

容错控制系统鲁棒 H_∞ 和自适应补偿设计金小峥¹ 杨光红^{2,3} 常晓恒⁴ 车伟伟¹

摘要 通过设计动态输出反馈控制策略研究线性时不变系统执行器故障下的鲁棒自适应容错 H_∞ 控制问题. 结合自适应技术和线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMI) 技术, 设计一个控制策略同时实现系统的故障补偿控制和性能优化控制. 在设计中, 提出由自适应律在线调节控制增益方程补偿未知执行器故障和摄动; 并设计一个基于模式依赖李亚普诺夫方程的 LMI 条件解出控制参数及次优 H_∞ 性能. 所设计的动态输出反馈控制器可以处理一般执行器卡死故障, 并得到更少保守性的 H_∞ 性能指标. 此外, 一个更具挑战性的问题, 即通过自适应机构补偿故障致使系统多少性能退化得到论证. 所提方法的有效性由一个解耦线性化动态飞行器系统仿真验证.

关键词 容错控制, 鲁棒 H_∞ 控制, 直接自适应控制, 线性矩阵不等式, 动态输出反馈

引用格式 金小峥, 杨光红, 常晓恒, 车伟伟. 容错控制系统鲁棒 H_∞ 和自适应补偿设计. 自动化学报, 2013, 39(1): 31–42

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00031

Robust Fault-tolerant H_∞ Control with Adaptive CompensationJIN Xiao-Zheng¹ YANG Guang-Hong^{2,3} CHANG Xiao-Heng⁴ CHE Wei-Wei¹

Abstract This paper is concerned with the robust fault-tolerant H_∞ control problem of linear time-invariant systems with an adaptive mechanism for the general actuator fault and perturbation compensations. A novel dynamic output feedback controller is constructed by stabilizing controller gains and adaptive control gain functions. Based on the mode-dependent Lyapunov functions method, less conservative linear matrix inequalities (LMIs) are developed to find the stabilizing controller gains such that the H_∞ performance is optimized. Besides, direct adaptive control schemes are proposed to adjust the control gain functions online in order to compensate for actuator faults and perturbations. Based on a notion of an adaptive H_∞ performance index, the designed controller can guarantee the stability and adaptive H_∞ performances of the resulting closed-loop systems. Moreover, a challenging problem of how much performance will be degraded by applying adaptive mechanism for fault compensations is also demonstrated. A numerical example of a linearized dynamic aircraft system and its simulation results are given.

Key words Fault-tolerant control (FTC), robust H_∞ control, direct adaptive control, linear matrix inequalities (LMIs), dynamic output feedback

Citation Xiao-Zheng Jin, Guang-Hong Yang, Xiao-Heng Chang, Wei-Wei Che. Robust fault-tolerant H_∞ control with adaptive compensation. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(1): 31–42

收稿日期 2010-12-24 录用日期 2012-01-10

Manuscript received December 24, 2010; accepted January 10, 2012

国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2009CB320604), 国家自然科学基金 (61104029, 60974043, 61273148, 61273155, 61104071, 61104106, 61174085), 教育部博士点基金 (20100042110027), 中央高校基本科研业务费专项资金 (N110804001), 全国优秀博士学位论文作者专项基金 (201157), 辽宁省自然科学基金 (201202156), 辽宁省博士启动基金 (20121040) 资助

Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2009CB320604), National Natural Science Foundation of China (61104029, 60974043, 61273148, 61273155, 61104071, 61104106, 61174085), the Funds of Doctoral Program of Ministry of Education (20100042110027), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (N110804001), Foundation for the Authors of National Excellent Doctoral Dissertation of China (201157), Natural Science Foundation of Liaoning Province (201202156), and Scientific Research Foundation for Doctor of Liaoning Province (20121040)

本文责任编辑 贾英民

Recommended by Associate Editor JIA Ying-Min

1. 沈阳大学装备制造综合自动化重点实验室 沈阳 110044 2. 东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110819 3. 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室 沈阳 110819 4. 渤海大学工学院 锦州 121013

1. Key Laboratory of Manufacturing Industrial Integrated Automation, Shenyang University, Shenyang 110044 2. Col-

为了保证系统在元器件正常和故障运行下的安全性和基本性能, 容错控制设计已经在过去的二十年中得到了足够的重视. 现有的容错控制方法大致分为两类, 即被动方法^[1–5] 和主动方法^[6–21]. 被动方法利用鲁棒控制技术设计固定增益的控制参数以保证系统的稳定性和性能, 而主动方法基于自适应技术^[6–16] 和故障诊断和分离 (Fault detection and isolation, FDI) 技术^[17–21] 设计动态控制策略补偿故障. 鲁棒控制技术和故障补偿控制技术重点描述容错控制系统的全局特征和实时动态特征.

众所周知, 被动容错的优点在于系统的性能, 如 H_2 , H_∞ 可以通过黎卡提方程^[1–2] 或者线性矩阵不等式方法^[3–5] 进行优化. 但是, 当可能出现的故障和系统冗余度增加时, 控制器设计将变得保守且可

lege of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819 3. State Key Laboratory of Integrated Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110819 4. College of Engineering, Bohai University, Jinzhou 121013

该文的英文版同时发表在 *Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 1, pp. 31–42, 2013.

达到的控制性能并不令人满意. 况且, 固定增益的控制器并不能有效地处理一些严重的时变执行器故障, 如非参数化卡死故障. 因此, 根据实时的故障特征, 选择一个已计算好的控制律或者在线综合一个新的控制策略的主动容错方法更值得应用. 基于 FDI 的主动容错方法可以利用 FDI 机构提供的故障信息, 设计比被动容错方法更为有效的控制器^[19]. 然而, FDI 机构会由于模型不确定或机构不精确等因素给出并不准确的故障信息. 不同于 FDI 方法需要一个机构去获取准确的故障信息, 自适应设计方法将故障估计值作为间接信息辅助设计控制器, 故不需要估计准确的故障信息. 当然, 必须指出附加的自适应机构在补偿故障的同时可能会导致系统的性能恶化. 因此, 本文的动机在于结合主动容错和被动容错的优点, 补偿执行器故障的同时优化系统的性能, 并描述应用自适应机构补偿故障会导致多少性能下降.

根据实际情况, 执行器故障主要包括如下几类: 中断^[1]、部分失效^[2]、偏移(加性)故障^[5, 8]和卡死故障^[12]. 非参数化时变卡死故障的特征不能用一些方程描述, 为系统所能发生的最严重的故障. 而常值和参数化卡死故障可以看成它的两个特殊情况. 由于故障无法预知, 可以利用自适应方法估计未知参数以补偿故障. 值得一提的是系统辨识方法^[22-25]可以有效地检测故障信号. 最近, 许多学者关注自适应方法补偿执行器故障. 文献 [6-7] 考虑了部分失效故障, 并利用间接自适应方法分别对线性和非线性系统给出性能跟踪结果. 通过具有 L_2 增益性能的自适应滑模设计, 文献 [8] 考虑执行器偏移故障补偿问题. 文献 [9-11] 提出直接自适应方法保证容错控制系统在参数化卡死故障下的稳定性. 文献 [12] 考虑非参数化卡死故障, 但要求已知故障的上界信息, 并且不能保证系统渐近跟踪. 而渐近稳定结果在文献 [13] 中得到, 且不需要故障的上界信息. 然而, 这些容错控制系统设计只在系统状态可测的假设下有效, 而这个假设在许多实际系统中无法满足. 况且, 尽管自适应方法可以有效地补偿执行器故障, 但上述系统不能优化系统的扰动抑制性能. 近年来, 通过定义一个自适应 H_∞ 性能指标, 文献 [14-15] 首次分别阐述了动态输出反馈和状态反馈设计下的容错控制系统自适应 H_∞ 性能. 但是系统并没有考虑卡死故障, 并且由于所提的自适应律不能估计时变参数, 所提出的方法在故障失效因子时变情况下失效. 需要指出它们对多个不同系统模式(故障模式)设计一个共有李亚普诺夫矩阵, 这会带来设计的保守性. 为了减少保守性, 可以利用模式依赖李亚普诺夫方程获得稳定化控制器增益, 使得 H_∞ 性能最优. 一些现有结果也通过模式依赖李亚普诺夫方程优化容错控制系统的 H_∞ 性能, 例如文献 [3-4]. 但这些方法并不适合于动态输出反馈情形, 且设计中并没有考虑卡死故障的补偿.

因此, 本文设计一个新的动态输出反馈控制器,

解决 H_∞ 性能优化和非参数化时变偏移/卡死故障补偿问题. 为了减少设计的保守性, 采用新的模式依赖李亚普诺夫方程得到稳定化控制器增益并通过线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMI) 方法优化 H_∞ 性能. 同时, 依赖未知控制参数的自适应估计值, 设计自适应控制增益方程消除故障和摄动的影响. 并通过 LMI 描述自适应增益方程进行故障补偿使系统性能下降的情况. 由此, 成功地结合 LMI 方法的鲁棒控制结果和自适应方法的补偿控制结果得到一个自适应容错 H_∞ 补偿控制器设计方法. 基于李亚普诺夫稳定性定理可以保证在执行器故障和摄动存在下, 自适应闭环系统的一致有界, 并有次优 H_∞ 性能.

本文的其他部分组织如下: 第 1 节描述容错控制问题, 第 2 节提出自适应动态输出反馈控制器设计方法, 第 3 节给出一个解耦线性降阶动态飞行系统的数值例子及其仿真结果, 第 4 节总结全文.

1 问题描述

符号标记. \mathbf{R} 代表实数集. 对一个实矩阵 E , $\|E\|$ 代表 E 的诱导范数. 给定矩阵 H_k , $k = 1, \dots, n$, $\text{diag}_{k=1}^n \{H_k\}$ 表示 H_k 为对角线上块对角矩阵, 并简记为 $\text{diag}_k \{H_k\}$. 为了简要表示分区对称矩阵, 记号 (*) 通用表示对称块.

考虑如下状态空间方程表示的连续时间线性时不变系统模型:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_3\mathbf{d}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^r$ 是测量输出, $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^s$ 表示调节输出, $\mathbf{w}(t) \in L_2^q[0, \infty]$ 定义为外部扰动, $\mathbf{d}(t) \in \mathbf{R}^p$ 是一个有界连续向量方程, 代表系统的摄动. \mathbf{A} , \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{B}_3 , \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 和 \mathbf{D}_{12} 是已知恰当维数的实常数矩阵.

考虑执行器的故障包括部分失效、中断、执行器偏移/卡死. 类似于文献 [13], 令 $u_{ij}^F(t)$ 代表来自第 i 个执行器在系统第 j 个故障模式下的信号. 则适用于许多实际系统如机械系统^[21]和飞控系统^[26]的一般执行器故障模型^[2, 12]可以描述如下:

$$u_{ij}^F(t) = \rho_i^j(t)u_i(t) + \sigma_i^j u_{si}(t) \quad (2)$$

其中, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, L$, $\rho_i^j(t)$ 是执行器效率因子, $\underline{\rho}_i^j$ 和 $\bar{\rho}_i^j$ 分别代表已知的 $\rho_i^j(t)$ 的下界和上界. 指数 j 表示系统的第 j 个模式, L 为模式总数, 包括正常模式 $j = 1$ 和故障模式 $j \in \{2, \dots, L\}$. $u_{si}(t)$ 表示第 i 个执行器的非参数化有界时变执行器偏移/卡死故障. 根据实际情况, 有 $0 \leq \underline{\rho}_i^j \leq \rho_i^j(t) \leq \bar{\rho}_i^j$, σ_i^j 是一个未知的常数, 定义为 $\sigma_i^j \in \{0, 1\}$. 则可用表 1 表示故障模型.

表 1 故障模型
Table 1 Fault model

故障模型	$\underline{\rho}_i^j$	$\bar{\rho}_i^j$	σ_i^j
正常	1	1	0
中断	0	0	0
部分失效	>0	<1	0
偏移	>0	≤1	1
卡死	0	0	1

定义

$$\mathbf{u}_j^F(t) = [u_{1j}^F(t), \dots, u_{mj}^F(t)]^T = \rho^j(t)\mathbf{u}(t) + \sigma^j\mathbf{u}_s(t)$$

其中, $\rho^j(t) = \text{diag}\{\rho_1^j(t), \dots, \rho_m^j(t)\}$, $\rho_i^j(t) \in [\underline{\rho}_i^j, \bar{\rho}_i^j]$, $\sigma^j = \text{diag}\{\sigma_1^j, \dots, \sigma_m^j\}$, $j = 1, 2, \dots, L$.

那么, 有如上结构的算子集可以表示为

$$\Delta_{\rho^j} = \{\rho^j(t) : \rho^j(t) = \text{diag}_i\{\rho_i^j(t)\}, \rho_i^j(t) \in [\underline{\rho}_i^j, \bar{\rho}_i^j]\} \quad (3)$$

定义如下集合

$$N_{\rho^j} = \{\rho^j(t) : \rho^j(t) = \text{diag}_i\{\rho_i^j(t)\}, \rho_i^j(t) = \underline{\rho}_i^j \text{ or } \rho_i^j(t) = \bar{\rho}_i^j\} \quad (4)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, L$. 可知集合 N_{ρ^j} 包含最多有 2^m 个元素.

为了描述方便, 对所有可能的故障模式 L , 采用如下统一的执行器故障模型:

$$\mathbf{u}^F(t) = \rho(t)\mathbf{u}(t) + \sigma\mathbf{u}_s(t) \quad (5)$$

其中, $\rho(t) = \text{diag}_i\{\rho_i(t)\} \in \{\rho^1(t), \dots, \rho^L(t)\}$.

由此, 带有执行器故障 (5) 的动态方程 (1) 可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B_2\rho(t)\mathbf{u}(t) + B_2\sigma\mathbf{u}_s(t) + \\ &\quad B_1\mathbf{w}(t) + B_3\mathbf{d}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= C_1\mathbf{x}(t) + D_{12}\rho(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C_2\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

注 1. 这里, $\mathbf{z}(t)$ 定义为调节输出, 是一个人为定义的变量. 由于卡死输入在 $\mathbf{z}(t)$ 是不可控的, 我们在调节输出中没有考虑卡死输入.

为了保证容错目标, 对系统的一个基本要求是系统 $(A, B_2\rho(t))$ 对任意故障模式 $\rho(t) \in \{\rho^1(t), \dots, \rho^L(t)\}$ 一致完全可控. 另外, 类似于文献 [13], 在自适应 H_∞ 容错控制设计中如下假设成立.

假设 1. 对任意执行器故障模式 $\rho(t) \in \{\rho^1(t), \dots, \rho^L(t)\}$, 有 $\text{rank}[B_2\rho(t)] = \text{rank}[B_2]$.

假设 2. 针对容错控制系统 (6), 存在一个恰当维数的矩阵方程 F 使得:

$$B_3 = B_2F \quad (7)$$

假设 3. 非参数化偏移/卡死故障和摄动为分段连续有界方程, 即存在已知正常数 $\underline{u}_s, \bar{u}_s$, 和 \underline{d}, \bar{d} 使得:

$$\underline{u}_s \leq \|\mathbf{u}_s(t)\| \leq \bar{u}_s, \quad \underline{d} \leq \|\mathbf{d}(t)\| \leq \bar{d} \quad (8)$$

注 2. 为了优化系统 H_∞ 性能并描述偏移/卡死故障和摄动对性能的影响, 假设偏移/卡死故障和摄动的界已知. 若系统不考虑扰动抑制性能, 则可以消除此假设^[12-13].

给出如下定义描述所考虑的问题.

定义 1. 考虑系统 (6). 假如对任意 $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$, 所对应的状态满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \epsilon$$

其中 ϵ 为小的正标量, 则系统为 ϵ -稳定.

定义 2^[15]. 考虑如下动态输出反馈设计下的闭环系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A_a\mathbf{x}(t) + B_a\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= C_a\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

令 $\gamma > 0$ 为一个给定常数, 若对任意 $\tau > 0$, 系统 (9) 输出 $\mathbf{z}(t)$ 在 $\mathbf{x}(0) = 0$ 下满足

$$\int_0^\infty \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t)dt + \tau \quad (10)$$

则系统 (9) 为有 γ 扰动抑制的稳定.

为了通过 LMI 方法得到闭环系统 (9) 的 H_∞ 性能, 给出如下著名的有界实引理.

引理 1. 考虑闭环系统 (9), 令 $G(s) = C_a(sI - A_a)B_a$, 假如存在一个实矩阵 $P = P^T > 0$ 和一个正标量 γ 使得:

$$\begin{bmatrix} A_aP + PA_a^T & B_a & PC_a^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

则系统稳定且 $G(s)$ 满足 $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma$.

根据式 (11) 中的项 $A_aP + PA_a^T$ 和 PC_a^T , 可知李亚普诺夫矩阵 P 和控制增益矩阵间存在密切的相互关系如乘积项. 如下引理利用多李亚普诺夫方程可以弱化两者间的关系, 并在设计中有有助于减少保守性.

引理 2^[27-28]. 考虑闭环系统 (9), 若存在对称正定矩阵 $X = P^{-1}$, 矩阵 $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 以及 $G \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 使得:

$$\begin{bmatrix} FA_a + A_a^T F^T & X - F + A_a^T G^T & FB_a & C_a^T \\ * & -(G + G^T) & GB_a & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

则式 (11) 成立.

$P^j > 0$ 等价于 $0 < X_{12}^j < X_{11}^j$, 且式 (48) 等价于

$$\begin{bmatrix} A_c' P_c^j + P_c^j A_c'^T & B_c' & P_c^j C_c'^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

其中, $A_c' = \begin{bmatrix} A & B_{2\rho} C_{K0} \\ B_{K0} C_2 & A_{K0} \end{bmatrix}$, $B_c' = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_c' = \begin{bmatrix} C_1 & D_{12\rho} C_{K0} \end{bmatrix}$.

另一方面, 在式 (21) 两边分别左乘和右乘 $\text{diag}\{P_c^{-j}, I, I, I\}$ 并设

$$P_c^{-j} = \begin{bmatrix} Y_{11}^j & -Y_{12}^j \\ -Y_{12}^j & Y_{12}^j \end{bmatrix}$$

根据引理 2, 假如存在恰当维数矩阵 F_c 和 G_c , 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & P_c^{-j} - F_c + A_c'^T G_c^T & F_c B_c' & C_c'^T \\ * & -(G_c + G_c^T) & G_c B_c' & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

其中, $\Upsilon_{11} = F_c A_c' + A_c'^T F_c^T$, 则式 (21) 成立. 由于式 (22) 意味着 $G_c + G_c^T > 0$, 则 G_c 是一个非奇异矩阵. 令 $G_c = \lambda F_c$ 和

$$F_c = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & \mu N_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

展开式 (22), 有:

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12}^j & \Xi_{13}^j \\ * & \Xi_{22}^j & \Xi_{23}^j \\ * & * & -\lambda(N_1 + N_1^T) \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ \Xi_{14}^j & N_1 B_1 & C_1^T \\ \Xi_{24}^j & N_3 B_1 & (D_{12\rho} C_{K0}^T) \\ -\lambda(N_2 + N_3^T) & \lambda N_1 B_1 & 0 \\ -\lambda\mu(N_2 + N_2^T) & \lambda N_3 B_1 & 0 \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

$\Xi_{11}, \Xi_{12}^j, \Xi_{13}^j, \Xi_{14}^j, \Xi_{22}^j, \Xi_{23}^j, \Xi_{24}^j$ 定义在式 (17). \square

注 3. 根据式 (22) 和式 (23), 若设 $\mu = -1$, $N_3 = N_2 = -Y_{12}$, $N_1 = Y_{11}$ 且 λ 选择足够小, 那么假如 $P_c^{-1} = P_c^{-j}$, $j = 1, 2, \dots, L$ 是式 (21) 的可行解, 它也是式 (22) 的一个解, 即式 (21) 和式 (22) 是等价的. 另外, 需要强调的是条件 (16) 不是一个凸条件. 但当 C_{K0} 给定, 且定义 $N_2 A_{K0}$ 和 $N_2 B_{K0}$ 为新变量, 则它成为一个线性矩阵不等式.

下一步设计增益方程 $K_1(t)$, $K_2(t)$ 和自适应律 $\hat{k}_3(t)$ 补偿执行器偏移/卡死故障和摄动. 根据式 (13), $K_1(t)$ 和 $K_2(t)$ 由如下方程给出:

$$K_1(t) = \frac{B_2^T \bar{Y}_{12} M_1 b \|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\| \hat{k}_3(t)}{\|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\|^2 a + \zeta \|M^T \bar{P}_c^{-1} B_{4c} D_{12c}^T\|^2} \quad (25)$$

$$K_2(t) = \frac{-B_2^T \bar{Y}_{11} M_2 b \|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\| \hat{k}_3(t)}{\|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\|^2 a + \zeta \|M^T \bar{P}_c^{-1} B_{4c} D_{12c}^T\|^2} \quad (26)$$

其中, $\mathbf{x}_e = [\mathbf{y}^T \quad \mathbf{x}_K^T]^T$, $\bar{P}_c^{-1} = \{P_c^{-j} : \max_j(\|P_c^{-j}\|)\}$, $\underline{P}_c^{-1} = \{P_c^{-j} : \min_j(\|P_c^{-j}\|)\}$, $j = 1, 2, \dots, L$, \bar{Y}_{11} 和 \bar{Y}_{12} 为 \bar{P}_c^{-1} 的元素, 定义为 $\bar{P}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & -\bar{Y}_{12} \\ -\bar{Y}_{12} & \bar{Y}_{12} \end{bmatrix}$, M 定义为

$$M = \begin{bmatrix} M_1 C_2 & 0 \\ 0 & M_2 C_2 \end{bmatrix}$$

且 M_1, M_2 为合适矩阵使得:

$$M_c^T M_c = \bar{P}_c^{-1} B_{4c} \rho^j B_{4c}^T \bar{P}_c^{-1} M \geq 0$$

且 ζ 是一个任意小的正标量, a, b 为合适的正常数, 并对任意 $\rho^j = \text{diag}_i\{\rho_i^j\} \in N_{\rho^j}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, L$, 当时间趋于无穷大系统状态收敛到一个小领域 ϵ 时满足:

$$\|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\|^2 a + \zeta \|M^T \bar{P}_c^{-1} B_{4c} D_{12c}^T\|^2 \leq \frac{\|\mathbf{x}_c^T M_c^T\|^2 b}{\|\mathbf{x}_c^T M_c^T\|^2 b} \quad (27)$$

$\hat{k}_3(t) \in R$ 有如下自适应律调节:

$$\frac{d\hat{k}_3(t)}{dt} = \text{Proj}_{[\underline{k}_3, \bar{k}_3]} \{\hat{k}_3\} \begin{cases} 0, & \hat{k}_3 = c\bar{k}_3 \\ r \|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\|, & \text{其他} \end{cases} \quad (28)$$

其中常数 $c \geq 1$ 是 \hat{k}_3 的一个加权值, 且

$$\underline{k}_3 = \frac{2\|\underline{P}_c^{-1} B_{2c}\|}{\|C_{2c}^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\|} \min_j(\|\sigma^j\| \underline{u}_s + \|F\| \underline{d}) \quad (29)$$

$$\bar{k}_3 = \frac{2\|\bar{P}_c^{-1} B_{2c}\|}{\|C_{2c}^T \bar{P}_c^{-1} B_{4c}\|} \max_j(\|\sigma^j\| \bar{u}_s + \|F\| \bar{d}) \quad (30)$$

其中, $C_{2c} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $r > 0$ 是一个根据实际情况设计的自适应增益, $\hat{k}_3(t_0)$ 有界. 由式 (28) 得若 $\hat{k}_3(t_0) \geq 0$, $\hat{k}_3(t) \geq 0$; $\text{Proj}\{\cdot\}$ 定义为投影算子^[29], 将 $\hat{k}_3(t)$ 的估计投影到区域 $[\underline{k}_3, \bar{k}_3]$.

注 4. 测量输出信号 $\mathbf{y}(t)$ 可以用于控制器和自适应机构的设计中. 因此, 根据定义 $\mathbf{x}_c = [\mathbf{x}; \mathbf{x}_K]$ 和

$\mathbf{x}_e = [\mathbf{y}; \mathbf{x}_K]$ 及式 (27) 中的条件, 系统状态将不会收敛到零, 而是在有限时间或渐近收敛到一个小的领域 ϵ . 值得注意的是 ϵ 的界与所选择的参数 a, b 和式 (27) 中描述的 ζ 有关.

另一方面, 令:

$$\tilde{k}_3(t) = \hat{k}_3(t) - k_3 \quad (31)$$

由于 k_3 是一个未知常数, 对 $\hat{k}_3 \leq ck_3$, 可以将误差方程写为

$$\frac{d\tilde{k}_3(t)}{dt} = r \|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\| \quad (32)$$

随后, 通过 $(\mathbf{x}_c, \tilde{k}_3)(t)$, 定义闭环系统 (14) 和误差系统 (32) 的一个解. 然后, 给出如下定理说明自适应闭环系统 (14) 和 (32) 的解全局有界.

定理 1. 考虑假设 1~3 下的自适应闭环系统 (14) 和 (32). 若存在矩阵 $0 < Y_{12}^j < Y_{11}^j$, $j = 1, 2, \dots, L$ 和任意恰当维数矩阵 N_1, N_2 和 N_3 使得式 (16) 成立. 则利用式 (13) 描述的动态输出反馈控制器 $\mathbf{u}(t)$ 和控制增益 A_K, B_K, C_K , 且 $K_1(t), K_2(t)$ 分别由式 (25) 和式 (26) 给出, 自适应律 \hat{k}_3 由式 (28) 确定, 可以保证闭环容错系统一致有界, 且对任意 $\rho(t) \in N_{\rho^j}$ 有次优 H_∞ 性能, 正常情况下, 即 $\rho(t) = 1$, 满足

$$\int_0^\infty \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t)dt \leq \gamma_n^2 \int_0^\infty \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t)dt + \epsilon^2 \|\bar{P}_c^{-1}\| + \frac{1}{r} \tilde{k}_3^2(0) \quad (33)$$

故障情况下, 即 $\rho \in \{\rho^2, \dots, \rho^L\}$, 满足

$$\int_0^\infty \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t)dt \leq \gamma_f^2 \int_0^\infty \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t)dt + \epsilon^2 \|\bar{P}_c^{-1}\| + \frac{1}{r} \tilde{k}_3^2(0) \quad (34)$$

证明. 针对自适应闭环系统 (14), 首先定义一个李亚普诺夫函数如下:

$$V(\mathbf{x}_c, \tilde{k}_3) = \mathbf{x}_c^T \underline{P}_c^{-j} \mathbf{x}_c + r^{-1} \tilde{k}_3^2 \quad (35)$$

其中, $\underline{P}_c^{-j} = \begin{bmatrix} Y_{11}^j & -Y_{12}^j \\ -Y_{12}^j & Y_{12}^j \end{bmatrix}$. 则利用不等式 $X^T Y + Y^T X \leq \xi X^T X + \xi^{-1} Y^T Y$ (X 和 Y 为有恰当维数的常数矩阵, $\xi > 0$), 且根据式 (25) 和式 (26), 对关于某一故障模式的 V 的时间导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{x}_c, \tilde{k}_3)}{dt} + \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) = & \mathbf{x}_c^T [A_c^T \underline{P}_c^{-j} + \underline{P}_c^{-j} A_c + C_c^T C_c] \mathbf{x}_c + 2\mathbf{x}_c^T \underline{P}_c^{-j} B_{1c} \mathbf{w} + \\ & 2\mathbf{x}_c^T \underline{P}_c^{-j} B_{2c} \mathbf{u}_s + 2\mathbf{x}_c^T \underline{P}_c^{-j} B_{3c} d + \\ & \mathbf{x}_c^T \underline{P}_c^{-j} B_{4c} \rho_c K_c \mathbf{x}_c + \frac{1}{2} \mathbf{x}_c^T C_c^T D_{12c} \rho_c K_c \mathbf{x}_c + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{x}_c^T K_c^T \rho_c D_{12c}^T C_c \mathbf{x}_c + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \mathbf{x}_c^T K_c^T \rho_c D_{12c}^T D_{12c} \rho_c K_c \mathbf{x}_c - \\ & \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} + 2r^{-1} \tilde{k}_3 \dot{\tilde{k}}_3 \leq \\ & \mathbf{x}_c^T [A_c^T \underline{P}_c^{-j} + \underline{P}_c^{-j} A_c + (1 + \frac{1}{2} \xi^{-1}) C_c^T C_c + \\ & \frac{1}{\gamma^2} \underline{P}_c^{-j} B_{1c} B_{1c}^T \underline{P}_c^j + \\ & \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} \xi) (D_{12c} \rho_c K_c)^T D_{12c} \rho_c K_c] \mathbf{x}_c - \\ & (\gamma \mathbf{w}^T - \frac{1}{\gamma} \mathbf{x}_c^T \underline{P}_c^{-j} B_{1c}) (\gamma \mathbf{w} - \frac{1}{\gamma} B_{1c}^T \underline{P}_c^{-j} \mathbf{x}_c) - \\ & \frac{\|\mathbf{x}_c^T M_c^T\|^2 b \|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\| \tilde{k}_3}{\|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\|^2 a + \zeta \|M^T \bar{P}_c^{-1} B_{4c} D_{12c}^T\|^2} + \\ & 2\mathbf{x}_c^T \underline{P}_c^{-j} B_{2c} \sigma \mathbf{u}_s + 2\mathbf{x}_c^T \underline{P}_c^{-j} B_{3c} d + 2r^{-1} \tilde{k}_3 \dot{\tilde{k}}_3 \quad (36) \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{x}_e = [\mathbf{y}^T \ \mathbf{x}_K^T]^T$. 由于

$$\begin{aligned} & \|(D_{12c} \rho_c K_c)^T D_{12c} \rho_c K_c\| \leq \\ & \left(\frac{\tilde{k}_3 b \|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\| \|M^T \bar{P}_c^{-1} B_{4c} D_{12c}^T\|}{\|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\|^2 a + \zeta \|M^T \bar{P}_c^{-1} B_{4c} D_{12c}^T\|^2} \right)^2 \leq \\ & \frac{c^2 \tilde{k}_3^2 b^2}{4a\zeta} \quad (37) \end{aligned}$$

则根据式 (27) 和式 (37), 可以将式 (36) 重新写为

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{x}_c, \tilde{k}_3)}{dt} + \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) \leq & \mathbf{x}_c^T \left[A_c^T \underline{P}_c^{-j} + \underline{P}_c^{-j} A_c + (1 + \frac{1}{2} \xi^{-1}) C_c^T C_c + \right. \\ & \left. \frac{1}{\gamma^2} \underline{P}_c^{-j} B_{1c} B_{1c}^T \underline{P}_c^{-j} + \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} \xi) \frac{c^2 \tilde{k}_3^2 b^2}{4a\zeta} I \right] \mathbf{x}_c - \\ & \|\mathbf{x}_e^T \underline{P}_c^{-1} B_{4c}\| \tilde{k}_3 + 2 \|\mathbf{x}_c^T \underline{P}_c^{-j} B_{2c}\| \|\sigma \mathbf{u}_s\| + \\ & 2 \|\mathbf{x}_c^T \underline{P}_c^{-j} B_{3c}\| \|F d\| + 2r^{-1} \tilde{k}_3 \dot{\tilde{k}}_3 \quad (38) \end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned} & A_c^T \underline{P}_c^{-j} + \underline{P}_c^{-j} A_c + (1 + \frac{1}{2} \xi^{-1}) C_c^T C_c + \\ & \frac{1}{\gamma^2} \underline{P}_c^{-j} B_{1c} B_{1c}^T \underline{P}_c^{-j} + \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} \xi) \frac{c^2 \tilde{k}_3^2 b^2}{4a\zeta} I < 0 \quad (39) \end{aligned}$$

然后, 应用 Schur 补引理并在式 (39) 两边分别左乘和右乘 $\text{diag}\{P_c^j, I, I, I\}$, 式 (39) 等价于如下 LMI:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11}^j & B_{1c} & P_c^j C_c^T & P_c^j \frac{c\tilde{k}_3 b}{2\sqrt{a\zeta}} \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & -(1 + \frac{1}{2} \xi^{-1})^{-1} I & 0 \\ * & * & * & \Upsilon \end{bmatrix} < 0 \quad (40)$$

其中, $\Upsilon_{11}^j = A_c P_c^j + P_c^j A_c^T$, $\Upsilon = -2(1 + \frac{1}{2} \xi)^{-1} I$. 根据引理 3, 对任意 $\rho \in N_{\rho^j}$ 可得控制器参数 A_K, B_K, C_K 和 $P_c^j, j = 1, 2, \dots, L$. 由此, 式 (39) 仍然满足.

其中, $\gamma = \gamma_n$, $\kappa = \kappa_n$, $j = 1$ (正常模式), $\gamma = \gamma_f$, $\kappa = \kappa_f$, $j \in \{2, \dots, L\}$ (故障模式), $\Psi_{11}^j = \kappa^{-1}(P^j - V - V^T)$, $\Xi^j = AP^j + P^j A^T - \kappa P^j + B_2 \rho W + W^T \rho B_2^T + J^j$, $\Psi_{14} = \kappa^{-1}(V^T C^T + W^T \rho D_{12}^T)$, Υ 定义于式 (40), $\Psi_{44} = -(1 + \frac{1}{2}\xi^{-1})^{-1}I$ 可行, 则存在一个控制增益 $C_{K0} = WV^{-1}$ 使得其为容错 H_∞ 控制器.

证明. 显然, 不等式 (40) 等价于存在一个常数 $\kappa > 0$ 使得:

$$\begin{bmatrix} P^j A_c^T + A_c P^j - \kappa P^j & B_1 & 0 & P^j \frac{c\bar{k}_3 b}{2\sqrt{a\zeta}} \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & \Delta^j & 0 \\ * & * & * & \Upsilon \end{bmatrix} + \Pi^T \kappa P^j \Pi < 0 \quad (48)$$

其中, $\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 & \kappa^{-1} C_c^T & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta^j = -(1 + \frac{1}{2}\xi^{-1})^{-1}I - \kappa^{-1} C_c P^j C_c^T$. 应用 Schur 补引理, 容易发现式 (48) 等价于

$$\begin{bmatrix} -\kappa^{-1} P^{-j} & I & 0 & \kappa^{-1} C_c^T & 0 \\ * & \Psi_{22}^j & B_1 & 0 & P^j \frac{c\bar{k}_3 b}{2\sqrt{a\zeta}} \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & \Delta^j & 0 \\ * & * & * & * & \Upsilon \end{bmatrix} < 0 \quad (49)$$

其中, $\Psi_{22}^j = P^j A_c^T + A_c P^j - \kappa P^j$. 式 (49) 分别左乘和右乘 $\text{diag}\{V^T, I, I, I, I\}$ 和 $\text{diag}\{V, I, I, I, I\}$, 有:

$$\begin{bmatrix} -\kappa^{-1} V^T P^{-j} V & V^T \\ * & \Psi_{22}^j \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ 0 & \kappa^{-1} V^T C_c^T & 0 \\ B_1 & 0 & P^j \frac{c\bar{k}_3 b}{2\sqrt{a\zeta}} \\ -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & \Delta^j & 0 \\ * & * & -2(1 + \frac{1}{2}\xi)^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad (50)$$

根据如下不等式

$$S^T G^{-1} S \geq S + S^T - G \quad (51)$$

其中, S 和 $G > 0$ 为有恰当维数的方阵, 可得到:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}^j & V^T & 0 & \kappa^{-1} V^T C_c^T & 0 \\ * & \Psi_{22}^j & B_1 & 0 & P^j \frac{c\bar{k}_3 b}{2\sqrt{a\zeta}} \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & \Delta^j & 0 \\ * & * & * & * & \Upsilon \end{bmatrix} < 0 \quad (52)$$

另一方面, 在 LMI (47) 的第 6 行和第 6 列应用 Schur 补引理并考虑式 (51), 得:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}^j & V^T & 0 & \Psi_{14} & 0 & 0 \\ * & \Xi^j & B_1 & 0 & B_2 \rho W & P^j \frac{c\bar{k}_3 b}{2\sqrt{a\zeta}} \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Phi^j & 0 \\ * & * & * & * & * & \Upsilon \end{bmatrix} < 0 \quad (53)$$

其中, $\Phi^j = -V^T[(P^j - V)J^{-j}(P^j - V)]^{-1}V$. 然后对上述 LMI 的第 5 行和第 5 列再应用 Schur 补引理, 得:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}^j & V^T & 0 & \Psi_{14} & 0 \\ * & \Omega^j & B_1 & 0 & P^j \frac{c\bar{k}_3 b}{2\sqrt{a\zeta}} \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \Upsilon \end{bmatrix} < 0 \quad (54)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Omega^j = & \Xi^j + \\ & B_2 \rho LV^{-1}(P^j - V)J^{-1}(P^j - V)^T V^{-T} W^T \rho B_2^T \end{aligned} \quad (55)$$

显然, 由于式 (47) 意味着 $U + U^T > 0$, 则 U 是一个非奇异矩阵. 由式 (51) 并考虑 $C_{K0} = LV^{-1}$, 根据式 (55) 有:

$$\begin{aligned} \Omega \geq & \Xi^j + B_2 \rho LV^{-1}(P^j - V) + \\ & (P^j - V)^T V^{-T} W^T \rho B_2^T - J^j = \\ & \Xi^j + B_2 \rho C_{K0} P^j - B_2 \rho W + \\ & P^j C_{K0}^T \rho B_2^T - W^T \rho B_2^T - J^j = \\ & (A + B_2 \rho C_{K0}) P^j + P^j (A + B_2 \rho C_{K0})^T - \kappa P^j \end{aligned} \quad (56)$$

由式 (54) 和式 (56), 得:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}^j & V^T & 0 & \kappa^{-1} V^T C_c^T & 0 \\ * & \Psi_{22}^j & B_1 & 0 & P^j \frac{c\bar{k}_3 b}{2\sqrt{a\zeta}} \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \Upsilon \end{bmatrix} < 0 \quad (57)$$

由于 $\kappa^{-1} C_c P^j C_c^T > 0$, 则根据式 (57), 可以保证式 (52) 可行. 由此, 式 (40) 满足. \square

注 6. 根据利用多李亚普诺夫方程减少设计 LMI 的保守性的想法, 引理 3 和引理 4 提出了模式依赖李亚普诺夫方程对对应的故障模式设计多个李亚普诺夫函数. 显然, 此设计减少了对所有故障模式设计一个共有李亚普诺夫函数的保守性.

由定理 1、推理 1 和引理 4, 提出如下算子获取控制参数并优化正常和故障情形下系统的自适应 H_∞ 性能.

算子 1. 令 γ_n 和 γ_f 分别定义为闭环系统 (14) 的正常情形和故障情形下自适应 H_∞ 性能的界. 则 γ_n 和 γ_f 由如下步骤最小化.

步骤 1.

$$\min \alpha \eta_n + \beta \eta_f, \quad \text{s.t.} \quad (47) \quad (58)$$

则得到 C_{K0} .

步骤 2. 令 $N_2 A_{K0} = \bar{A}_{K0}$ 且 $N_2 B_{K0} = \bar{B}_{K0}$.

$$\min \alpha \eta_n + \beta \eta_f, \quad \text{s.t.} \quad 0 < Y_{12} < Y_{11} \text{ 和 } (??) \quad (59)$$

其中, $\eta_n = \gamma_n^2$, $\eta_f = \gamma_f^2$, 且 α 和 β 为加权系数. 由于系统大多数时间在正常情形下运行, 可以选择 $\alpha > \beta$.

由定理 1 和引理 4, $k_3(t)$ 的上界即 \bar{k}_3 需要用来解 H_∞ 性能 γ_n 和 γ_f . 然而, 根据式 (29) 和式 (30), \underline{P}_c^{-1} 和 \bar{P}_c^{-1} 用来获得 \bar{k}_3 . 由此, 介绍如下算子获取 \bar{k}_3 , 以便优化 H_∞ 性能.

算子 2.

步骤 1. 假设在迭代 $g = 0$, 给定任意初始解 \bar{k}_3 有效.

步骤 2. 解决问题 (58) 得到 C_{K0}^g , 然后通过解式 (59), 得到 $P_{c,g}^{-j}$, $j = 1, 2, \dots, L$, 由此得到 $\bar{P}_{c,g}^{-1}$ 和 $\underline{P}_{c,g}^{-1}$.

步骤 3. 设 $\delta_g = \frac{2\|\bar{P}_c^{-1} B_{2c}\|}{\|C_{c,g}^T \bar{P}_c^{-1} B_{4c}\|} \max_j (\|\sigma^j\| \bar{u}_s + \|F\| \bar{d})$. 假如 $\delta_g > \delta_{g-1}$, 则返回步骤 2. 否则停止迭代并解出 P_c^{-j} , A_K , B_K , C_K , γ_n , γ_f .

注 7. 与现有文献 [14–15] 通过间接自适应和 LMI 方法的自适应容错 H_∞ 控制设计相比, 本文方法解决了更一般的执行器故障. 本文的直接自适应方法解决了偏移/卡死执行器故障 $\mathbf{u}_s(t)$ 和时变失效因子 $\rho(t)$. 另外, 本文利用模式依赖李亚普诺夫方程减少设计保守性, 而文献 [14–15] 并未有此做法.

3 数值例子

考虑文献 [17] 应用的线性化动态飞行器系统进行仿真以验证所提方法的有效性. 额外加上干扰输入和调节输出的系统动态方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + B_1 \mathbf{w}(t) + B_2 \mathbf{u}(t) + B_2 \mathbf{F} \mathbf{d}(t) \\ z(t) &= C_1 \mathbf{x}(t) + D_{12} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C_2 \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (60)$$

其中, $\mathbf{x}(t) = [\nu(t), \iota(t), \vartheta(t)]^T$, $\mathbf{u}(t) = [\delta_{DT}, \delta_{AI}, \delta_{RU}, \delta_{RTV}, \delta_{YTV}]$, ν 表示侧滑角, ι 表示绕 X 轴角速度, ϑ 表示绕 Z 轴角速度, δ_{DT} 表示差动式尾翼偏转角, δ_{AI} 为副翼偏转角, δ_{RU} 为方向舵偏转角, δ_{RTV} 为绕 X 轴推力矢量偏转角, δ_{YTV} 为绕 Z 轴推力矢量偏转角. 且

$$A = \begin{bmatrix} -0.059 & 0.496 & -0.868 \\ -5.513 & -0.939 & 0.665 \\ 0.068 & 0.026 & -0.104 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.006 & 0.006 & 0.004 & 0 & 0.09 \\ 1.879 & 1.328 & 0.029 & 0.675 & 0.217 \\ -0.109 & -0.096 & -0.084 & 0.007 & -2.974 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 1 & 0 & -0.1 \\ 0 & -0.5 & 0.2 & 1 & 0.1 \end{bmatrix}^T$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

考虑如下四种系统可能的模式:

1) 正常模式 1. 所有五个执行器正常运行, 即 $\rho_1^1 = \rho_2^1 = \rho_3^1 = \rho_4^1 = \rho_5^1 = 1$.

2) 故障模式 2. 第一个执行器正常运行, 第二个和第三个执行器发生中断或偏移或卡死故障, 第四个和第五个执行器可能正常运行, 也可能部分失效, 描述为: $\rho_1^2 = 1, \rho_2^2 = \rho_3^2 = 0, a_4 \leq \rho_4^2 \leq 1, a_5 \leq \rho_5^2 \leq 1, a_4 = 0.5, a_5 = 0.6$, 其中 a_4, a_5 分别表示为第四个和第五个执行器最大的失效值.

3) 故障模式 3. 第二个执行器正常运行, 第四个和第五个执行器发生中断或者偏移或卡死故障, 第一个和第三个执行器可能正常, 也可能部分失效, 即 $\rho_2^3 = 1, \rho_4^3 = \rho_5^3 = 0, b_1 \leq \rho_1^3 \leq 1, b_3 \leq \rho_3^3 \leq 1, a_1 = 0.3, a_3 = 0.4$, 其中 a_1, a_3 分别表示为第一个和第三个执行器最大的失效值.

4) 故障模式 4. 第三个和第四个执行器正常运行, 第二个执行器发生中断或者偏移或卡死故障, 第一个和第五个执行器可能正常, 也可能部分失效, 即 $\rho_3^4 = \rho_4^4 = 1, \rho_2^4 = 0, b_1 \leq \rho_1^4 \leq 1, b_5 \leq \rho_5^4 \leq 1, a_1 = 0.5, a_5 = 0.4$, 其中 a_1, a_5 分别表示为第一个和第五个执行器最大的失效值.

仿真中考虑如下故障情形, 即在 6 秒之前, 系统运行正常, 且扰动 $\mathbf{d}(t) = [-0.5, 0.5 \sin(0.2t)]^T$ 从开始 ($t \geq 0$) 即影响系统. 第 6 秒时, 第二个执行器卡死在 $u_{s2}(t) = 1 + 0.5 \sin(0.5t) + 0.5 \cos(2t)$ 上, 第三个执行器中断, 并且第四个执行器部分失效, 描述为 $\rho_4 = 1 - 0.03t$ 直到失效 50%.

由本列中所考虑的 $\mathbf{d}(t)$ 和 $\mathbf{u}_s(t)$, 设 $\bar{k}_3 = 1.5$. 利用算子 1, 取 $\alpha = 10, \beta = 1$, 并且为了防止得到不合实际的控制器大增益, 在式 (59) 中对 B_{K0} 上强加一个限制条件:

$$\begin{bmatrix} -10000 & \bar{B}_{K0} \\ \bar{B}_{K0}^T & -10000 \end{bmatrix} < 0$$

则得到闭环系统的 H_∞ 性能为 4.3447 (正常情形) 和 7.8300 (故障情形), 所取的参数如下:

$$\begin{aligned} a &= 0.1, \quad b = 1, \quad c = 1.1, \quad \zeta = 0.03, \quad \lambda = 0.05 \\ \kappa &= 2.5, \quad \xi = 0.1, \quad \mu = -1 \end{aligned}$$

根据算子 2, $\bar{k}_3 = 1.5$ 仍然适合处理次优 H_∞ 问题. 值得一提的是, 当只考虑一个共有李亚普诺夫函数时, 在相同的参数取值下, 由 LMI (40) 得到闭环系统的 H_∞ 性能在正常和故障情形下分别为 5.5031 和 11.5700. 由此, 所提出的模式依赖李亚普诺夫方程方法比共有李亚普诺夫方程方法有更小的保守性. 另一方面, 不考虑偏移/卡死故障的补偿, 系统 H_∞ 性能指标 γ_n 和 γ_f 分别为 1.1495 和 2.2590. 由此, 容易看出自适应机构补偿故障致使系统性能恶化的情况.

为了显示本文所提方法的优点, 给出与本文方法相关的参数依赖李亚普诺夫方程方法的比较结果. 由于一些方法仅针对状态反馈情况设计, 我们把其结果代替引理 4 解得 C_K , 并应用所得到的解通过算子 1 和 2 获得 H_∞ 性能指标 γ_n 和 γ_f . 表 2 列出的比较结果显示本文方法在本例中优于现有方法.

表 2 H_∞ 性能指标对比
(符号“-”表示所对应的 LMI 不可行)

Table 2 Comparisons of H_∞ performance indexes
(“-” denotes that the corresponding LMI is infeasible.)

H_∞ 性能指标	γ_n	γ_f
引理 4	4.3447	7.8300
文献 [30] 定理 4	4.5412	8.4549
文献 [28] 定理 4	6.2058	12.4126
文献 [3] 定理 3.1	—	—
文献 [4] 引理 2	—	—

为进一步验证所提自适应方法的有效性, 仿真中选择如下参数和初始条件:

$$\begin{aligned} r &= 50, \quad \mathbf{x}(0) = [-2, 1, -1], \quad \mathbf{x}_K(0) = 0 \\ \hat{k}_3(0) &= 0, \quad \epsilon = 0.05 \end{aligned}$$

图 1 是利用动态输出反馈控制器在如上所述故障情形下系统状态的响应曲线. 图 2 描述控制器状态响应曲线.

图 3 给出控制器参数 \hat{k}_3 的估计曲线. 由于自适应增益 r 选择足够大 (本例 $r = 50$), 估计曲线很快到达其上界 \bar{k}_3 . 图 4 是控制器输出的响应曲线. 由于仿真中某些执行器发生故障, 因此图 4 中的控制信号不是执行器的运行状态曲线. 为了展示所提自适应控制器与固定增益控制器相比的有效性, 图 5 给出了没有自适应控制输入 $K_2(t)$ 时的系统状态曲线. 显然, 系统有自适应控制增益方程时的响应更好. 根据图 1~4 得知估计值收敛, 并闭环容错控制系统在执行器故障和摄动存在下一致有界.

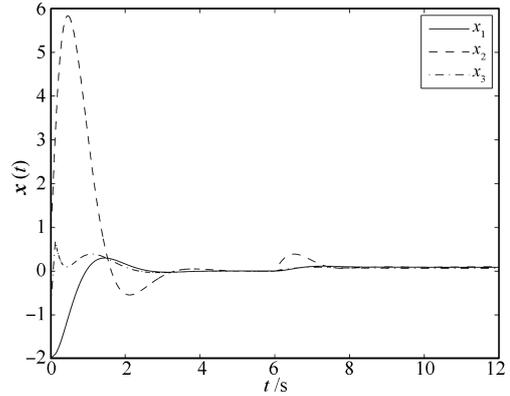


图 1 系统状态 $\mathbf{x}(t)$ 响应曲线

Fig. 1 Response curves of the system states $\mathbf{x}(t)$

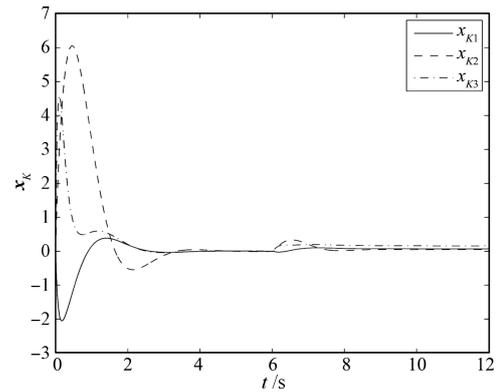


图 2 动态输出反馈控制器状态 $\mathbf{x}_K(t)$ 响应曲线

Fig. 2 Response curves of the dynamic output feedback controller states $\mathbf{x}_K(t)$

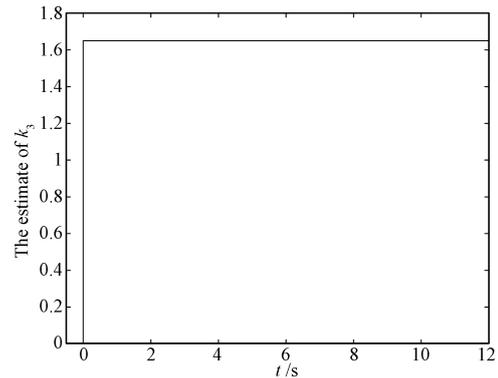


图 3 控制器参数 k_3 估计响应曲线

Fig. 3 Response curve of the estimate of controller parameter k_3

4 结论

本文介绍一个新的动态输出反馈设计方法, 解决带有执行器故障和摄动补偿的容错 H_∞ 控制问题. 采用一般执行器故障模型, 包含正常运行、部分失效、中断和非参数化偏移/卡死执行器故障. 提出模式依赖李亚普诺夫方法的线性矩阵不等式条件得到更少保守性的次优容错 H_∞ 控制增益. 基于对控

制参数的估计, 设计直接自适应策略自动补偿执行器故障和摄动的影响. 然后综合 LMI 方法和自适应方法构造动态输出反馈控制器保证系统稳定性. 进一步, 系统性能恶化和执行器故障和摄动补偿间的关系通过 LMI 清楚呈现. 数值例子显示了所提方法的有效性.

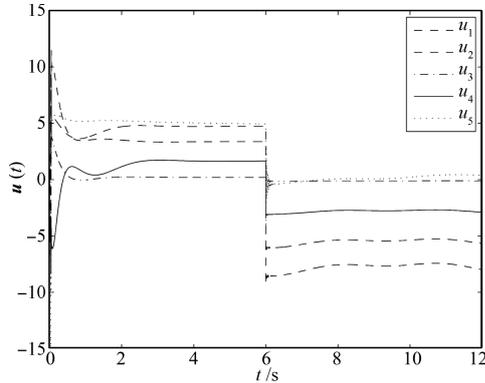


图 4 控制器输出 $u(t)$ 响应曲线

Fig. 4 Response curves of the controller outputs $u(t)$

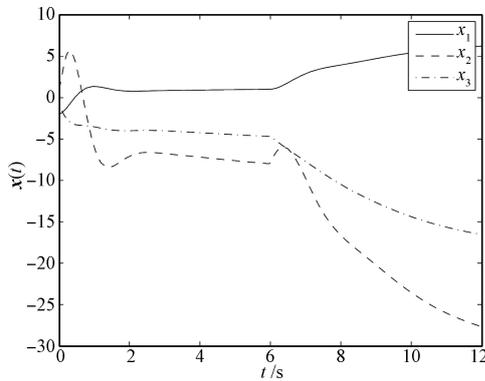


图 5 无自适应控制输入的系统状态 $x(t)$ 响应曲线

Fig. 5 Response curves of the system states $x(t)$ without adaptive control inputs

References

- 1 Veillette R J, Medanic J B, Perkins W R. Design of reliable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(3): 290–304
- 2 Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Reliable H_∞ controller design for linear systems. *Automatica*, 2001, **37**(5): 717–725
- 3 Feng L, Wang J L, Poh E, Liao F. Reliable H_∞ aircraft flight controller design against faults with state/output feedback. In: Proceedings of the 2005 American Control Conference. Portland, OR, USA: IEEE, 2005. 2664–2669
- 4 Wu H N, Zhang H Y. Reliable H_∞ fuzzy control for continuous-time nonlinear systems with actuator failures. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, **14**(5): 609–618
- 5 Zhang K, Jiang B, Staroswiecki M. Dynamic output feedback-fault tolerant controller design for Takagi-Sugeno fuzzy systems with actuator faults. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, **18**(1): 194–201
- 6 Ye D, Yang G H. Adaptive fault-tolerant tracking control against actuator faults with application to flight control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, **14**(6): 1088–1096
- 7 Jiang B, Gao Z F, Shi P, Xu Y F. Adaptive fault-tolerant tracking control of near-space vehicle using Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, **18**(5): 1000–1007
- 8 Hu Q. Robust adaptive sliding-mode fault-tolerant control with L_2 -gain performance for flexible spacecraft using redundant reaction wheels. *IET Control Theory & Applications*, 2010, **4**(6): 1055–1070
- 9 Tao G, Joshi S M. Adaptive output feedback compensation of variant actuator failures. In: Proceedings of the 2005 American Control Conference. Portland, OR, USA: IEEE, 2005. 4862–4867
- 10 Tang X D, Tao G, Joshi S M. Adaptive actuator failure compensation for nonlinear MIMO systems with an aircraft control application. *Automatica*, 2007, **43**(11): 1869–1883
- 11 Liu Y, Tang X D, Tao G, Joshi S M. Adaptive compensation of aircraft actuation failures using an engine differential model. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2008, **16**(5): 971–982
- 12 Tao G, Joshi S M, Ma X L. Adaptive state feedback and tracking control of systems with actuator failures. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(1): 78–95
- 13 Jin X Z, Yang G H. Robust adaptive fault-tolerant compensation control with actuator failures and bounded disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(3): 305–309
- 14 Yang G H, Ye D. Adaptive fault-tolerant H_∞ control via dynamic output feedback for linear systems against actuator faults. In: Proceedings of the 2006 Conference on Decision and Control. San Diego, CA, USA: IEEE, 2006. 3524–3529
- 15 Yang G H, Ye D. Reliable H_∞ control of linear systems with adaptive mechanism. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(1): 242–247
- 16 Fan L L, Song Y D. Fault-tolerant control and disturbance attenuation of a class of nonlinear systems with actuator and component failures. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(5): 623–628
- 17 Chen W, Chowdhury F N. Analysis and detection of incipient faults in post-fault systems subject to adaptive fault-tolerant control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2008, **22**(9): 815–832
- 18 Boskovic J D, Mehra R K. A decentralized fault-tolerant control system for accommodation of failures in higher-order flight control actuators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, **18**(5): 1103–1115
- 19 Maki M, Jiang J, Hagino K. A stability guaranteed active fault-tolerant control system against actuator failures. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2004, **14**(12): 1061–1077
- 20 Mao Z H, Jiang B, Shi P. Fault-tolerant control for a class of nonlinear sampled-data systems via a Euler approximate observer. *Automatica*, 2010, **46**(11): 1852–1859

- 21 Blanke M, Kinnaert M, Lunze J, Staroswiecki M. *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Berlin: Springer-Verlag, 2006
- 22 Ding F, Liu X P. Auxiliary model-based stochastic gradient algorithm for multivariable output error systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 993–998
- 23 Ding F. Several multi-innovation identification methods. *Digital Signal Processing*, 2010, **20**(4): 1027–1039
- 24 Wang D Q, Ding F. Least squares based and gradient based iterative identification for Wiener nonlinear systems. *Signal Processing*, 2011, **91**(5): 1182–1189
- 25 Ding J, Han L L, Chen X M. Time series AR modeling with missing observations based on the polynomial transformation. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, **51**(5–6): 527–536
- 26 Adams R J, Buffington J M, Sparks A G, Banda S S. *Robust Multivariable Flight Control*. London: Springer-Verlag, 1994
- 27 de Oliveira P J, Oliveira R C L F, Leite V J S, Montagner V F, Peres P L D. H_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 2004, **40**(6): 1053–1061
- 28 He Y, Wu M, She J H. Improved bounded-real-lemma representation and H_∞ control of systems with polytopic uncertainties. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2005, **52**(7): 380–383
- 29 Ioannou P A, Sun J. *Robust Adaptive Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996
- 30 Geromel J C, Korogui R H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(12): 1984–1989



金小峥 沈阳大学装备制造综合自动化重点实验室副教授。2004年在浙江理工大学机械电子工程专业获得学士学位, 2010年在东北大学控制理论与控制工程专业获得博士学位。主要研究方向为容错控制, 动态复杂网络同步与控制。本文通信作者。E-mail: jin445118@163.com

(**JIN Xiao-Zheng** Associate professor at the Key Laboratory of Manufacturing Industrial Integrated Automation, Shenyang University. He received his B. S. degree in electromechanical engineering from Zhejiang SCI-TECH University in 2004 and Ph. D. degree in control theory and control engineering from Northeastern University in 2010, respectively. His research interest covers fault-tolerant control, synchronization, and control of complex dynamical networks. Corresponding author of this paper.)



杨光红 东北大学信息科学与工程学院教授。分别于1983年和1986年在东北工学院获得学士和硕士学位, 1994年获得东北大学博士学位。1996年作为博士后加入南洋理工大学。2001年至2005年作为研究型科学家/资深研究型科学家在南洋理工大学工作。主要研究方向为容错控制, 故障诊断与分离, 非脆弱控制和鲁棒控制。E-mail: yangguanghong@ise.neu.edu.cn

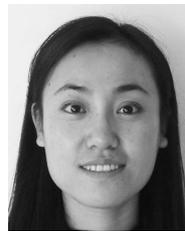
(**YANG Guang-Hong** Professor at the College of Information Science and Engineering, Northeastern University. He received his B. S. and M. S. degrees in Northeast University of Technology in 1983 and 1986, respectively, and the Ph. D. degree in control engineering from Northeastern University in 1994. He joined the Nanyang Technological University in 1996 as a postdoctoral fellow. From 2001 to 2005, he was a research scientist/senior research scientist with the National University of Singapore. His research interest covers fault-tolerant control, fault detection and isolation, non-fragile control systems design, and robust control.)



常晓恒 渤海大学工学院副教授。分别于1998年和2004年在辽宁工程技术大学获得学士和硕士学位, 并于2007年在东北大学获得博士学位。主要研究方向为模糊控制和时滞系统。

E-mail: changxiaoheng@sina.com

(**CHANG Xiao-Heng** Associate professor at the College of Engineering, Bohai University. He received his B. S. and M. S. degrees from Liaoning Technical University in 1998 and 2004, and his Ph. D. degree from the Northeastern University in 2007, respectively. His research interest covers fuzzy control and delay systems.)



车伟伟 沈阳大学装备制造综合自动化重点实验室副教授。分别于2002年和2005年在渤海大学获得学士和硕士学位, 2008年在东北大学获得博士学位。主要研究方向包括非脆弱控制、量化控制以及它们在网络化控制系统中的应用。E-mail: cwwemail1980@126.com

(**CHE Wei-Wei** Associate professor at the Key Laboratory of Manufacturing Industrial Integrated Automation, Shenyang University. She received her B. S. and M. S. degrees from Bohai University in 2002 and 2005, and her Ph. D. degree from Northeastern University in 2008, respectively. Her research interest covers non-fragile control, quantization control and their applications to networked control system design.)