30 Yuksel S, Basar T. Minimum rate coding for LTI systems over noiseless channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(12): 1878–1887
- 31 Cover T M, Thomas J A. *Elements of Information Theory* (Second edition). New York: Wiley-InterScience, 2006
- 32 Shannon C E. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 1948, **27**: 379–423
- 33 Nair G N, Evans R J, Mareels I M Y, Moran W. Topological feedback entropy and nonlinear stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1585–1597
- 34 Tatikonda S, Mitter S. Control over noisy channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(7): 1196–1201
- 35 Martins N C, Dahleh M A, Elia N. Feedback stabilization of uncertain systems in the presence of a direct link. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(3): 438–447
- 36 Sahai A, Mitter S. The necessity and sufficiency of anytime capacity for stabilization of a linear system over a noisy communication link Part I: scalar systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(8): 3369–3395
- 37 Minero P, Franceschetti M, Dey S, Nair G. Data rate theorem for stabilization over time-varying feedback channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 243–255
- 38 You K, Xie L H. Minimum data rate for mean square stabilization of discrete LTI systems over lossy channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(10): 2373–2378
- 39 You K, Xie L H. Minimum data rate for mean square stabilizability of linear systems with Markovian packet losses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(4): 772–785
- 40 Matveev A S, Savkin A V. Comments on “Control over noisy channels” and relevant negative results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(12): 2105–2110
- 41 Matveev A S, Savkin A V. An analogue of Shannon information theory for detection and stabilization via noisy discrete communication channels. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, **46**(4): 1323–1367
- 42 Matveev A S, Savkin A V. Shannon zero error capacity in the problems of state estimation and stabilization via noisy communication channels. *International Journal of Control*, 2007, **80**(2): 241–255
- 43 Matveev A S. *Estimation and Control over Communication Networks*. New York: Springer, 2008
- 44 Mushkin M, Bar-David I. Capacity and coding for the gilbert-elliott channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1989, **35**(6): 1277–1290
- 45 Meyn S P, Tweedie R L. *Markov Chains and Stochastic Stability*. London: Springer-Verlag, 1996
- 46 Schenato L, Sinopoli B, Franceschetti M, Poolla K, Sastry S S. Foundations of control and estimation over lossy networks. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 163–187
- 47 You K, Fu M Y, Xie L H. Mean square stability for Kalman filtering with Markovian packet losses. *Automatica*, 2011, **47**(12): 2647–2657
- 48 Huang M, Dey S. Stability of Kalman filtering with Markovian packet losses. *Automatica*, 2007, **43**(4): 598–607
- 49 Gupta V, Hassibi B, Murray R M. Optimal LQG control across packet-dropping links. *Systems and Control Letters*, 2007, **56**(6): 439–446
- 50 Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, Poolla K, Jordan M J, Sastry S S. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1453–1464
- 51 Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
- 52 Coviello L, Minero P, Franceschetti M. Stabilization over Markov feedback channels: the general case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(2): 349–362
- 53 Xie L, Xie L H. Stability of a random Riccati equation with Markovian binary switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(7): 1759–1764
- 54 Sahai A, Mitter S. The necessity and sufficiency of anytime capacity for control over a noisy communication link Part II: vector systems [Online], available: <http://arxiv.org/abs/cs/0610146>, October 25, 2006
- 55 Como G, Fagnani F, Zampieri S. Anytime reliable transmission of real-valued information through digital noisy channels. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2010, **48**(6): 3903–3924
- 56 Marelli D, You K Y, Fu M Y. Identification of ARMA models using intermittent and quantized output observations. *Automatica*, 2013, **49**(2): 360–369
- 57 Tatikonda S, Sahai A, Mitter S. Stochastic linear control over a communication channel. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1549–1561
- 58 You K, Xie L. Linear quadratic Gaussian control with quantised innovations Kalman filter over a symmetric channel. *IET Control Theory and Applications*, 2011, **5**(3): 437–446
- 59 Borkar V S, Mitter S K, Tatikonda S. Optimal sequential vector quantization of Markov sources. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001, **40**(1): 135–148

- 60 Fu M Y. Lack of separation principle for quantized linear quadratic Gaussian control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(9): 2385–2390
- 61 Larson R. Optimum quantization in dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, **12**(2): 162–168
- 62 Larson R, Tse E. Reply. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, **17**(2): 274–276
- 63 Hu S, Yan W Y. Stability robustness of networked control systems with respect to packet loss. *Automatica*, 2007, **43**(7): 1243–1248
- 64 Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, Poolla K, Sastry S. Optimal linear LQG control over lossy networks without packet acknowledgment. *Asian Journal of Control*, 2008, **10**(1): 3–13
- 65 Xiong J L, Lam J. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss. *Automatica*, 2007, **43**(1): 80–87
- 66 Censi A. Kalman filtering with intermittent observations: convergence for semi-Markov chains and an intrinsic performance measure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(2): 376–381
- 67 Kluge S, Reif K, Brokate M. Stochastic stability of the extended Kalman filter with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(2): 514–518
- 68 Mo Y L, Sinopoli B. A characterization of the critical value for Kalman filtering with intermittent observations. In: Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun: IEEE, 2008. 2692–2697
- 69 Park S Y, Sahai A. Intermittent Kalman filtering: eigenvalue cycles and nonuniform sampling. In: Proceedings of the 2011 American Control Conference. San Francisco, CA: IEEE, 2011. 3692–3697
- 70 Plarre K, Bullo F. On Kalman filtering for detectable systems with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 386–390
- 71 Epstein M, Shi L, Tiwari A, Murray R M. Probabilistic performance of state estimation across a lossy network. *Automatica*, 2008, **44**(12): 3046–3053
- 72 Kar S, Sinopoli B, Moura J M F. Kalman filtering with intermittent observations: weak convergence to a stationary distribution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(2): 405–420
- 73 Xie L, Xie L H. Stability analysis of networked sampled-data linear systems with Markovian packet losses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1375–1381
- 74 You K, Fu M Y, Xie L H. Necessary and sufficient conditions for stability of Kalman filtering with Markovian packet losses. In: Proceedings of the 18th IFAC World Congress. Milano, Italy. 2010. 12465–12470
- 75 Shi L, Epstein M, Murray R M. Kalman filtering over a packet-dropping network: a probabilistic perspective. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(3): 594–604
- 76 Xie L. Stochastic comparison, boundedness, weak convergence, and ergodicity of a random Riccati equation with Markovian binary switching. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2012, **50**(1): 532–558
- 77 Mo Y L, Sinopoli B. Kalman filtering with intermittent observations: tail distribution and critical value. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(3): 677–689
- 78 Anderson B D O, Moore J B. *Optimal Filtering*. New Jersey: Prentice-Hall and Systems Sciences Series, 1979
- 79 Rudin W. *Real and Complex Analysis* (Third edition). New York: McGraw-Hill, 1987
- 80 Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994
- 81 Xu Y G, Hespanha J P. Estimation under uncontrolled and controlled communications in networked control systems. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Seville, Spain: IEEE, 2005. 842–847
- 82 Mo Y L, Sinopoli B. Towards finding the critical value for Kalman filtering with intermittent observations [Online], available: <http://arxiv.org/abs/1005.2442>, May 14, 2010
- 83 Guo Lei. *Time-Varying Stochastic Systems — Stability, Estimation and Control*. Changchun, China: Jilin Science and Technology Press, 1993  
(郭雷. 随机时变系统: 稳定性、估计与控制. 长春: 吉林科学技术出版社, 1993)
- 84 Rohr E, Marelli D, Fu M Y. Kalman filtering for a class of degenerate systems with intermittent observations. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Orlando, Florida: IEEE, 2011. 2422–2427
- 85 Rohr E, Marelli D, Fu M Y. Kalman filtering with intermittent observations: bounds on the error covariance distribution. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Orlando, Florida: IEEE, 2011. 2416–2421
- 86 Strogatz S H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001, **410**(6825): 268–276
- 87 Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1465–1476
- 88 Yang P, Freeman R A, Lynch K M. Multi-agent coordination by decentralized estimation and control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(11): 2480–2496
- 89 Cortés J, Martinez S, Karatas T, Bullo F. Coverage control for mobile sensing networks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2004, **20**(2): 243–255
- 90 Cortés J, Bullo F. Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2005, **44**(5): 1543–1574
- 91 Okubo A. Dynamical aspects of animal grouping: swarms, schools, flocks, and herds. *Advances in Biophysics*, 1986, **22**: 1–94
- 92 Saber R O, Murray R M. Flocking with obstacle avoidance: cooperation with limited communication in mobile networks. In: Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, HI: IEEE, 2003. 2022–2028
- 93 Lynch N A. *Distributed Algorithms*. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1996
- 94 Barahona M, Pecora L M. Synchronization in small-world systems. *Physical Review Letters*, 2002, **89**(5): 054101
- 95 Duan Z S, Chen G R, Huang L. Complex network synchronizability: analysis and control. *Physical Review E*, 2007, **76**(5): 56103
- 96 Sorrentino F, Di Bernardo M, Garofalo F. Synchronizability and synchronization dynamics of weighed and unweighed scale free networks with degree mixing. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, **17**(7): 2419–2434
- 97 Borkar V, Varaiya P. Asymptotic agreement in distributed estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, **27**(3): 650–655



- 98 Tsitsiklis J, Bertsekas D, Athans M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(9): 803–812
- 99 Tsitsiklis J N. Problems in decentralized decision making and computation [Ph.D. dissertation], Massachusetts Institute of Technology, USA, 1984
- 100 Fischer M J, Lynch N A, Paterson M S. Impossibility of distributed consensus with one faulty process. *Journal of the ACM*, 1985, **32**(2): 374–382
- 101 Fischer M. The consensus problem in unreliable distributed systems. In: *Proceedings of the 1983 Foundations of Computation Theory*. New York: Springer, 1983. 127–140
- 102 Dolev D, Dwork C, Stockmeyer L. On the minimal synchronism needed for distributed consensus. *Journal of the ACM*, 1987, **34**(1): 77–97
- 103 Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, Cohen I, Shohet O. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 1995, **75**(6): 1226–1229
- 104 Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(6): 988–1001
- 105 Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 215–233
- 106 Ren W, Beard R W, Atkins E M. A survey of consensus problems in multi-agent coordination. In: *Proceedings of the 2005 American Control Conference*. Portland, OR, USA: IEEE, 2005. 1859–1864
- 107 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520–1533
- 108 Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 655–661
- 109 Li T, Zhang J F. Consensus conditions of multi-agent systems with time-varying topologies and stochastic communication noises. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(9): 2043–2057
- 110 Li T, Zhang J F. Mean square average-consensus under measurement noises and fixed topologies: necessary and sufficient conditions. *Automatica*, 2009, **45**(8): 1929–1936
- 111 Li T, Zhang J F. Sampled-data based average consensus with measurement noises: convergence analysis and uncertainty principle. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2009, **52**(11): 2089–2103
- 112 Moreau L. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(2): 169–182
- 113 Ren W, Moore K, Chen Y Q. High-order consensus algorithms in cooperative vehicle systems. In: *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*. Ft. Lauderdale, FL: IEEE, 2006. 457–462
- 114 Wieland P, Kim J, Scheu H, Allgower F. On consensus in multi-agent systems with linear high-order agents. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea: IFAC, 2008. 1541–1546
- 115 Lin P, Jia Y M. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies. *Automatica*, 2009, **45**(9): 2154–2158
- 116 Li Z K, Duan Z S, Chen G R, Huang L. Consensus of multi-agent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2010, **57**(1): 213–224
- 117 Godsil C, Royle G F. *Algebraic Graph Theory*. New York: Springer, 2001
- 118 You K, Xie L H. Network topology and communication data rate for consensusability of discrete-time multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(10): 2262–2275
- 119 You K, Xie L H. Consensusability of discrete-time multi-agent systems over directed graphs. In: *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*. Yantai, China: IEEE, 2011. 6413–6418
- 120 You K, Xie L H. Coordination of discrete-time multi-agent systems via relative output feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, **21**(13): 1587–1605
- 121 Gu G X, Marinovici L, Lewis F L. Consensusability of discrete-time dynamic multiagent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(8): 2085–2089
- 122 Scardovi L, Sepulchre R. Synchronization in networks of identical linear systems. *Automatica*, 2009, **45**(11): 2557–2562
- 123 Seo J H, Shim H, Back J. Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: low gain approach. *Automatica*, 2009, **45**(11): 2659–2664
- 124 Li Z K, Duan Z S, Chen G R. Consensus of discrete-time linear multi-agent systems with observer-type protocols. *Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B*, 2011, **16**(2): 489–505
- 125 Kim H, Shim H, Seo J H. Output consensus of heterogeneous uncertain linear multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(1): 200–206
- 126 Hengster-Movric K, Lewis F. Cooperative observers and regulators for discrete-time multiagent systems [Online], available: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/rnc.2840/abstract>, January 20, 2013
- 127 Hengster-Movric K, You K, Lewis F L, Xie L. Synchronization of discrete-time multi-agent systems on graphs using riccati design. *Automatica*, 2013, **49**(2): 414–423
- 128 Saks R, Murray J. Fractional representation, algebraic geometry, and the simultaneous stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, **27**(4): 895–903
- 129 Li T, Fu M Y, Xie L H, Zhang J F. Distributed consensus with limited communication data rate. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(2): 279–292
- 130 Ma C Q, Zhang J F. Necessary and sufficient conditions for consensus ability of linear multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(5): 1263–1268
- 131 Matei I, Baras J S. Convergence Results for the Linear Consensus Problem under Markovian Random Graphs. ISR Technical Report 2009-18, The University of Maryland, USA, 2009
- 132 Tahbaz-Salehi A, Jadbabaie A. Consensus over ergodic stationary graph processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(1): 225–230
- 133 Li Z Q, Yu F R, Huang M Y. A distributed consensus-based cooperative spectrum-sensing scheme in cognitive radios. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2010, **59**(1): 383–393
- 134 Fagnani F, Zampieri S. Randomized consensus algorithms over large scale networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2008, **26**(4): 634–649

- 135 Huang M Y, Manton J H. Stochastic consensus seeking with noisy and directed inter-agent communication: fixed and randomly varying topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(1): 235–241
- 136 Kar S, Moura J M F. Distributed consensus algorithms in sensor networks with imperfect communication: link failures and channel noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(1): 355–369
- 137 Miao G Y, Xu S Y, Zou Y. Necessary and sufficient conditions for mean square consensus under Markov switching topologies. *International Journal of Systems Science*, 2012, **44**(11): 178–186
- 138 Zhang Y, Tian Y P. Maximum allowable loss probability for consensus of multi-agent systems over random weighted lossy networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(8): 2127–2132
- 139 Su Y F, Huang J. Two consensus problems for discrete-time multi-agent systems with switching network topology. *Automatica*, 2012, **48**(9): 1988–1997
- 140 Su Y F, Huang J. Stability of a class of linear switching systems with applications to two consensus problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(6): 1420–1430
- 141 You K Y, Li Z R, Xie L H. Consensus for general multi-agent systems over random graphs. In: Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Control and Automation. Santiago, Chile. 2011. 830–835
- 142 Ramaprasad A. On the definition of feedback. *Behavioral Science*, 1983, **28**(1): 4–13
- 143 Åström K, Bernhardsson B. Comparison of periodic and event based sampling for first-order stochastic systems. In: Proceedings of the 14th IFAC World Congress. Beijing, China. 1999, **11**: 301–306
- 144 Heemels W P M H, Sandee J H, Van Den Bosch P P J. Analysis of event-driven controllers for linear systems. *International Journal of Control*, 2008, **81**(4): 571–590
- 145 Henningsson T, Cervin A. Event-based control over networks: some research questions and preliminary results. In: Proceedings of the 2006 Swedish Control Conference. Stockholm, Sweden, 2006
- 146 You K, Xie L. Kalman filtering with scheduled measurements. [Online], available: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?reload=true&arnumber=6387624>, January 20, 2013
- 147 Wu J, Jia Q, Johansson K, Shi L. Event-based sensor data scheduling: trade-off between sensor communication rate and estimation quality [Online], available: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=06286997>, January 20, 2013
- 148 Tabuada P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(9): 1680–1685
- 149 Wang X F, Lemmon M D. Event-triggering in distributed networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(3): 586–601
- 150 Mazo M, Tabuada P. Decentralized event-triggered control over wireless sensor/actuator networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(10): 2456–2461
- 151 Dimarogonas D V, Frazzoli E, Johansson K H. Distributed event-triggered control for multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(5): 1291–1297
- 152 Wang L Y, Li C Y, Yin G G, Guo L, Xu C Z. State observability and observers of linear-time-invariant systems under irregular sampling and sensor limitations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(11): 2639–2654
- 153 Demir O, Lunze J. Cooperative control of multi-agent systems with event-based communication. In: Proceedings of the 2012 American Control Conference. Montreal, Canada: AACC, 2012. 4504–4509
- 154 Seyboth G S, Dimarogonas D V, Johansson K H. Event-based broadcasting for multi-agent average consensus. *Automatica*, 2013, **49**(1): 245–252
- 155 Anta A, Tabuada P. To sample or not to sample: self-triggered control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(9): 2030–2042
- 156 Johansson K H, Egerstedt M, Lygeros J, Sastry S. On the regularization of zeno hybrid automata. *Systems and Control Letters*, 1999, **38**(3): 141–150



**游科友** 讲师。2007年在中山大学统计学系获得理学学士学位。2012年在新加坡南洋理工大学电气与工程学院获得博士学位。主要研究方向为网络系统的控制与估计, 分布式协同控制和传感器网络。本文通信作者。

E-mail: youky@tsinghua.edu.cn

(**YOU Ke-You** Lecturer. He received

the B. S. degree in statistical science at Sun Yat-sen University, China in 2007 and the Ph. D. degree in electrical and electronic engineering at Nanyang Technological University, Singapore in 2012. His research interest covers networked control systems, distributed control and optimization, and sensor networks. Corresponding author of this paper.)



**谢立华** 教授。1983年和1986年在南京理工大学自动控制系分别获得工学学士和硕士学位。1992年在澳大利亚Newcastle大学获得博士学位。主要研究方向为鲁棒控制, 传感器网络, 网络控制系统, 估计理论和信号处理。

E-mail: elhxie@ntu.edu.sg

(**XIE Li-Hua** Professor. He received

the B. E. and M. E. degrees in electrical engineering from Nanjing University of Science and Technology, China in 1983 and 1986, respectively, and the Ph. D. degree in electrical engineering from University of Newcastle, Australia in 1992. His research interest covers robust control, sensor network, networked control systems, estimation theory and signal processing.)