

## 受损多智能体系统的信息一致性

严卫生<sup>1</sup> 李俊兵<sup>1</sup> 王银涛<sup>1</sup>

**摘要** 针对受损多智能体系统的信息一致性问题, 基于代数图论提出了联合  $r$  连通概念, 给出了当系统中的部分成员受损或离开后不能继续原有工作时, 其余成员仍可实现一致性的充要条件. 研究表明, 在此条件下系统可失去成员的数量取决于系统的通信能力. 仿真实例验证了理论分析结果的正确性和有效性.

**关键词** 受损系统, 多智能体, 一致性, 时变拓扑, 联合  $r$  连通

**引用格式** 严卫生, 李俊兵, 王银涛. 受损多智能体系统的信息一致性. 自动化学报, 2012, 38(11): 1880–1884

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2012.01880

### Consensus for Damaged Multi-agent System

YAN Wei-Sheng<sup>1</sup> LI Jun-Bing<sup>1</sup> WANG Yin-Tao<sup>1</sup>

**Abstract** In this paper, a theoretical framework for information consensus problem was presented for damaged multi-agent networked systems with an emphasis on the dynamically changing topology. Based on the algebraic graph theory, a new concept of jointly  $r$ -connected for digraph was proposed, and a sufficient and necessary condition for the consensus problem was established when some members of the system were damaged or left the system for other missions. It was shown that the number of the members which can be lost depends on the communication ability of the system. Finally, simulation results were used to demonstrate the effectiveness and correctness of the theoretical work.

**Key words** Damaged system, multi-agent, consensus, switching topology, jointly  $r$ -connected

**Citation** Yan Wei-Sheng, Li Jun-Bing, Wang Yin-Tao. Consensus for damaged multi-agent system. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(11): 1880–1884

近年来, 由于智能体的信息一致性研究在地面移动机器人、自动高速公路系统、卫星的集群控制等方面的越来越多的应用, 受到了国内外众多学者的广泛关注<sup>[1–11]</sup>. 多智能体系统常用于完成危险环境中的任务, 如高电压、矿山深井作业等, 这些环境极易对智能体造成损害; 尤其是在军事领域, 智能体更容易遭到攻击致使无法继续群体工作. 因此, 如何在上述情况下确保受损系统的信息一致性是亟待研究的课题.

Vicsek 等<sup>[1]</sup> 提出了一种离散多智能体模型, 并通过大量的模拟实验结果表明, 在各智能体具有不同的初始方向角, 以及可以通信的成员数量随时间改变的情况下, 所有智能体可利用最近邻居协议实现朝同一方向移动. 文献 [2] 基于无

向图理论对 Vicsek 的模型提供了理论解释, 但其中要求各智能体之间能够进行双向通信. 文献 [3] 分三种情况详细研究了固定和时变通信结构网络系统的一致性, 即: 1) 固定通信结构的有向网络系统; 2) 时变通信结构的有向网络系统; 3) 具有通信时延的固定通信结构无向网络系统, 给出了相应的通信协议和收敛性分析, 得到了收敛速度和网络通信图代数连通性的直接关系. Ren 等<sup>[4]</sup> 把该结果扩展到了更为一般的单向通信情形, 针对离散和连续的时间通信协议, 得到了实现多智能体一致性更加宽泛的条件, 即在各个通信区间内, 只需系统的动态通信结构图包含一棵生成树, 则可以实现信息一致性. 此外, 作者进一步研究了仅有部分成员可进行局部通信情况下的一致性追踪问题<sup>[5]</sup>. 文献 [6] 考虑了线性离散系统的信息一致性问题, 利用独立于其他时刻的有向图来描述系统的通信结构, 通过简单遍历思想得到了实现一致性的充要条件, 并且计算了一致性收敛的平均值和随机方差<sup>[7]</sup>. 对于单向和双向通信情况, 文献 [8] 给出了有效的分布式算法, 并研究了有限时间状态的一致性. Sun 等<sup>[9]</sup> 基于树形变换思想, 研究了具有非一致有界时延时变拓扑和间歇通信以及允许数据丢包等情况下的多智能体系统一致性问题. 对于连续时间系统的异步一致性问题, 文献 [10] 利用不连续思想, 通过给出可以克服信道不稳定的一致性算法, 解决了具有有界通信时延动态连续系统的异步一致性问题. 文献 [11] 基于通信拓扑 Laplacian 矩阵特征值, 给出了多智能体系统一致性的 Nyquist 稳定性判据. 高维离散系统和具有输入限制的一致性问题参见文献 [12–13].

总的来说, 上述研究工作对多智能体系统的信息一致性做了有益的理论和实践探索, 但是还有一些问题需要考虑, 如系统的部分成员受损后致使通信结构发生变化的情况下, 如何确保信息的一致性; 亦或由于任务的分配而形成多个子系统时, 各子系统的信息一致性问题等.

针对上述问题, 本文基于代数图论知识, 通过研究有向图的联合  $r$  连通性质, 证明了当多智能体系统失去  $r - 1$  个成员后, 在系统通信结构图的联合中, 当且仅当任意两个顶点之间含有  $r$  条互不相交的有向路时, 系统仍可实现一致性, 并利用数值仿真验证了理论分析结果的正确性.

本文组织如下: 第 1 节介绍了用于表示多智能体系统通信结构以及信息传递的图论和矩阵论知识, 并对系统的信息一致性问题进行了描述; 第 2 节是本文的主要工作, 给出了多智能体系统在失去若干成员后仍可实现信息一致性的充要条件; 第 3 节给出了相应的仿真结果; 第 4 节是本文的结论, 得出了在系统可以保持一致性的前提下, 允许失去成员的数量取决于系统的通信能力.

## 1 预备知识以及问题描述

### 1.1 图论和矩阵论相关知识

用有向赋权图  $\mathcal{G}$  表示多智能体系统的通信结构.  $\mathcal{G} = (V, E, D)$  表示一个有向赋权图, 其中,  $V = \{v_i : i \in \mathcal{I}\}$  为顶点集合,  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \geq 2$ ,  $E \subseteq V \times V$  为边的集合,  $e_{ij} = (v_i, v_j)$  为  $\mathcal{G}$  中的有向边,  $D = [d_{ij}]$  中与之对应的元素非零, 即  $d_{ij} > 0$  当且仅当  $e_{ij} \in E$ , 否则  $d_{ij} = 0$ ; 此外, 对所有  $i \in \mathcal{I}$ , 有  $d_{ii} > 0$ . 顶点  $v_i$  的邻居集合表示为  $N_i = \{v_j \in V : (v_j, v_i) \in E\}$ . 若  $(v_i, v_j)$  是  $\mathcal{G}$  的一个有向边, 则  $v_i$  称作  $v_j$  的父节点,  $v_j$  称作  $v_i$  的子节点. 一个有向树是有向图, 其中除了唯一的根节点没有父节点以

收稿日期 2011-04-28 录用日期 2012-07-25  
Manuscript received April 28, 2011; accepted July 25, 2012  
国家自然科学基金 (60875071), 教育部博士点基金 (200806990008) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60875071) and Doctoral Foundation of Chinese Ministry of Education (200806990008)  
本文责任编辑 姚力  
Recommended by Associate Editor YAO Li  
1. 西北工业大学航海学院 西安 710072  
1. College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072

外, 其余的顶点都有唯一的父节点, 并且根节点可以通过有向路径与其余任何顶点相连. 生成树是由有向图得到的可以连接所有顶点有向树. 若对  $\mathcal{G}$  中任意两个顶点  $x$  和  $y$ , 存在一个互不相交的有向路  $(x, y)$ , 则称  $\mathcal{G}$  是强连通的. 令  $\mathcal{G}$  是至少含有  $k + 1$  个顶点的有向图, 若对每一个顶点集  $\mathcal{S}$ ,  $|\mathcal{S}| \leq k - 1$ , 使得子图  $\mathcal{G} - \mathcal{S}$  是强连通的, 则称  $\mathcal{G}$  是  $k$ -连通的. 时间区间  $[t_i, t_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots$  上时变有向图  $\mathcal{G}(t')$  的联合是一个有向图  $\mathcal{G}(t)$ , 其顶点和  $\mathcal{G}(t')$  相同, 边的集合为  $E(\mathcal{G}(t)) = \bigcup_{t' \in [t_i, t_{i+1})} E(\mathcal{G}(t'))$ .

**引理 1**<sup>[14]</sup>. 令  $\mathcal{G}$  是一个有向图,  $x, y$  是  $\mathcal{G}$  中  $V(\mathcal{G})$  两个不相同的顶点, 且  $xy \notin E(\mathcal{G})$ . 两两内部不相交的  $(x, y)$  有向路的最大条数等于删去它们就会破坏  $\mathcal{G}$  中所有  $(x, y)$  有向路的顶点的最少数.

**引理 2.** 令  $\mathcal{G}$  是有向图, 则  $\mathcal{G}$  是  $k$ -连通的, 当且仅当  $V(\mathcal{G})$  中任意两个不同的顶点  $x$  和  $y$  之间存在  $k$  条互不相交的有向路  $(x, y)$ .

**证明.** 首先证明充分性.

令  $\mathcal{G}$  是一个有向图,  $V(\mathcal{G})$  中任意两个顶点  $x$  和  $y$  之间存在  $k$  条互不相交的有向路  $(x, y)$ . 设  $x'$  和  $y'$  是  $V(\mathcal{G})$  中的两个不同的顶点. 由于存在  $k$  条互不相交的有向路  $(x', y')$ , 记为  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , 易见最多存在长度为 1 的通路  $P_i$ . 在其余的有向路中选择一个内部顶点, 得到  $k - 1$  个不同的顶点, 与顶点  $x', y'$  一起, 就可以得到在  $\mathcal{G}$  中至少含有  $k + 1$  个顶点. 设  $\mathcal{S}$  是一个至多含有  $k - 1$  个顶点的集合, 并且  $x', y' \in V(\mathcal{G} - \mathcal{S})$ . 由于存在  $k$  条互不相交的有向路  $(x', y')$ , 移除  $\mathcal{S}$  最多破坏  $k + 1$  条  $(x', y')$  通路. 则在  $\mathcal{G} - \mathcal{S}$  中含有一条  $(x', y')$  有向路, 这意味着  $\mathcal{G} - \mathcal{S}$  是强连通的, 因此  $\mathcal{G}$  是  $k$ -连通的.

下面证明必要性.

令  $\mathcal{G}$  是  $k$ -连通的有向图,  $x, y \in V(\mathcal{G})$ .

1) 当  $xy \notin E(\mathcal{G})$  时, 设  $k'$  是可以破坏  $\mathcal{G}$  中所有  $(x, y)$  有向路的最少顶点数. 由  $\mathcal{G}$  的  $k$ -连通性, 对于任意的顶点集合  $\mathcal{S}$ ,  $|\mathcal{S}| \leq k - 1$ , 则  $\mathcal{G} - \mathcal{S}$  是强连通的并且至少包含一个  $(x, y)$  有向路, 从而  $k' \geq k$ . 则由引理 1,  $\mathcal{G}$  中存在  $k$  条互不相交的有向路  $(x, y)$ .

2) 当  $xy \in E(\mathcal{G})$  时, 若  $k = 1$ , 可以选择  $xy$  作为  $(x, y)$  有向路来完成证明. 现在假定  $k \geq 2$ .

易见  $\mathcal{G} - xy$  是  $(k - 1)$ -连通的. 因此类似 1), 可得在  $\mathcal{G} - xy$  中存在  $k - 1$  条  $(x, y)$  有向路, 与  $xy$  本身, 可知在  $\mathcal{G}$  中存在  $k$  条互不相交的  $(x, y)$  有向路.  $\square$

非负矩阵指所有元素均大于或等于零的矩阵, 行和为 +1 的非负方阵称为随机矩阵. 一个随机矩阵是 SIA (Indecomposable and aperiodic) 矩阵<sup>[15-16]</sup>, 是指存在一个常数列向量  $\nu$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = \mathbf{1}\nu^T$ . 后文中还将要用到由 Ren<sup>[4]</sup> 以及 Wolfowitz<sup>[17]</sup> 给出的下列结果:

**引理 3**<sup>[4]</sup>. 一个随机矩阵  $\lambda = 1$  的特征代数重数为 1 的充要条件是, 其所对应的有向图含有一棵生成树. 另外, 若随机矩阵的对角元素均为正数, 则其不为 1 的特征值均有  $|\lambda| < 1$ .

**引理 4**<sup>[4]</sup>. 令  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbf{R})$  是一个随机矩阵, 若  $A$  有一个代数重数为 1 的特征值  $\lambda = 1$ , 其余的特征值均满足  $|\lambda| < 1$ , 则  $A$  是 SIA 矩阵, 即  $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m = \mathbf{1}\nu$ , 其中  $\nu$  非负, 且满足  $A^T\nu = \nu$ ,  $\mathbf{1}^T\nu = 1$ .

**引理 5**<sup>[17]</sup>. 令  $M_1, M_2, \dots, M_k$  表示一列有限 SIA 矩阵, 其有限个  $M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_j}$  的乘积  $M_{i_j}M_{i_{j-1}}, \dots, M_{i_1}$  仍

然是 SIA 矩阵. 则对于每个无限序列  $M_{i_1}, M_{i_2}, \dots$ , 存在一个列向量  $\mathbf{y}$ , 使得:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} M_{i_j}, M_{i_{j-1}}, \dots, M_{i_1} = \mathbf{1}\mathbf{y}^T$$

### 1.2 问题描述以及通信协议

不失一般性, 假定系统由  $n + r - 1$  个智能体组成, 标号由 1 到  $n + r - 1$ . 具有顶点  $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_{n+r-1}\}$  的有向图  $\mathcal{G}_{n+r-1}(t)$  用来表示系统的通信结构图, 顶点  $v_i$  表示第  $i$  个智能体. 顶点  $v_i$  和  $v_j$  之间的有向边表示第  $i$  和第  $j$  个智能体之间可以发送或者接收彼此信息. 系统的通信结构是时变的, 令  $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}(1), \mathcal{G}(2), \dots, \mathcal{G}(M), M \in \mathbf{N}\}$  表示所有可能的通信结构, 则显然通信结构图  $\mathcal{G}$  是有限的.

在多智能体系统中, 由于通信开销较大, 智能体之间很难保持连续通信, 因而离散系统比连续系统更符合实际, 故本文仅考虑离散系统. 下面给出本文所要用到的通信协议.

在文献 [2] 中, Jadbabaie 等研究了下面形式的协议:

$$x_i(t+1) = \frac{1}{1+n_i(t)} \left( x_i(t) + \sum_{j \in N_i(t)} x_j(t) \right) \quad (1)$$

其中,  $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$  是离散的时间集合,  $n_i(t)$  表示第  $i$  个智能体在  $t$  时刻的邻居个数. 在式 (1) 中, 智能体之间的通信权重假定为常值 1, 后来该权值被扩展至时变情形<sup>[4]</sup>:

$$x_i[k+1] = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}[k]\delta_{ij}[k]} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}[k]\delta_{ij}[k]x_j[k] \quad (2)$$

其中, 权值  $\alpha_{ij}[k] \in \bar{\alpha}$  是时变的,  $\bar{\alpha}$  是一个任意有界正数集合,  $\delta_{ii}[k] = 1$ . 在  $[t_k, t_{k+1})$  时间段内, 当第  $j$  个智能体可以收到第  $i$  个智能体的信息时,  $\delta_{ij}[k] = 1$ , 否则  $\delta_{ij}[k] = 0$ ,  $\forall j \neq i$ . 令  $M_{n+r-1}(\mathbf{R})$  表示所有的  $(n + r - 1) \times (n + r - 1)$  实矩阵集合, 则式 (2) 可以写成如下矩阵形式:

$$\mathbf{x}_{n+r-1}[k+1] = D_{n+r-1}[k]\mathbf{x}_{n+r-1}[k] \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{x}_{n+r-1} = [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+r-1}]^T$ ,  $D_{n+r-1}[k] = [d_{ij}] \in M_{n+r-1}(\mathbf{R})$ ,  $(i, j) \in \mathcal{I}$ ,  $d_{ij} = \frac{\alpha_{ij}[k]\delta_{ij}[k]}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}[k]\delta_{ij}[k]}$ ,  $D_{n+r-1}[k]$  是系统通信结构图  $\mathcal{G}(k)$  的邻接矩阵.

## 2 主要结果

当多智能体系统的结构图固定, 即各智能体可通信的邻居不变的情况下, 文献 [4] 中给出了一个结果, 即系统的通信结构图含有一棵生成树时可实现一致性. 但由于各智能体在运行过程中, 其位置不断发生变化, 加之环境、任务等条件的影 响, 上述固定通信结构很难实现. 因此, 固定通信结构模式在本文中不再予以考虑. 当系统的结构图含有一棵生成树时, 协议 (3) 中的每一个  $D_{n+r-1}[k]$  是随机矩阵且对角元素为正. 由引理 3, 每个  $D_{n+r-1}[k]$  仅含有一个代数重数为 1 的最大特征值  $\lambda = 1$ , 并且其余的所有特征值均满足  $|\lambda| < 1$ , 再结合引理 4 可知, 每个  $D_{n+r-1}[k]$  是 SIA 矩阵.

**定理 1.** 令  $\mathcal{G}(k) \in \mathcal{G}$  是系统的时变通信结构图. 使用通信协议 (2), 具有  $n + r - 1$  个智能体的系统可以渐近地实现一致性, 当且仅当存在一个一致有界、不重叠的无限时间序列  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots, t_1 = 0$ , 使得系统的通信结构

图在每个时间区间  $[t_k, t_{k+1})$  内含有一棵生成树. 进一步, 若系统在  $t = t'_{k^*}$  ( $t_{k^*} < t'_{k^*} < t_{k^*+1}$ ) 时刻失去  $r-1$  个成员, 余下的  $n$  个成员可以继续实现一致性的充要条件是在时间段  $[t_{k^*}, t'_{k^*})$  内, 系统的通信结构图  $\mathcal{G}_{n+r-1}[k^*]$  中任意两个顶点  $u$  和  $v$  之间存在  $r$  条互不相交的有向路.

**注 1.** 当  $t < t_{k^*}$  时, 实现信息一致性的必要条件是系统的通信结构图含有一棵生成树. 若无此条件, 则任意智能体可能和系统的成员失去联系而被孤立, 其信息一致性无法得到保证, 相关结果参见文献 [4], 故定理 1 前一部分的证明略去.

**证明.** 假定系统失去成员是瞬时的. 则当  $t = t_{k^*}$  时, 由式 (3) 有:

$$\mathbf{x}_{n+r-1}[k^*] = D_{n+r-1}[k^* - 1], \dots, D_{n+r-1}[1] \mathbf{x}_{n+r-1}[0] \quad (4)$$

由于  $t_{k^*} < \infty$ , 故乘积  $D_{n+r-1}[k^* - 1], \dots, D_{n+r-1}[1]$  有限, 因而系统各成员之值  $\mathbf{x}_{n+r-1}[k^*]$  亦有限. 在时间区间  $[t_{k^*}, t'_{k^*})$  内, 系统的通信结构图  $\mathcal{G}_{n+r-1}[k^*]$  中任意两个顶点  $u$  和  $v$  之间存在  $r$  条互不相交的有向路, 由引理 2 可知, 有向图  $\mathcal{G}_{n+r-1}[k^*]$  是  $r$  连通的. 当失去  $r-1$  个成员后, 在区间  $(t'_{k^*}, t_{k^*+1})$  内, 通信结构图  $\mathcal{G}_{n+r-1}[k^*]$  中移除  $r-1$  个顶点及其对应的有向边, 新系统的通信图  $\mathcal{G}_n[k^*]$  是强连通的, 因此至少含有一棵生成树, 从而保证在每个时间区间  $[t_j, t_{j+1})$ ,  $j = k^*, k^* + 1, \dots$  上, 系统的通信结构图  $\mathcal{G}_n[j]$  中含有一棵生成树. 对含有  $n$  个成员的新系统, 重新标记为  $1, \dots, n$ , 且系统各成员的初值  $\mathbf{x}_n[k^*]$  和  $\mathbf{x}_{n+r-1}[k^*]$  中剩余成员的值保持一致. 由引理 3 和引理 4 可知, 每个  $D_n[j]$  矩阵是 SIA 矩阵. 进一步, 由式 (3) 可得:

$$\mathbf{x}_n[j+i] = D_n[j+i-1], \dots, D_n[j] \mathbf{x}_n[k^*] \quad (5)$$

令  $\{D_n[j], D_n[j+1], \dots, D_n[j+i]\}$  表示对应于  $\bar{\mathcal{G}}_n$  的所有 SIA 矩阵集合. 由  $\{D_n[j], D_n[j+1], \dots, D_n[j+i]\}$  的有限性和引理 5 知, 必存在一个常数列向量  $\mathbf{y}$  使得:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D_n[j+i] D_n[j+i-1], \dots, D_n[j] = \mathbf{1} \mathbf{y}^T$$

从而

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n[j+i] = \mathbf{1} \mathbf{y}^T \mathbf{x}_n[k^*] \quad (6)$$

由于  $k^*$  固定,  $\mathbf{1} \mathbf{y}^T \mathbf{x}_n[k^*]$  为常数, 则系统在失去  $r-1$  个成员后仍可实现一致性.  $\square$

系统的初值从  $t = t_{k^*}$  开始, 最终的平衡点与  $\mathbf{x}_{n+r-1}[k^*]$  有关, 即  $\mathbf{1} \mathbf{y}^T \mathbf{x}_n[k^*]$  和  $\mathbf{x}_{n+r-1}[0]$  相关. 定理 1 要求在时间区间  $[t_{k^*}, t'_{k^*})$  内是  $r$  连通的. 考虑到各成员的相对位置变化以及通信开销等因素, 保持  $r$  连通通常难以实现. 为此, 下面寻求比保持  $r$  连通更为一般的条件, 首先给出联合连通的定义:

**定义 1.** 一系列顶点相同的简单有向图  $\{\mathcal{G}(1), \mathcal{G}(2), \dots, \mathcal{G}(l)\}$  ( $l > 1$ ) 的并集是一个简单图  $\mathcal{G}$ , 其顶点和  $\mathcal{G}(i)$  ( $i = 1, \dots, l$ ) 相同, 边为  $\{\mathcal{G}(1), \mathcal{G}(2), \dots, \mathcal{G}(l)\}$  ( $l > 1$ ) 中边的并集, 即  $E(\mathcal{G}) = E(\mathcal{G}(1)) \cup E(\mathcal{G}(2)) \cup \dots \cup E(\mathcal{G}(l))$ . 则当  $\mathcal{G}$  为强连通图时, 称有向图列  $\{\mathcal{G}(1), \mathcal{G}(2), \dots, \mathcal{G}(l)\}$  ( $l > 1$ ) 是联合连通的.

利用上述概念, 多智能体系统在固定通信结构情形的研究结果可进一步扩展至时变拓扑<sup>[4]</sup>. 为此, 本文提出下列关于有向图联合  $r$  连通的定义:

**定义 2.** 当有向图  $\mathcal{G}$  是  $r$  连通的, 则称有向图列  $\{\mathcal{G}(1), \mathcal{G}(2), \dots, \mathcal{G}(l)\}$  ( $l > 1$ ) 联合  $r$  连通.

显然, 若集合  $\{\mathcal{G}(1), \mathcal{G}(2), \dots, \mathcal{G}(l)\}$  ( $l > 1$ ) 中有一个图是  $r$  连通的, 则它们并集一定联合  $r$  连通. 然而, 即使集合中的每个图都不是  $r$  连通的, 甚至是不连通的, 它们的并仍可以是联合  $r$  连通的, 其中最差的情况是每个图仅含有一条有向边. 接下来证明, 联合  $r$  连通的图在移除  $r-1$  个顶点和相关的边之后, 相应图列的并集是联合连通的.

**引理 6.** 一系列含有  $n+r-1$  个顶点联合  $r$  连通的有向图列移除  $r-1$  个顶点及其相关的边之后, 所得子图的并集是联合连通的.

**证明.** 令  $\{\mathcal{G}(1), \mathcal{G}(2), \dots, \mathcal{G}(l)\}$  表示具有  $n+r-1$  个顶点的联合  $r$  连通的有向图的集合, 即  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(1) \cup \mathcal{G}(2) \cup \dots \cup \mathcal{G}(l)$ , 其中  $l$  是一个正整数. 令  $\mathcal{G}'(i)$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) 和  $\mathcal{G}'$  分别表示  $\mathcal{G}(i)$  和  $\mathcal{G}$  删除  $r$  个顶点和相关的边之后的子图. 由于  $\mathcal{G}$  是  $r$  连通的, 故  $\mathcal{G}'$  强连通. 注意到:

$$\mathcal{G}' = \mathcal{G}'(1) \cup \mathcal{G}'(2) \cup \dots \cup \mathcal{G}'(l)$$

所以  $\{\mathcal{G}'(1), \mathcal{G}'(2), \dots, \mathcal{G}'(l)\}$  是联合连通的.  $\square$

为了证明多智能体系统失去部分成员后, 系统仍可实现信息一致性的充要条件, 需要用到下列引理.

**引理 7<sup>[4]</sup>.** 如果一系列有向图  $\{\mathcal{G}(k_1), \mathcal{G}(k_2), \dots, \mathcal{G}(k_p)\}$  的联合含有一棵生成树, 则矩阵乘积  $D[k_p] \dots D[k_2] D[k_1]$  是 SIA 矩阵, 其中  $D[k_j]$  是式 (3) 中对应于有向图  $\mathcal{G}(k_j)$  的随机矩阵.

**定理 2.** 令  $\mathcal{G}(k) \in \bar{\mathcal{G}}$  是系统的时变通信结构图, 则具有  $n+r-1$  个成员的多智能体系统使用通信协议 (2) 时, 可渐近实现一致性的充要条件是, 存在无限的、互不相交且一致有界的时间序列  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 使得系统结构图在每个区间  $[t_k, t_{k+1})$  上的联合含有一棵生成树. 进一步, 若系统在  $t = t'_{k^*}$  ( $t_{k^*} < t'_{k^*} < t_{k^*+1}$ ) 时刻失去  $r-1$  个成员, 余下的  $n$  个成员可继续实现一致性的充要条件是, 在时间段  $[t_{k^*}, t'_{k^*})$  内, 系统通信结构图的联合  $\mathcal{G}_{n+r-1}[k^*]$  中任意两个顶点之间含有  $r$  条互不相交的有向路.

**证明.** 类似定理 1 的证明, 在  $t = t_{k^*}$  时刻, 可以得到重新标记为从 1 到  $n$  的新系统及其有限初值  $\mathbf{x}_n[t_{k^*}]$ . 由引理 2 可知, 在时间区间  $[t_{k^*}, t'_{k^*})$  内, 系统通信结构图的联合  $\mathcal{G}_{n+r-1}(k^*)$  是联合  $r$  连通的. 在  $t = t_{k^*}$  时刻, 系统失去  $r-1$  个成员, 则在  $\mathcal{G}_{n+r-1}(k^*)$  移除  $r-1$  个顶点和其相应边, 由引理 6 可得, 通信结构子图的联合  $\mathcal{G}_n(k^*)$  是联合连通的, 从而  $\mathcal{G}_n(k^*)$  含有一棵生成树.

令  $\mathcal{G}_n(i)$  是时间区间  $[t_i, t_{i+1})$  内通信结构图  $\mathcal{G}_n(i_1), \mathcal{G}_n(i_2), \dots, \mathcal{G}_n(i_j)$  的联合, 即:

$$\mathcal{G}_n(i) = \mathcal{G}_n(i_1) \cup \mathcal{G}_n(i_2) \cup \dots \cup \mathcal{G}_n(i_j)$$

其中,  $i = k^*, k^* + 1, \dots$ . 令  $\{D_n[i_1], D_n[i_2], \dots, D_n[i_j]\}$  是对应于  $\bar{\mathcal{G}}_n(i)$  中的随机矩阵集合, 则由引理 7, 矩阵乘积  $D_n[i_j] \dots D_n[i_2] D_n[i_1]$ ,  $j = k^*, k^* + 1, \dots$  是 SIA 矩阵.

进一步, 由式 (3) 可得:

$$\mathbf{x}_n[i_j] = D_n[i_j] \dots D_n[i_2] D_n[i_1] \dots D_n[k_j^*] \dots D_n[k_2^*] D_n[k_1^*] \mathbf{x}_n[k^*]$$

由  $\bar{D}_n$  的有限性和引理 5 可知, 必定存在一个常数列向量  $\mathbf{y}$

使得:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D_n[i_j] \cdots D_n[i_2] D_n[i_1] \cdots D_n[k_j^*] \cdots$$

$$D_n[k_2^*] D_n[k_1^*] = \mathbf{1} \mathbf{y}^T \tag{7}$$

即

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n[i_j] = \mathbf{1} \mathbf{y}^T \mathbf{x}_n[k^*] \tag{8}$$

由于  $k^*$  固定, 故  $\mathbf{1} \mathbf{y}^T \mathbf{x}_n[k^*]$  为常值, 因此系统可以实现信息一致性.  $\square$

定理 1 比定理 2 的条件更为严格, 其中定理 1 要求系统的结构图在每个时间区间内保持  $r$  连通, 而定理 2 只要求其结构图的联合保持  $r$  连通. 由此可见, 在任意时刻系统的通信结构图都可以不是  $r$  连通的, 甚至可以是不连通的, 从而能够有效减少系统的通信开销. 这意味着系统各成员之间无需实时保持通信, 如在  $t_i$  时刻,  $v_1$  与  $v_2$  通信, 在  $t_{i+1}$  时刻,  $v_2$  与  $v_3$  通信, 无需  $v_1$  和  $v_3$  保持通信, 能够实现  $v_1$  和  $v_3$  的间接通信.

值得注意的是, 在子图保持强连通的条件下, 可从原图中移除顶点的个数取决于图的连通性. 一个完全图可以在移除任意的  $r$  ( $r < n$ ) 个顶点后, 子图仍保持强连通, 这意味着系统无论失去多少成员之后, 剩余成员之间仍可任意通信. 另一种极端情况是, 通信结构图本身是一棵树, 如图 1 所示, 这意味着任意一个顶点被移除之后, 子图未必含有生成树. 因此, 若  $v_i$  被移除, 则  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$  将被孤立, 系统不再能实现一致性. 此外, 若  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$  中的任意一个被移除, 则系统仍可实现一致性. 综上可知, 可以失去成员的数量依赖于系统的通信能力, 即各智能体可以通信的邻居数量. 换言之, 每个成员可进行通信的邻居个数越多, 则系统可以失去的成员数目也越多, 即  $r-1$  越大; 特别地, 若  $n=1$ , 则此时系统只剩下一个成员, 而单个智能体显然可以实现一致性.

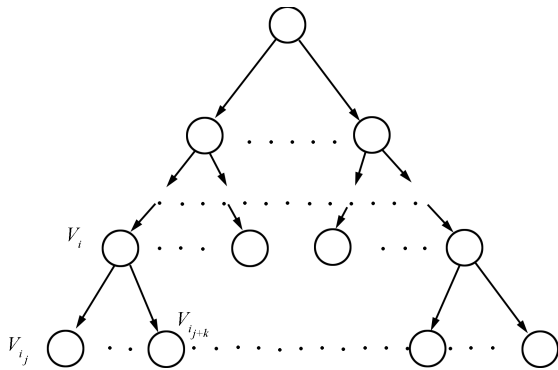


图 1 树形结构通信图

Fig. 1 The communication topology of a tree type

在工程实际中, 由于危险或攻击等因素的可感知性, 此时可通过增加系统的通信强度来应对上述事件. 一般情况下, 系统无需保持很高的通信密度, 从而能够较大程度地减少通信开销. 此外, 对于任务过程中可能遇到的多个危险时刻  $k_1^*, k_2^*, \dots, k_q^*$ ,  $q \in \mathbf{N}$ , 定理 2 中的结果也可以相应地做进一步的推广.

**定理 3.** 含有  $n + \sum_{j=1}^q (r_j - 1)$  个成员的多智能体系统, 在定理 2 中时变拓扑能够实现信息一致性的条件下, 若系统分别在  $t_j = t'_{k_j^*}$ ,  $t_{k_j^*} < t'_{k_j^*} < t_{k_{j+1}^*}$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$ , 时刻失去  $r_j - 1$  个成员, 则余下的  $n + \sum_{p=j+1}^q (r_p - 1)$  个成员可以

继续实现一致性的充要条件是: 在时间段  $[t_{k_j^*}, t'_{k_j^*})$  内, 系统通信结构图的联合  $\mathcal{G}_{n+\sum_{p=j}^q (r_p-1)}(k_j^*)$  中任意两个顶点之间含有  $r_j$  条互不相交的有向路.

**证明.** 在时间区间  $[t_{k_j^*}, t'_{k_j^*})$  上, 由于系统通信结构图的联合  $\mathcal{G}_{n+\sum_{p=j}^q (r_p-1)}(k_j^*)$  中任意两个顶点之间含有  $r_j$  条互不相交的有向路, 故  $\mathcal{G}_{n+\sum_{p=j}^q (r_p-1)}(k_j^*)$  是联合  $r_j$  连通的. 在  $t_j = t'_{k_j^*}$  时刻, 系统失去  $r_j - 1$  个成员, 则在通信结构图的联合  $\mathcal{G}_{n+\sum_{p=j}^q (r_p-1)}(k_j^*)$  中移除  $r_j - 1$  个顶点和对应边, 由引理 6 可知, 在时间区间  $(t_{k_j^*}, t'_{k_{j+1}^*}]$  上, 通信结构子图的联合  $\mathcal{G}_{n+\sum_{p=j+1}^q (r_p-1)}(k_j^*)$  是联合连通的, 故含有一棵生成树, 由定理 2 可知, 系统可以实现一致性.  $\square$

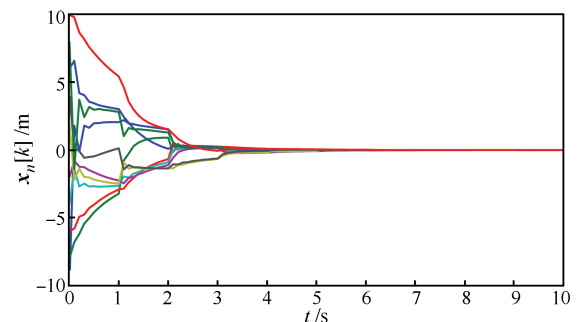
### 3 仿真结果

为了验证多智能体系统在失去部分成员后仍可实现一致性, 进行仿真实验研究. 此仿真实验含有 10 个智能体, 使用通信协议 (2), 其初始值分别为  $[10, 8, 6, 4, 2, -2, -4, -6, -8, -10]$ , 通信步长为 0.1 秒. 采用 4 个对角元均为正数 (大于零小于 1) 的随机矩阵表示智能体之间的信息传递, 通过生成随机数对 4 取余数来决定下一时刻所使用的传递矩阵, 用于表示系统通信结构图的时变性.

对于未受损多智能体系统, 如图 2(a) 所示, 系统约在  $T = 5$  s 时, 各智能体成员达到相同值, 从而实现了信息一致性. 图 2(b) 表示系统在  $T = 2$  s 时失去 4 个智能体之后, 剩余的 6 个智能体约在  $T = 4$  s 时仍然可以实现一致性, 其中图 2(c) 是图 2(b) 的局部放大图. 可以看到, 当系统成员未发生变化时, 系统可以较快实现信息一致性; 当系统的部分成员离开系统后, 在剩余智能体可通信成员数目减少的情况下, 系统仍可实现信息一致性. 此外, 对比图 2(a) 和图 2(b) 的结果可知, 由于系统成员的总体数量变少, 新系统能够更快地实现信息一致性.

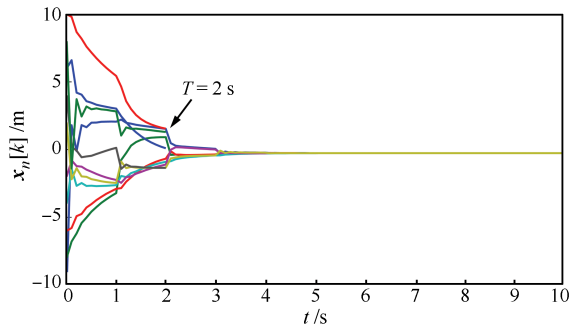
### 4 结论

本文研究了当多智能体系统失去部分成员后, 剩余成员如何保持信息一致性的问题. 基于有向  $r$  连通图, 提出了联合  $r$  连通概念, 证明了联合  $r$  连通的有向图在移除  $r-1$  个顶点及其相关边之后, 子图是联合连通的, 进而给出受损系统可实现信息一致性的充要条件. 结果表明, 在系统能够保持一致性的前提下, 允许失去成员的数量取决于系统中各智能体能够进行通信的邻居数目. 最后, 数值仿真实验验证了文中理论分析结果的正确性.

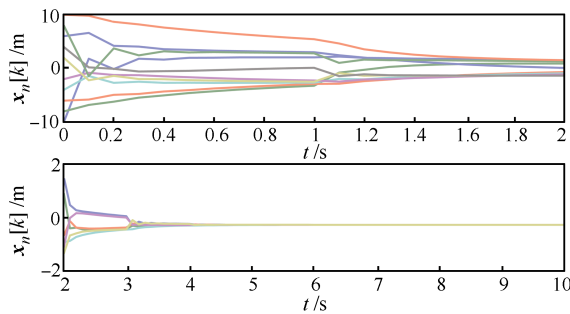


(a) 10 个智能体实现一致性

(a) The consensus for multi-agent system with ten agents



(b) 失去 4 个智能体后剩余 6 个智能体实现一致性  
(b) The consensus for remained six agents after four agents were lost



(c) 图 2 (b) 的分解图  
(c) The divided process of Fig.2 (b)  
图 2 部分智能体离开系统后的一致性

图 2 The consensus for parts of the agents when they are out the system

## References

- Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, Cohen I, Schochet O. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 1995, **75**(6): 1226–1229
- Jadbabaie A, Lin J, Morse S A. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(6): 988–1001
- Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520–1533
- Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 655–661
- Ren W. Consensus tracking under directed interaction topologies: algorithms and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, **18**(1): 230–237
- Tahbaz-Salehi A, Jadbabaie A. A necessary and sufficient condition for consensus over random networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(3): 791–795
- Tahbaz-Salehi A, Jadbabaie A. Consensus over ergodic stationary graph processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(1): 225–230
- Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(4): 950–955
- Sun Y G, Wang L. Consensus of multi-agent systems in directed networks with nonuniform time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(7): 1607–1613
- Xiao F, Wang L. Asynchronous consensus in continuous-time multi-agent systems with switching topology and time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(8): 1804–1816
- Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1465–1476
- Huang Qin-Zhen. Consensus analysis of multi-agent discrete-time systems. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1127–1133  
(黄勤珍. 离散时间多智能体系统的一致性. 自动化学报. 2012, **38**(7): 1127–1133)
- Yan Jing, Guan Xin-Ping, Luo Xiao-Yuan, Yang Xian. Consensus and trajectory planning with input constraints for multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1074–1082  
(闫敬, 关新平, 罗小元, 杨峴. 多智能体系统输入约束下的一致性轨迹规划研究. 自动化学报. 2012, **38**(7): 1074–1082)
- Diestel R. *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag, 2005
- Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987
- Godsil C, Royle G F. *Algebraic Graph Theory*. New York: Springer-Verlag, 2001
- Wolfowitz J. Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1963, **14**(5): 733–736

严卫生 西北工业大学航海学院教授. 主要研究方向为多智能体系统, 无人水下航行器编队控制和导航. E-mail: wsyan@nwpu.edu.cn  
(YAN Wei-Sheng Professor at the College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University. His research interest covers autonomous systems, unmanned underwater vehicles formation control, and precise underwater navigation.)

李俊兵 西北工业大学航海学院博士研究生. 2009 年获得西北工业大学理学院硕士学位. 主要研究方向为多智能体系统, 编队控制. 本文通信作者. E-mail: ljb020313@yahoo.com.cn  
(LI Jun-Bing Ph.D. candidate at the College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University. He received his master degree from Northwestern Polytechnical University in 2009. His research interest covers multi-agent system and formation control. Corresponding author of this paper.)

王银涛 西北工业大学航海学院副教授. 主要研究方向为无人水下航行器的导航控制. E-mail: tyaowang@gmail.com  
(WANG Yin-Tao Associate professor at the College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University. His research interest covers navigation and control problems of multiple autonomous underwater vehicles.)