

基于 MIT 规则的自适应扩展集员估计方法

宋大雷¹ 吴冲^{1,2} 齐俊桐¹ 韩建达¹

摘要 用于非线性椭圆估计的自适应扩展集员 (Adaptive extended set-membership filter, AESMF) 算法在实际应用中存在着过程噪声设定椭圆与真实噪声椭圆失配的问题, 导致滤波器的估计出现偏差甚至发散. 本文提出了一种基于 MIT 规则过程噪声椭圆最优化的自适应扩展集员估计算法 (MIT-AESMF), 用于解决非线性系统时变状态和参数的联合估计和定界中过程噪声无法精确建模问题的新算法. 本算法通过 MIT 优化规则, 在线计算使一步预测偏差包络椭圆最小化的过程噪声包络椭圆, 以此保证滤波器健康指标满足有效条件; 最后, 采用地面移动机器人状态和动力学参数联合估计验证了所提出方法的有效性.

关键词 扩展集员估计, MIT 自适应规则, 自适应滤波, 参数定界

引用格式 宋大雷, 吴冲, 齐俊桐, 韩建达. 基于 MIT 规则的自适应扩展集员估计方法. 自动化学报, 2012, 38(11): 1847–1860

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.01847

A MIT-based Nonlinear Adaptive Set-membership Filter for Ellipsoidal Estimation

SONG Da-Lei¹ WU Chong^{1,2} QI Jun-Tong¹ HAN Jian-Da¹

Abstract The adaptive extended set-membership filter (AESMF) for nonlinear ellipsoidal estimation suffers the mismatch between real process noise and its set boundaries, which may result in unstable estimation. In this paper, a MIT method-based adaptive set-membership filter for optimization of the set boundaries of process noise is developed and applied to nonlinear joint estimation of both time-varying states and parameters. As a result of using the proposed MIT, the estimation stability and boundaries accuracy of conventional AESMF are substantially improved. Simulation results have shown the efficiency and robustness of the proposed method.

Key words Extended set-membership filter, MIT adaptive strategy, adaptive filter, parameter determination

Citation Song Da-Lei, Wu chong, QI Jun-Tong, Han Jian-Da. A MIT-based nonlinear adaptive set-membership filter for ellipsoidal estimation. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(11): 1847–1860

近年来, 序列估计方法研究取得了显著成果, 使得基于在线实时建模和基于实时模型的控制方法应用成为可能^[1]. 在基于统计学的系统估计方法中, 卡尔曼型滤波器^[2–4] 最为著名. 这种滤波器, 或称为状态估计器, 利用系统测量噪声与过程噪声的统计学先验知识, 如白噪声等, 通过优化设定的估计偏差期望值最小函数来取得最优估计值, 且算法形式可用简练的预测与更新两步骤来表示, 便于在线应用. 因此, 这种方法在应用中十分普遍, 而且其后续发展出的针对非线性系统的估计方法, 如扩展卡尔曼滤

波 (Extended Kalman filter, EKF)^[5]、无色卡尔曼滤波 (Unscented Kalman filter, UKF)^[6] 等, 拓展了其应用范围. 但是, 这种卡尔曼型的估计方法具有一个共同的特点就是要求对系统的过程噪声和测量噪声具有一定的先验知识, 或者假设其满足一定的分布条件, 而基于这种模型的优化问题需要满足相应的假设条件下才能达到最优. 但是在实际的系统和应用环境中, 噪声的统计特性往往相当复杂, 实时变化, 难于准确测量和评价, 就如机器人系统, 其自身的机械加工精度, 传感器噪声以及外来的空气扰动均会产生不确定统计特性的噪声. 这样与假设不同的噪声统计特性, 会造成这种滤波器估计的偏差, 而且由于卡尔曼滤波器的噪声敏感性^[7], 估计偏差将会被放大, 甚至导致估计器不稳定. 为此, 许多自适应机制被引入此种类型估计器, 进行噪声的在线估计, 如自适应无色卡尔曼滤波 (Adaptive UKF, AUKF)^[8–9] 等, 以此来实时估计系统过程噪声的分布, 拟补其上述不足. 然而, 卡尔曼型估计器对于统计特性依赖性和敏感性强的本质缺陷导致了其应用的局限性.

在大多数的实际系统中, 虽然噪声统计特性未知, 但是可以假设其有界 (Unknown but bounded, UBB), 从此种观点出发, 鉴于卡尔曼型滤波器的固

收稿日期 2011-11-18 录用日期 2012-01-10
Manuscript received November 18, 2011; accepted January 10, 2012

国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2012AA041501), 国家自然科学基金 (61035005, 61273025, 61203334), 国家科技支撑计划 (2011BAD20B07) 资助

Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2012AA041501), National Natural Science Foundation of China (61035005, 61273025, 61203334), and National Key Technology Research and Development Program of China (2011BAD20B07)

本文责任编辑 方海涛

Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao

1. 中国科学院沈阳自动化研究所机器人学国家重点实验室 沈阳 110016
2. 中国科学院大学 北京 100049

1. State Key Laboratory of Robotics, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

有缺陷, 研究者提出了集员估计滤波器 (Set-membership filter, SMF)^[10]. 此种滤波器基于上述噪声假设, 通过计算可行集的方式为系统状态或参数的真实值提供一个可行界限. 这样估计结果不再是单独的一个值, 而是一个可行状态的集合, 这个可行集描述了估计值可能出现的所有取值范围, 保证了真实值一定包含在该集合中. 基于椭球的集员滤波理论最早由 Schweppe^[11] 和 Bertsekas 等^[12] 于上世纪 60 年代末引入, 他们提出了可以利用外定界椭球几何来包含系统的真实状态, 但没有考虑椭球的最优化问题. 在此基础上, Fogel 等^[13] 给出了针对线性系统的最优定界椭球算法 (Optimal bounded ellipsoid, OBE), 并将其用于系统的辨识. Maksarov 等^[14]、Kurzhaniski 等^[15] 和 Chernousko^[16] 进一步发展了针对于状态和参数估算的椭球技术, 进一步将算法标准化. Polyak 等^[17] 推导了用于具有模型不确定性的线性系统的椭球算法, 扩展了算法的应用范围.

Scholte 等^[18] 将上述椭球定界算法由线性系统推广至非线性系统, 提出了一种扩展集员滤波算法 (Extended SMF, ESMF), 其主要的非线性系统线性化思想与扩展 Kalman 滤波方法类似, 然而其不同点是 ESMF 算法采用了泰勒展开方式进行非线性系统线性化, 将线性化误差作为虚拟过程噪声, 进行估计, 成功将 SMF 方法推广到非线性系统. 然而, 由于存在着数值稳定性较差, 实时性不高, 且滤波器参数难于选择等缺点. 针对这一问题, 国内学者周波提出了一种基于 UD 分解的自适应扩展集员估计方法 (Adaptive ESMF, AESMF)^[19], 改进了这一缺陷. 该方法将算法中的各包络矩阵采取 UD 分解的形式进行表示和更新; 同时, 结合观测量的序列更新和选择更新策略, 不仅加强了算法的稳定性, 而且通过选择更新降低了算法的计算复杂度. 另外, 周波提出了一种自适应的滤波器参数选择方法, 使得计算复杂度进一步降低, 并得到次优的结果^[20]. 这种方法成功应用于机器人系统的在线建模控制^[21].

然而, 上述提出的 AESMF 方法仍然需要系统噪声的先验信息, 即过程噪声和测量噪声的不确定界限. 其中, 测量噪声来自于传感器的精度, 只要传感器正常工作条件下不确定界并不会发生改变, 因此可以通过对传感器数据的先期分析确定其测量噪声的不确定界; 然而, 对于系统过程噪声, 由于其来自于系统状态空间动力学模型结构和参数的失配而产生, 且就目前系统辨识方法而言, 对于大多数欠驱动、强耦合非线性系统, 如机器人系统^[22-24] 等, 不同运动模态动力学模型差异较大, 甚至某些参数出现跳变, 无法精确建模, 因此其不确定界先验信息无法得知, 需要根据经验手工选取. 同时由于先验知识有限, 当人为选取的过程噪声不确定界无法包含实际的过程噪声真实值时, 会直接导致 AESMF

估计的不确定界偏差过大甚至滤波器对于不确定界估计发散. 本文针对上述过程噪声不确定界未知问题, 提出一种基于 MIT 优化规则的 AESMF 方法 (MIT-AESMF), 此方法通过 MIT 优化规则, 在线计算使一步预测偏差包络椭球最小化的过程噪声包络椭球, 以此保证滤波器健康指标满足有效条件; 最后, 采用地面移动机器人状态和动力学参数联合估计验证了所提出方法的有效性.

1 自适应扩展集员估计方法 (AESMF)

对于一般性离散非线性系统:
过程模型:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (1)$$

观测模型:

$$\mathbf{y}_{k+1} = h(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{y}_{k+1} \in \mathbf{R}^m$ 分别为状态和观测变量, $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{v}_{k+1} \in \mathbf{R}^m$ 分别为可加性过程噪声和观测噪声, $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 为有界非线性映射函数.

以式 (1) 和式 (2) 所示的系统为例, AESMF 滤波的基本算法步骤如下^[20]: 设过程噪声和观测噪声椭球集分别为 $\mathbf{w}_k \in E(0_{n \times 1}, Q_k)$ 和 $\mathbf{v}_{k+1} \in E(0_{m \times 1}, R_{k+1})$, 系统的初始状态估计椭球集为 $\mathbf{x}_0 \in E(\hat{\mathbf{x}}_0, P_0)$, 其中 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 和 P_0 分别表示初始估计椭球的中心和包络矩阵. 定义 $k, k = 0, 1, 2, \dots$ 时刻估计得到的系统状态椭球集为 $E_k = E(\hat{\mathbf{x}}_k, P_k)$, 则 $k+1$ 时刻 ESMF 算法的迭代过程为:

1) 计算 k 时刻每个状态分量的不确定性区间

$$\mathbf{X}_k^i = \left[\hat{\mathbf{x}}_k^i - \sqrt{P_k^{i,i}} \quad \hat{\mathbf{x}}_k^i + \sqrt{P_k^{i,i}} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

其中, 记号 $P_k^{i,j}$ 表示 P_k 的 (i, j) 元素.

2) 用区间分析技术获得线性化产生的 Lagrange 余子的最大区间. 以单状态系统为例, 对非线性状态方程在当前估计点作泰勒展开, 得:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\hat{\mathbf{x}}_k) + (\nabla_{\mathbf{x}_k} f(\hat{\mathbf{x}}_k))^T (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_k)}{\partial \mathbf{x}_k^2} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) \quad (4)$$

其中, 记号 $\nabla_{\mathbf{x}} f$ 为 f 相对于 \mathbf{x} 的梯度. 则 Lagrange 余子的取值区间为

$$\mathbf{X}_{R_2}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{X}_k) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_k)}{\partial \mathbf{x}_k^2} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) \quad (5)$$

对多维状态系统, 有:

$$\mathbf{X}_{R_2} = \frac{1}{2} \text{diag} \left\{ \mathbf{X}_k^T - \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{X}_k^T - \hat{\mathbf{x}}_k, \dots, \mathbf{X}_k^T - \hat{\mathbf{x}}_k \right\} \times \begin{pmatrix} \text{Hes}_1 \\ \vdots \\ \text{Hes}_n \end{pmatrix} (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) \quad (6)$$

其中, $\text{Hes}_i, i = 1, 2, \dots$ 为 $f(\cdot)$ 的 Hessian 矩阵.

3) 计算线性化误差的边界, 并用椭球将线性化误差外包

$$\begin{aligned} [\bar{Q}_k]_{R_k}^{i,i} &= 2(\mathbf{X}_{R_2})^2 \\ [\bar{Q}_k]_{R_k}^{i,j} &= 0_{n \times 1}, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (7)$$

从而得到线性化误差的外包椭球为 $E(0_{n \times 1}, \bar{Q}_k)$.

4) 计算最终的虚拟过程误差椭球 $\hat{\mathbf{w}}_k \in E(0_{n \times 1}, \hat{Q}_k)$:

$$\hat{\mathbf{w}}_k \in E(0_{n \times 1}, \hat{Q}_k) \supseteq E(0_{n \times 1}, Q_k) \oplus E(0_{n \times 1}, \bar{Q}_k) \quad (8)$$

其中, $\hat{\mathbf{w}}_k$ 是由线性化误差和过程噪声相加得到的, 因此涉及到两椭球的直和运算, 可得:

$$\hat{Q}_k = \frac{\bar{Q}_k}{1 - \beta_{Q_k}} + \frac{Q_k}{\beta_{Q_k}}, \quad \beta_{Q_k} \in (0, 1) \quad (9)$$

对观测方程进行相似的处理, 得到虚拟观测噪声椭球 $\hat{\mathbf{v}}_{k+1} \in E(0_{m \times 1}, \hat{R}_{k+1})$.

5) 使用线性 SMF 滤波的预测步骤来计算预测状态椭球边界. 这是线性化预测椭球 $E(f(\hat{\mathbf{x}}_k), A_k P_k A_k^T)$ 和虚拟过程噪声椭球 $E(0_{n \times 1}, \hat{Q}_k)$ 的直和过程:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} = f(\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (10)$$

$$P_{k+1,k} = \Phi_k \frac{P_k}{1 - \beta_k} \Phi_k^T + \frac{\hat{Q}_k}{\beta_k}, \quad \beta_k \in (0, 1) \quad (11)$$

其中, $\Phi_k = \frac{\partial f(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \Big|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k}$ 为过程模型的 Jacobian 矩阵.

6) 使用线性 SMF 更新步骤计算更新状态椭球边界 $E_{k+1} = E(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, P_{k+1})$. 其实质是将预测状态椭球 $E(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}, P_{k+1,k})$ 和观测集 $S_y = \{\mathbf{x} | (\mathbf{y}_{k+1} - h(\mathbf{x}))^T \hat{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{y}_{k+1} - h(\mathbf{x})) \leq 1\}$ 作交集.

$$W_k = H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} H_{k+1}^T + \frac{\hat{R}_{k+1}}{\rho_k}, \quad \rho_k \in (0, 1) \quad (12)$$

$$K_{k+1} = \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1} \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} + K_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})] \quad (14)$$

$$\bar{P}_{k+1} = \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} - \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1} H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} \quad (15)$$

$$P_{k+1} = \delta_k \bar{P}_{k+1} \quad (16)$$

其中

$$\delta_k = 1 - [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})]^T \times W_k^{-1} [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})] \quad (17)$$

而 $H_{k+1} = \frac{\partial h(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \Big|_{\mathbf{x}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}}$ 为观测模型的 Jacobian 矩阵.

上述算法中值得注意的有三点: 1) 三个滤波器参数 $\beta_{Q_k}, \beta_k, \rho_k$ 的选取. 由于两个椭球集直和或交集的外包椭球不是唯一的, 因此可通过选择适当的滤波器参数来获得某指标下最优的椭球; 2) 当 $\delta_k \leq 0$ 时, 椭球边界无意义, 这说明对初始状态和噪声的边界估计不准确, 因此该参数值可用来指示算法的健康性; 3) 测量噪声不确定界 R_{k+1} 和过程噪声不确定界 Q_k 只能手工凭经验选取, 如果选取不当, 即 $w_k \notin E(0_{n \times 1}, Q_k)$ 时, 会导致 $\delta_k \leq 0$, 造成 ESMF 估计无效.

对于 $\beta_{Q_k}, \beta_k, \rho_k$ 的选取, 文献 [20] 中提出了在线自适应机制如下:

$$\beta_{Q_k} = \frac{\sqrt{\text{tr}(Q_k)}}{\sqrt{\text{tr}(\bar{Q}_k)} + \sqrt{\text{tr}(Q_k)}} \quad (18)$$

$$\beta_k = \frac{\sqrt{\text{tr}(\hat{Q}_k)}}{\sqrt{\text{tr}(\Phi_k P_k \Phi_k^T)} + \sqrt{\text{tr}(\hat{Q}_k)}} \quad (19)$$

$$\rho_k = \frac{\sqrt{r_m}}{\sqrt{p_m} + \sqrt{r_m}} \quad (20)$$

其中, p_m 和 r_m 分别为矩阵 $H_{k+1} P_{k+1,k} H_{k+1}^T$ 和 \hat{R}_{k+1} 的最大奇异值. 对于噪声边界设定值与真实值不一致的情况, 文献 [19] 给出了选择更新的判断条件:

$$(\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}))^T \hat{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})) \leq \eta$$

即当上述条件不满足时只计算式 (10) 和式 (11), 即时间更新. 参数 η 需要根据初始假设情况仔细地选择来保证滤波器的性能, 较小的 η 会减小选择更新的几率, 但同时带来了较大的边界估计误差. 因此, 需要在节省更新时间和保证边界估计精度上寻求平衡.

然而, 由于测量噪声不确定界 R_{k+1} 可以通过传感器的标定来离线获得^[25], 而过程噪声不确定性 Q_k 源于系统模型 (1) 建立不准确造成, 无法离线测量,

且在实际应用没有较好的解决方法, 例如对于机器人系统不同运动模态动力学模型差异较大. 因此, 本文重点解决在保证 $\delta_k > 0$ 的条件下, 通过在线自适应机制获得 Q_k .

2 基于 MIT 规则的自适应 ESMF 方法 (MIT-AESMF)

本节将详细讨论过程噪声不确定界 Q_k 的自适应选取问题, 并提出一种在线递推的 Q_k 优化策略来改善滤波器性能. 设系统 (1) 过程噪声不确定界矩阵 Q_k 第 i 行对角元素为 q_k^i , 即:

$$Q_k = \text{diag}\{q_k^1, q_k^2, \dots, q_k^n\} \quad (21)$$

考虑到 AESMF 健康性指标 δ_k 表达式 (17), 要最大限度的保证 AESMF 方法估计有效, 同时要使得不确定级最大限度小, 就要满足 Q_k , 使得:

$$J_k(Q_k) = (1 - \delta_k) \cdot \text{tr}\{P_{k+1}\} \quad (22)$$

函数值最小, 即

$$Q_k = \arg \min_{Q_k} J_k(Q_k) \quad (23)$$

定性分析式 (22) 中的第一个因子是保证 δ_k 趋近于 1, 第二个因子 $\text{tr}\{P_{k+1}\}$ 为使得状态不确定椭球体积最小化.

考虑到 Q_k 对角线元素无关, 且滤波器估计有效情况 $J_k(Q_k)$ 正定, 因此 $J_k(Q_k)$ 极值所对应 Q_k 对角线元素 q_k^i 的可通过下式计算:

$$\frac{\partial J_k(Q_k)}{\partial q_k^i} = \text{tr} \left\{ \frac{\partial(1 - \delta_k)\delta_k \bar{P}_{k+1}}{\partial q_k^i} \right\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

然而, 由于式 (24) 中变量 δ_k 和矩阵 \bar{P}_{k+1} 均含有 W_k^{-1} , 而 W_k 与 Q_k 有关, 这就造成 W_k^{-1} 与 Q_k 的数学关系无解析表达, 故难以直接通过方程 (24)

求取使 $J_k(Q_k)$ 最小的 Q_k 的解析表达, 在此使用 MIT 规则^[26] 的数值计算方法自适应策略完成最优值求解.

MIT 作为一种常用的自适应参数更新机制, 与其他非线性搜索算法, 如混沌搜索算法、余割搜索算法等具有算法简单、容易在线迭代实现、计算量小等特点. 虽然容易陷入局部极小值, 但是本节最后, 在比较宽泛的初始搜索点要求下, 证明了其收敛性, 因此具有现实可行性, 见定理 1. 所谓的 MIT 参数更新机制, 是将指标函数相对于参数的负梯度方向作为参数更新的方向, 即:

$$\hat{q}_{k+1}^i = \hat{q}_k^i - \Delta T \cdot \eta_k \frac{\partial J_k}{\partial q_k^i} \Big|_{q_k^i = \hat{q}_k^i} \quad (25)$$

其中, \hat{q}_k^i 是对 q_k^i 在 k 时刻的估计值, ΔT 是采样周期, η_k 是控制收敛速度的自适应调节率, 可手工调整, 且满足如下条件:

$$\begin{cases} \eta_k \geq 0 \\ \sum_k \eta_k = \infty \\ \sum_k \eta_k^2 < \infty \end{cases} \quad (26)$$

由式 (9)、式 (11) 和式 (12), 可得式 (27) ~ (29). 于是, 可得 \hat{q}_k^i 的 MIT 自适应策略表达式为式 (30). 这样由式 (28) ~ (30) 即可计算 \hat{q}_{k+1}^i .

再考虑式 (30) 数值计算复杂度, 提出如下选择更新 \hat{q}_k^i 的条件: 如果满足 $|(1 - \delta_k) \cdot \text{tr}\{P_{k+1}\}| < \mu$, 计算式 (30), 否则 $\hat{q}_{k+1}^i = \hat{q}_k^i$. 其中, μ 需要根据经验手工选取, μ 越小, 得到的不确定界越小, 但是单步计算量增加; 反之, 计算量减小而得到的不确定界会变大.

于是得到非线性系统离散状态空间模型 (1) 和 (2) 的基于 MIT 规则自适应 ESMF 方法, 即 MIT-AESMF, 递推式如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k}{\partial q_k^i} &= \frac{\partial \{H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} H_{k+1}^T + \frac{\hat{R}_{k+1}}{\rho_k}\}}{\partial q_k^i} = \frac{\partial \{H_{k+1} \frac{\Phi_k P_k \Phi_k^T + \frac{\hat{Q}_k}{1 - \beta_{Q_k}} + \frac{Q_k}{\beta_{Q_k}}}{1 - \rho_k} H_{k+1}^T + \frac{\hat{R}_{k+1}}{\rho_k}\}}{\partial q_k^i} = \\ &= \frac{\partial \{H_{k+1} \frac{Q_k}{\beta_k \beta_{Q_k} (1 - \rho_k)} H_{k+1}^T\}}{\partial q_k^i} = \frac{1}{\beta_k \beta_{Q_k} (1 - \rho_k)} H_{k+1} \frac{\partial Q_k}{\partial q_k^i} H_{k+1}^T = \\ &= \frac{1}{\beta_k \beta_{Q_k} (1 - \rho_k)} H_{k+1} \text{diag}\{0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i-1}, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n-i}, 0, \dots, 0\} H_{k+1}^T \quad (27) \\ \frac{\partial \bar{P}_{k+1}}{\partial q_k^i} &= \frac{\partial \{ \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} - \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1} H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} \}}{\partial q_k^i} = \frac{\partial \{ \frac{P_{k+1,k}}{1 - \rho_k} \}}{\partial q_k^i} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left\{ \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} \right\}}{\partial q_k^i} H_{k+1}^T W_k^{-1} H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} - \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1} \frac{\partial \{W_k\}}{\partial q_k^i} W_k^{-1} H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} - \\ & \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1} H_{k+1} \frac{\partial \left\{ \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} \right\}}{\partial q_k^i} = \frac{1}{\beta_k \beta_{Q_k} (1-\rho_k)} \left\{ \text{diag} \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i} \right\} - \right. \\ & \left. \text{diag} \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i} \right\} H_{k+1}^T W_k^{-1} H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} - \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1} H_{k+1} \text{diag} \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i} \right\} \right\} \times \\ & H_{k+1}^T W_k^{-1} H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} - \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1} H_{k+1} \text{diag} \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_k}{\partial q_k^i} &= \frac{\partial \left\{ 1 - [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})]^T W_k^{-1} [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})] \right\}}{\partial q_k^i} = -\frac{1}{\beta_k \beta_{Q_k} (1-\rho_k)} [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})]^T W_k^{-1} \times \\ & H_{k+1} \frac{\partial W_k}{\partial q_k^i} H_{k+1}^T W_k^{-1} [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})]^T = -\frac{1}{\beta_k \beta_{Q_k} (1-\rho_k)} [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})]^T W_k^{-1} \times \\ & H_{k+1} \text{diag} \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i} \right\} \times H_{k+1}^T W_k^{-1} [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})]^T \end{aligned} \quad (29)$$

$$\hat{q}_{k+1}^i = \hat{q}_k^i - \Delta T \cdot \eta_k \cdot \text{tr} \left\{ \frac{\partial (1 - \delta_k) \delta_k \bar{P}_{k+1}}{\partial q_k^i} \right\} = \hat{q}_k^i - \Delta T \cdot \eta_k \cdot \text{tr} \left\{ (1 - 2\delta_k) \frac{\partial \delta_k}{\partial q_k^i} \bar{P}_{k+1} + (1 - \delta_k) \delta_k \frac{\partial \bar{P}_{k+1}}{\partial q_k^i} \right\} \quad (30)$$

1) 0 时刻, 递推初始化

$$\begin{aligned} \hat{q}_0^i &= q_0^i \\ Q_0 &= \text{diag} \{ \hat{q}_0^1, \hat{q}_0^2, \dots, \hat{q}_0^n \} \\ \hat{P}_0 &= P_0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\beta_k = \frac{\sqrt{\text{tr}(\hat{Q}_k)}}{\sqrt{\text{tr}(\Phi_k P_k \Phi_k^T) + \sqrt{\text{tr}(\hat{Q}_k)}}}$$

$$P_{k+1,k} = \Phi_k \frac{P_k}{1-\beta_k} \Phi_k^T + \frac{\hat{Q}_k}{\beta_k} \quad (33)$$

2) $k+1$ 时刻, 椭球构建

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k^i &= [\hat{\mathbf{x}}_k^i - \sqrt{P_k^{i,i}}, \quad \hat{\mathbf{x}}_k^i + \sqrt{P_k^{i,i}}] \\ \mathbf{X}_{R_2} &= \frac{1}{2} \text{diag} \left(\underbrace{\mathbf{X}_k^T - \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{X}_k^T - \hat{\mathbf{x}}_k, \dots, \mathbf{X}_k^T - \hat{\mathbf{x}}_k}_n \right) \times \\ & \begin{pmatrix} \text{Hes}_1 \\ \vdots \\ \text{Hes}_n \end{pmatrix} (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) \end{aligned}$$

$$[\bar{Q}_k]_{R_k}^{i,i} = 2(\mathbf{X}_{R_2})^2, \quad [\bar{Q}_k]_{R_k}^{i,j} = 0_{n \times 1}, \quad i \neq j$$

$$\beta_{Q_k} = \frac{\sqrt{\text{tr}(Q_k)}}{\sqrt{\text{tr}(\bar{Q}_k) + \sqrt{\text{tr}(Q_k)}}}$$

$$\hat{Q}_k = \frac{\bar{Q}_k}{1-\beta_{Q_k}} + \frac{Q_k}{\beta_{Q_k}} \quad (32)$$

3) $k+1$ 时刻, 时间更新

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} = f(\hat{\mathbf{x}}_k)$$

4) $k+1$ 时刻, 测量更新

$$\rho_k = \frac{\sqrt{r_m}}{\sqrt{p_m} + \sqrt{r_m}}$$

$$W_k = H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} H_{k+1}^T + \frac{\hat{R}_{k+1}}{\rho_k}$$

$$K_{k+1} = \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} + K_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})]$$

$$\bar{P}_{k+1} = \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} - \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k} H_{k+1}^T W_k^{-1} H_{k+1} \frac{P_{k+1,k}}{1-\rho_k}$$

$$\delta_k = 1 - [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})]^T \times W_k^{-1} [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k})]$$

$$P_{k+1} = \delta_k \bar{P}_{k+1} \quad (34)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$.

5) $k+1$ 时刻过程噪声椭球更新

if $|(1 - \delta_k) \cdot \text{tr}\{P_{k+1}\}| <$

$$\mu \left\{ \hat{q}_{k+1}^i = \hat{q}_k^i - \Delta T \cdot \eta_k \cdot \text{tr} \left\{ (1 - 2\delta_k) \frac{\partial \delta_k}{\partial q_k^i} \bar{P}_{k+1} + \right. \right.$$

$$\left. (1 - \delta_k) \delta_k \frac{\partial \bar{P}_{k+1}}{\partial q_k^i} \right\}$$

else

$$\begin{cases} \hat{q}_{k+1}^i = \hat{q}_k^i \\ Q_{k+1} = \text{diag}\{\hat{q}_{k+1}^1, \hat{q}_{k+1}^2, \dots, \hat{q}_{k+1}^n\} \end{cases} \quad (35)$$

定理 1. 对于系统参考方程 (1) 和 (2), 当如下条件满足时:

- 1) 存在 $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbf{R}$, 使得 $\begin{cases} \|A_k\| \leq \bar{a} \\ \|C_k\| \leq \bar{c} \end{cases}$;
- 2) 矩阵 A_k 对于任意 k 可逆;
- 3) 过程椭圆初始估计条件满足 $\|(q_0^i - q^i)/q_0^i\| < \frac{q^i}{w_k^i w_k^i}$, 则式 MIT 规则 (35) 渐近稳定, 且有:

$$\hat{q}_k^i \rightarrow q^i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

证明.

$$\begin{aligned} \hat{q}_{k+1}^i &= \hat{q}_k^i - \Delta T \cdot \eta_k \cdot \text{tr} \left\{ \frac{\partial(1 - \delta_k) P_{k+1}}{\partial q_k^i} \right\} = \\ &\hat{q}_k^i + \Delta T \cdot \eta_k \cdot \frac{\partial \delta_k}{\partial q_k^i} \text{tr} \{P_{k+1}\} - \\ &\Delta T \cdot \eta_k \cdot (1 - \delta_k) \cdot \text{tr} \left\{ \frac{\partial P_{k+1}}{\partial q_k^i} \right\} \end{aligned}$$

令 $\Delta_{q,k} = q^i - \hat{q}_k^i$, 则

$$\begin{aligned} \Delta_{q,k+1} &= q^i - \hat{q}_{k+1}^i = \\ &q^i - \hat{q}_k^i - \Delta T \cdot \eta_k \cdot \frac{\partial \delta_k}{\partial q_k^i} \text{tr} \{P_{k+1}\} + \\ &\Delta T \cdot \eta_k \cdot (1 - \delta_k) \cdot \text{tr} \left\{ \frac{\partial P_{k+1}}{\partial q_k^i} \right\} = \\ &\Delta_{q,k} + \Delta T \cdot \eta_k \cdot ((1 - \delta_k) \cdot \text{tr} \left\{ \frac{\partial P_{k+1}}{\partial q_k^i} \right\} - \\ &\frac{\partial \delta_k}{\partial q_k^i} \text{tr} \{P_{k+1}\}) \end{aligned}$$

令李亚普诺夫函数

$$V_{q,k} = \Delta_{q,k}^2$$

根据文献 [18] 证明, 对于 ESMF 方法必存在如下不等式:

$$\|P_k\| \leq \bar{p}, \quad \|K_k\| \leq \bar{k}$$

其中, $\bar{p} \in \mathbf{R}$ 为椭圆边界 P_k 范数的上确界, $\bar{k} \in \mathbf{R}$ 为增益 K_k 范数的上确界, 则将式 (28) 和式 (29) 代入上式, 并根据定理的矩阵边界条件有:

$$\begin{aligned} V_{q,k+1} - V_{q,k} &= \Delta_{q,k+1}^2 - \Delta_{q,k}^2 = \\ &(2q^i - 2\hat{q}_{k+1}^i + \Delta T \cdot \eta_k \cdot ((1 - \delta_k) \times \\ &\text{tr} \left\{ \frac{\partial P_{k+1}}{\partial q_k^i} \right\} - \frac{\partial \delta_k}{\partial q_k^i} \text{tr} \{P_{k+1}\})) \times \\ &\Delta T \eta_k ((1 - \delta_k) \text{tr} \left\{ \frac{\partial P_{k+1}}{\partial q_k^i} \right\} - \frac{\partial \delta_k}{\partial q_k^i} \text{tr} \{P_{k+1}\}) \leq \\ &\left(\frac{1}{\beta_k \beta_{Q_k} (1 - \rho_k) \bar{p}^2 (\bar{p} + \bar{a}^2 q^i)} \|\Delta_{q,k}\| + \right. \\ &\left. 2\|\Delta_{q,k}\|^2 (\bar{a} + \bar{a} \bar{k} \bar{c}) \|\Delta_{q,k}\| \right) \times \\ &\left\{ \frac{q^i}{w_k^i w_k^i} - \left\| \frac{(q_0^i - q^i)}{q_0^i} \right\| \right\} \left\{ \frac{q^i}{w_k^i w_k^i} - \frac{w_k^i w_k^i}{q^i} \right\} \end{aligned}$$

又 q^i 是过程噪声 w_k^i 的边界, 则必有 $\frac{w_k^i w_k^i}{q^i} < 1$. 故

$$\frac{q^i}{w_k^i w_k^i} - \frac{w_k^i w_k^i}{q^i} = \frac{1}{\frac{w_k^i w_k^i}{q^i}} - \frac{w_k^i w_k^i}{q^i} < 0$$

因此

$$\begin{aligned} V_{q,k+1} - V_{q,k} &= \Delta_{q,k+1}^2 - \Delta_{q,k}^2 \leq \\ &\left(\frac{1}{\beta_k \beta_{Q_k} (1 - \rho_k) \bar{p}^2 (\bar{p} + \bar{a}^2 q^i)} \|\Delta_{q,k}\| + \right. \\ &\left. 2\|\Delta_{q,k}\|^2 (\bar{a} + \bar{a} \bar{k} \bar{c}) \|\Delta_{q,k}\| \right) \times \\ &\left\{ \frac{q^i}{w_k^i w_k^i} - \left\| \frac{(q_0^i - q^i)}{q_0^i} \right\| \right\} \left\{ \frac{q^i}{w_k^i w_k^i} - \frac{w_k^i w_k^i}{q^i} \right\} \leq 0 \end{aligned}$$

因此基于优化指标函数 (22) 采用 MIT 规则进行过程噪声逼近, 即式 (35), 在 AESMF 算法稳定情况下, 只要满足初始估计条件 $\|(q_0^i - q^i)/q_0^i\| < \frac{q^i}{w_k^i w_k^i}$, 就是渐近稳定的. 因此, $\Delta_{q,k} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, 即

$$\hat{q}_k^i \rightarrow q^i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

□

3 仿真实验

本文提出的基于 MIT 规则的自适应扩展集员估计算法 (MIT-AESMF) 将应用于带双向滑动的履带式移动机器人运动位姿状态和时变滑动参数的联合估计研究. 此仿真对象与 AESMF 方法首次验证的文献 [20] 采用相同的机器人动力学模型和仿真参数, 旨在与 AESMF 对比来验证所提出的 MIT-AESMF 方法的优越性. 图 1 所示为履带式机器人二维平面运动的示意图. 首先给定两个假设: 一是

履带机器人视为刚体, 即其在运动过程中车体和履带不会产生形变; 二是履带机器人执行低速运动, 避免过大的滑动导致难于建模。

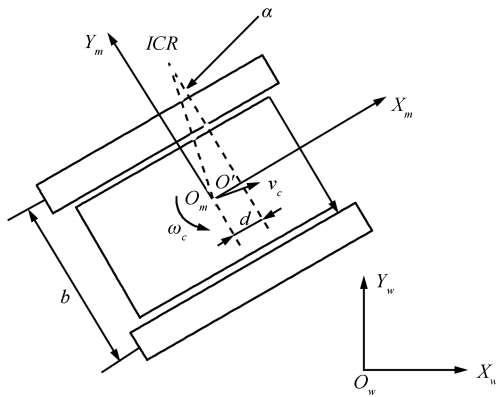


图 1 车体平面运动示意图
Fig. 1 Platform of the vehicle undergoing general planar motion

图 1 中给出了 Cartesian 坐标系、相对坐标系的定义及车体的基本几何结构(俯视). 其中, b 表示车体两履带中心间距; $O_w X_w Y_w$ 表示全局 Cartesian 坐标系, $O_m X_m Y_m$ 表示附着在车身上的相对坐标系, 其原点为车体质心 G 所在点. 为了简单起见, 假设车体质心位于车体形心. 为了表示履带机器人横向上的滑动效应, 我们定义如下的侧滑因子:

$$\sigma_k = \tan \alpha_k \quad (36)$$

在另一方面, 纵向的滑动定义左右履带的滑动比 i_R, i_L 来表示:

$$\begin{cases} i_{L,k} = \frac{r\omega_L - v_{x,k}}{r\omega_L} \\ i_{R,k} = \frac{r\omega_R - v_{x,k}}{r\omega_R} \end{cases} \quad (37)$$

上式中 r 表示履带驱动轮的半径, ω_L, ω_R 表示左右履带驱动轮的角速度, 可视为控制输入. 滑动参数在实际过程中发生突变具有其物理意义, 上述选取的参数 σ_k 反映机器人横向上的滑动效应, 当机器人突然加速移动时, 会直接导致它的阶跃变化; 同理, i_R, i_L 来表示纵向的滑动左右, 滑动参数为零时表明无滑动, 大于零时为加速滑动(如启动过程, 或地面摩擦系数下降), 小于零时为减速滑动(如刹车过程), 即当机器突然改变运动方向和加速度时就会产生阶跃突变^[21].

过程模型和观测模型分别为式 (38) 和式 (39).

$$\begin{pmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \\ \psi_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ \psi_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r\omega_L(1-i_{L,k}) + r\omega_R(1-i_{R,k})}{2} (\cos \psi_k + \sigma_k \sin \psi_k) \\ \frac{r\omega_L(1-i_{L,k}) + r\omega_R(1-i_{R,k})}{2} (\sin \psi_k - \sigma_k \cos \psi_k) \\ -\frac{r\omega_L(1-i_{L,k}) + r\omega_R(1-i_{R,k})}{b} \end{pmatrix} + \mathbf{w}_k = f(X_k, Y_k, \psi_k, i_{L,k}, i_{R,k}, \sigma_k) + \mathbf{w}_k \quad (38)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} X_k & Y_k & \psi_k \end{pmatrix}^T + \mathbf{v}_k \quad (39)$$

其中

$$f(X_k, Y_k, \psi_k, i_{L,k}, i_{R,k}, \sigma_k) = \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ \psi_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r\omega_L(1-i_{L,k}) + r\omega_R(1-i_{R,k})}{2} (\cos \psi_k + \sigma_k \sin \psi_k) \\ \frac{r\omega_L(1-i_{L,k}) + r\omega_R(1-i_{R,k})}{2} (\sin \psi_k - \sigma_k \cos \psi_k) \\ -\frac{r\omega_L(1-i_{L,k}) + r\omega_R(1-i_{R,k})}{b} \end{pmatrix}$$

X, Y 表示移动机器人位置在全局坐标系中的坐标, ψ 为航向. 仿真的方法是同时估计状态向量 $(X_k \ Y_k \ \psi_k)^T$ 和三个滑动参数向量 $(i_{L,k} \ i_{R,k} \ \sigma_k)^T$, 这是一个非线性联合估计问题由于时变滑动参数的变化规律在现实中未知, 故可建立参数估计模型为^[23]

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \mathbf{w}_{p,k} \quad (40)$$

其中, $\mathbf{p}_k = (i_{L,k} \ i_{R,k} \ \sigma_k)$, $\mathbf{w}_{p,k}$ 是可加性过程驱动噪声.

这样可以建立如下状态与参数的联合估计方程

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} f(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, x_{4,k}, x_{5,k}, x_{6,k}) \\ \mathbf{p}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{w}_{p,k} \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})^T + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (41)$$

其中

$$\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, x_{4,k}, x_{5,k}, x_{6,k})^T = \begin{pmatrix} X_k & Y_k & \psi_k & i_{L,k} & i_{R,k} & \sigma_k \end{pmatrix}^T$$

模型包含的常数仿真中取值为: 两履带中心距离为 $b = 0.65$ m, 驱动轮半径为 $r = 0.35$ m, 总的仿真时间为 500 个采样周期 (50 s), 采样间隔为 $T =$

100 ms. 为了简单起见, 仿真中采用的输入量 ω_L , ω_R 取值为常值: $\omega_L = \omega_R = 1.5 \text{ rad/s}$.

为了验证本文所提出的 MIT-AESMF 在估计中的优越性, 即对于建模不准确带来的过程噪声的自适应机制, 仿真中, 将分初始过程噪声 w_k 和参数驱动噪声 $w_{p,k}$ 边界估计适当、过大和过小三种情况来对比 MIT-AESMF 和 AESMF 方法. 仿真中对于原始 AESMF 和本文提出的 MIT-AESMF 算法从稳定性、估计性能和计算复杂度三个方面进行比较. 所有仿真实验运行在 Pentium-IV 2.4 G 双核, 2 G RAM PC 机上的 Matlab 7.8 环境下. 以下仿真结果的曲线线型说明图如图 2.

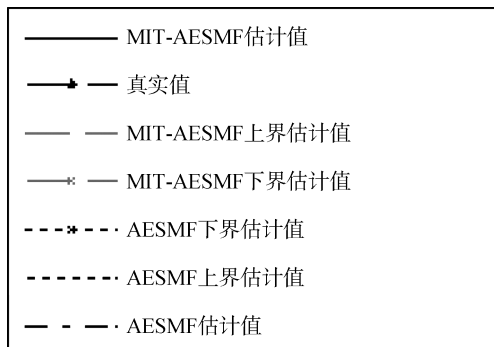


图 2 曲线线型说明

Fig. 2 Explanation for the type of lines in simulation results

3.1 初始过程噪声椭球边界估计等于真实边界的情况

对于真实的过程噪声 w_k , 参数驱动噪声 $w_{p,k}$ 和观测噪声 v_{k+1} 均考虑 5% 均匀分布有界噪声. 状态和参数的初始椭球分别假定为过程噪声 w_k 和 $w_{p,k}$ 的真实边界椭球, 即 $Q_0 = \text{diag}\{0.0025, 0.0025, 0.0025, 0.0025, 0.0025\}$ 测量噪声假定为过程噪声的真实边界椭球, 即 $R_0 = \text{diag}\{0.0025, 0.0025, 0.0025\}$. 每一步估计中, 把估算出的椭球 E_k 中心 \hat{x}_k 作为 k 时刻估算值. 为了反映参数跟踪的性能, 以及算法在出现突变情况下的稳定性, 除了参数的一般性变化外, 我们将在 $k = 100, 200, 300, 400$ 这 4 个时刻给参数 $(i_{L,k} \ i_{R,k} \ \sigma_k)$ 一个大的阶跃变化, 其变化幅值见表 1.

图 3 描述了 MIT-AESMF 在估计和稳定

性方面的改进. 图 3(a)~图 3(c) 为系统状态 $(X_k \ Y_k \ \psi_k)^T$ 估计对比图, 图 3(d)~图 3(f) 为参数 $(i_{L,k} \ Y_{L,k} \ \psi_{L,k})^T$ 的估计对比图, 图 3(g) 为滤波器健康指标的对比图.

图 3 表明, 在 500 个仿真时刻之中, 除在参数发生跳变的 4 个时刻之外, MIT-AESMF 和原始 AESMF 方法的参数和状态估计值, 以及稳定后的边界估计精度是一致的; 然而, 由于参数跳变时刻造成了椭球边界初始值设定远小于参数变化真实等效过程噪声, 因此 AESMF 方法始终使用此过小椭球进行直和运算, 导致状态和参数估计的不确定边界无法包含参数真实值, 这使得选择更新条件不满足, 因此不进行观测更新, 导致不确定界缓慢膨胀, 并且持续 15 个采样周期以上, 直至可以包含此跳变范围, 此期间状态估计值也由于没有观测更新出现持续偏差 (如果条件不满足时仍然进行观测更新会直接造成滤波器发散, 详见文献 [20]; 而 MIT-AESMF 方法, 由于采用了 MIT 自适应机制, 会在参数跳变时刻将过程噪声椭球边界立即扩大到包含整个跳变范围, 只需 3 个计算周期. 健康指标图 3(g) 也表明在参数跳变时刻, MIT-AESMF 的健康指标较 AESMF 方法提前 7 个计算周期恢复到 0 以上, 而且在健康指标小于 0 期间, MIT-AESMF 方法可继续保持观测更新使得估计值与真实值保持一致, 详见图 3(d)~图 3(f); 出于估计精确性比较的目的, 为了描述各滤波器估算结果的有效性, 在此采用最小二乘原则下的状态估算和参数估算精度如下^[20]:

$$V_1 = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_x} (x_i(t) - \hat{x}_i(t))^2} \quad (42)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_p} (p_i(t) - \hat{p}_i(t))^2} \quad (43)$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_p} (\bar{p}_i(t) - \underline{p}_i(t))^2} \quad (44)$$

上式中, $x_i(t)$ 和 $\hat{x}_i(t)$ 分别表示真实的和估计的状态, N_x 表示状态的维数. $p_i(t)$ 和 $\hat{p}_i(t)$ 分别表示真实和估计的参数, N_p 表示参数的维数. \bar{p}_i 和 \underline{p}_i 分别

表 1 参数阶跃变化

Table 1 The step-change of parameters

参数	$k < 100$	$100 \leq k < 200$	$200 \leq k < 300$	$300 \leq k < 400$	$400 \leq k < 500$
$i_{L,k}$	0.00	0.20	0.90	0.00	0.90
$i_{R,k}$	0.00	-0.10	0.00	-0.10	0.10
σ_k	0.00	0.15	0.10	0.00	0.15

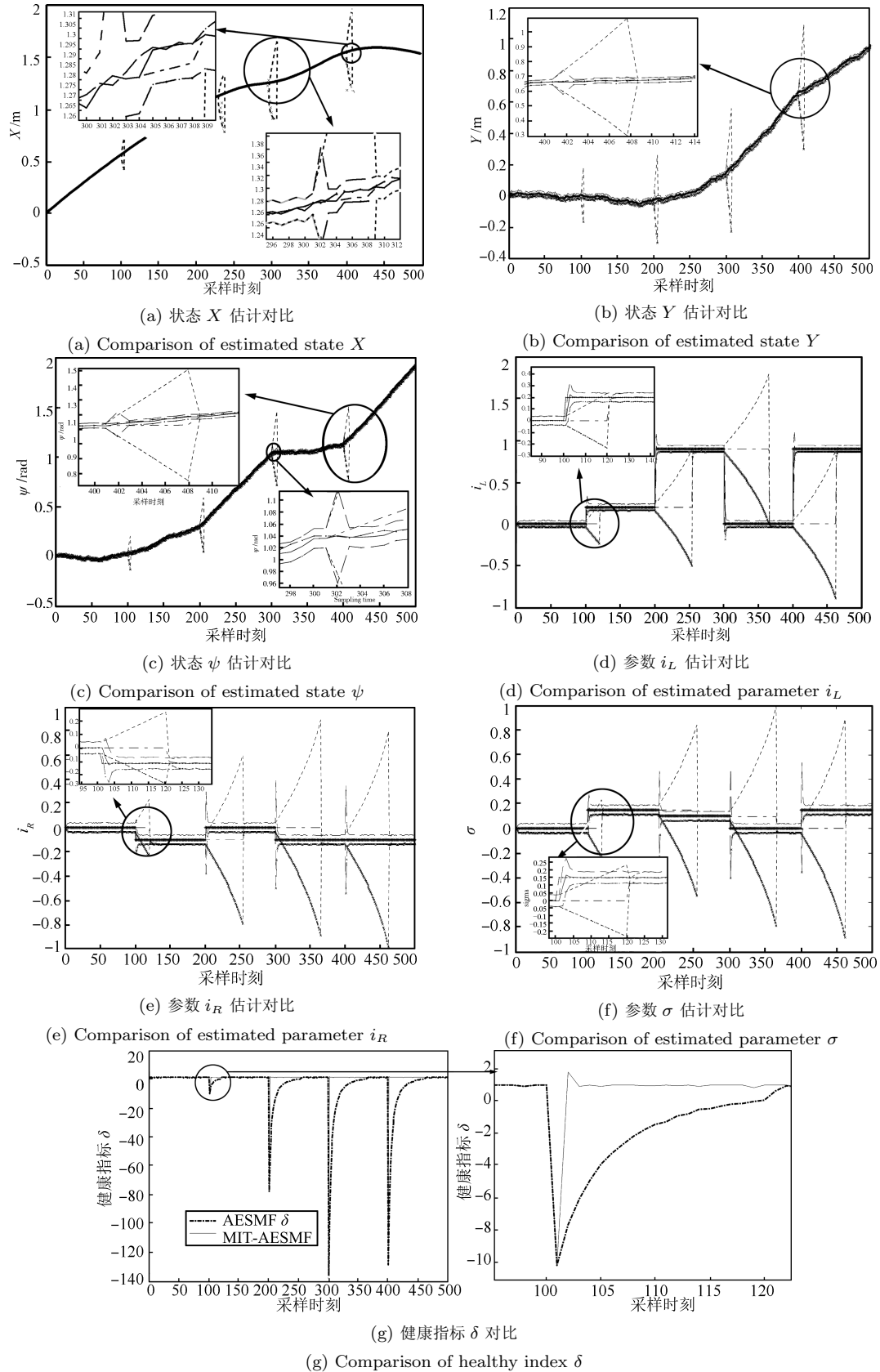


图 3 过程噪声椭圆等于真实值情况下的 AESMF 与 MIT-AESMF 性能对比

Fig.3 Performance comparison between AESMF and MIT-AESMF when process noise boundaries equals true value

为参数估计的上下边界. 各种算法的计算复杂度则用耗费的 CPU 时间来度量. 健康指标的恢复时间通过其为负值的时刻点总合来进行衡量. 这两种滤波算法的初始过程噪声椭球边界估计等于真实边界的情况下的性能比较结果见表 2 和表 3 所示.

根据图 3、表 2 和表 3 所示, MIT-AESMF 方法较 AESMF 方法在初始过程噪声椭球边界估计等于真实边界的情况下, 虽然在稳定状态下性能, 即参数估计精度和不确定界精度相一致, 但在参数跳变时刻附近, 参数和状态估计值精度提升 1 倍, 而且能在极短的时间内使健康指标恢复有效, 恢复速度是 AESMF 方法的 5 倍以上, 说明了椭球自适应 MIT 机制的有效性, 由于这种情况下健康指标参数在 1 附近工作, 因此绝大多数时间 MIT 机制不起作用, 计算量较 AESMF 相当, 二者计算时间没有明显差别.

3.2 初始过程噪声椭球边界估计大于真实边界的情况

对于真实的过程噪声 w_k , 参数驱动噪声 $w_{p,k}$ 和观测噪声 v_{k+1} 均考虑 5% 均匀分布有界噪声. 状态和参数的初始椭球分别假定为过程噪声 w_k 和 $w_{p,k}$ 的真实边界 2 倍的椭球, 即

$$Q_0 = \text{diag}\{0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01\}$$

其余变量取值和参数的阶跃跳变同第 4.1 节. 图 4 描述了 MIT-AESMF 在初始过程噪声椭球设定过大情况下的估计和稳定性方面的改进. 图 4(a)~图 4(c) 为系统状态 $(X_k \ Y_k \ \psi_k)^T$ 估计对比图, 图 4(d)~图 4(f) 为参数 $(i_{L,k} \ Y_{L,k} \ \psi_{L,k})^T$ 的估计对比图.

图 4 表明, 在 500 个仿真时刻之中, 除在参数发生跳变的 4 个时刻之外, MIT-AESMF 和原始 AESMF 方法的参数和状态估计值精度是相似的; 然而, 由于椭球边界初始值设定过大, 因此 AESMF 方法始终使用此过大椭球进行直和运算, 导致状态和参数估计的不确定边界接近 2 倍于 MIT-AESMF

方法. 这主要是得益于 MIT-AESMF 对于过程噪声椭球边界的自适应机制, 实时调整过程噪声椭球边界趋于过程噪声真实值, 使得 MIT-AESMF 较 AESMF 方法始终具有包含真实值的更小的不确定界, 且估计噪声边界接近 AESMF 边界 1/2 (由于其中混合了线性化误差不确定界和观测噪声不确定界, 因此不能恰为 AESMF 边界 1/2), 这与设定的 2 倍真实过程噪声条件相一致, 说明 MIT-AESMF 方法过程噪声自适应使得设定过程噪声椭球接近真实边界.

当发生参数阶越变化时, 即在 $k = 100, 200, 300, 400$ 这 4 个时刻, 图 4(a)~图 4(f) 明显可见由于 AESMF 存在选择更新机制, 在参数发生跳变时设定的过程噪声椭球边界不足以包含参数变化范围, 造成观测更新条件不满足, 因此只计算时间更新, 导致不确定界缓慢膨胀, 并且持续 20 个采样周期以上, 直至可以包含此跳变范围, 此期间状态估计值也由于没有观测更新出现持续偏差. 而 MIT-AESMF 方法, 由于采用了 MIT 自适应机制, 会在参数跳变时刻将过程噪声椭球边界立即扩大到包含整个跳变范围, 只需 3 个计算周期, 而 AESMF 方法需要 15 个以上计算周期. 这两种滤波算法的初始过程噪声椭球边界估计 2 倍于真实边界的情况下的性能比较结果见表 4 所示.

根据图 4 和表 4 所示, MIT-AESMF 方法较 AESMF 方法在初始过程噪声椭球边界估计 2 倍于真实边界的情况下, 在参数跳变时刻附近, 参数和状态估计值精度提升 1 倍, 且整个估计过程中参数不确定边界仅为 AESMF 方法 1/2, 说明了椭球自适应 MIT 机制的有效性, 而且二者计算时间在同一数量级, MIT-AESMF 方法由于采用在线自适应计算略慢于 AESMF 约 5%.

3.3 初始过程噪声椭球边界估计小于真实边界的情况

对于真实的过程噪声 w_k , 参数驱动噪声 $w_{p,k}$ 和

表 2 AESMF 和 MIT-AESMF 稳定态性能比较 (过程噪声设定值恰当)

Table 2 Performance of AESMF and MIT-AESMF when boundaries of process noises are set proper

	状态估计精度 V_1	参数估计精度 V_2	参数边界估计 V_3	计算时间 t (ms)
AESMF	0.000117	0.030884	0.1358	54.16
MIT-AESMF	0.000110	0.030657	0.1297	54.78

表 3 AESMF 和 MIT-AESMF 参数跳变附近性能比较

Table 3 Performance of AESMF and MIT-AESMF when the parameters happen step-change

	状态估计精度 V_1	参数估计精度 V_2	参数边界估计 V_3	健康指标恢复时间 (采样时刻)
AESMF	0.000337	0.059674	1.2167	> 20
MIT-AESMF	0.000167	0.031437	0.1167	< 5

表 4 AESMF 和 MIT-AESMF 稳定性能比较 (过程噪声椭圆界设定过大)

Table 4 Performance of AESMF and MIT-AESMF when boundaries of process noises are set larger

	状态估计精度 V_1	参数估计精度 V_2	参数边界估计 V_3	计算时间 t (ms)
AESMF	0.000237	0.101674	0.3167	53.12
MIT-AESMF	0.000121	0.032337	0.1846	55.88

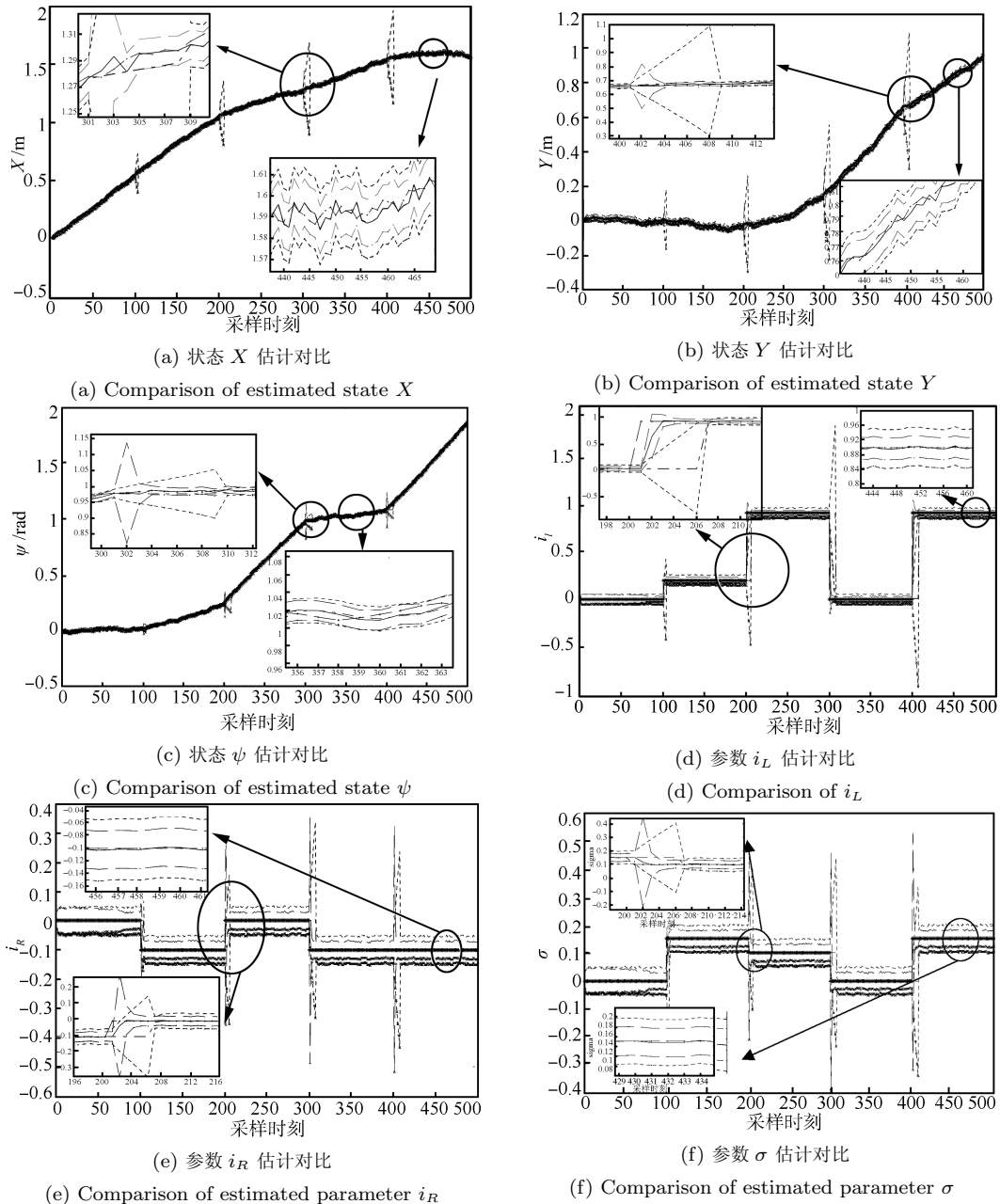


图 4 过程噪声椭圆大于真实值情况下的 AESMF 与 MIT-AESMF 性能对比

Fig. 4 Performance comparison between AESMF and MIT-AESMF when process noise boundaries are larger than true values

观测噪声 \mathbf{v}_{k+1} 仍然均考虑 5% 均匀分布有界噪声. 状态和参数的初始椭球分别假定为过程噪声 \mathbf{w}_k 和 $\mathbf{w}_{p,k}$ 的真实边界 0.5 倍的椭球, 即

$$Q_0 = 10^{-3} \text{diag}\{0.625, 0.625, 0.625, 0.625, 0.625, 0.625\}$$

其余变量取值和参数的阶跃跳变同第 3.1 节.

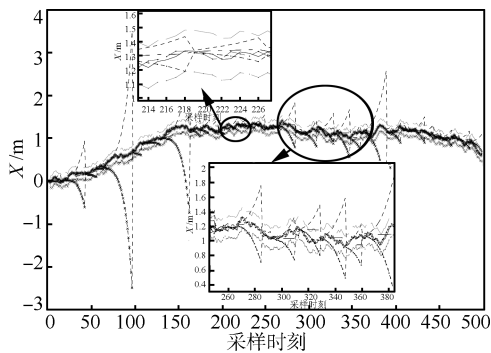
图 5 描述了 MIT-AESMF 在初始过程噪声椭球设定过小情况下的估计和稳定性的改进. 图 5(a)~图 5(c) 为系统状态 $(X_k, Y_k, \psi_k)^T$ 估计对比图, 图 5(d)~图 5(f) 为参数 $(i_{L,k}, Y_{L,k}, \psi_{L,k})^T$ 的估计对比图, 图 5(g) 为滤波器健康指标的对比图.

图 5(a)~图 5(f) 表明, 在 500 个仿真时刻之中, 由于椭球边界初始值设定过小, 因此 AESMF 方法始终使用此过小椭球进行直和运算, 导致状态和参数估计的观测更新的两个椭球不存在交集, 因此不满足 AESMF 选择更新条件, 不确定界不断膨胀至条件满足才会进行测量更新, 而测量更新又导致不确定界收缩至设定的过小的椭球界限附近, 因此又造成观测更新不存在交集, 不断反复下去, 这一过程在健康指标图 5(g) 中明显可见, 健康指标多数时间远小于 0, 滤波器估计无效, 同时导致参数和状态的估计值总是偏离真实值; 而对于 MIT-AESMF 方法, 由于采用对于过程噪声椭球边界的 MIT 自适应机制, 实时调整过程噪声椭球边界趋于过程噪声真实值, 使得 MIT-AESMF 较 AESMF 方法始终具有包含真实值的不确定界, 且估计噪声边界是

AESMF 有效时估计边界的 2 倍左右 (由于其中混合了线性化误差不确定界和观测噪声不确定界, 因此不能恰为 AESMF 边界 2 倍), 这与设定的 1/2 倍真实过程噪声椭球条件相一致, 说明 MIT-AESMF 方法过程噪声估计接近真实值, 健康指标图 5(g) 中明显可见 MIT-AESMF 在参数跳变时只有极短暂的健康指标小于 0, 并迅速恢复至 1 附近, 说明 MIT-AESMF 估计有效性始终被保证; 这两种滤波算法的初始过程噪声椭球边界估计为真实边界 1/2 的情况下的性能比较结果见表 5 所示.

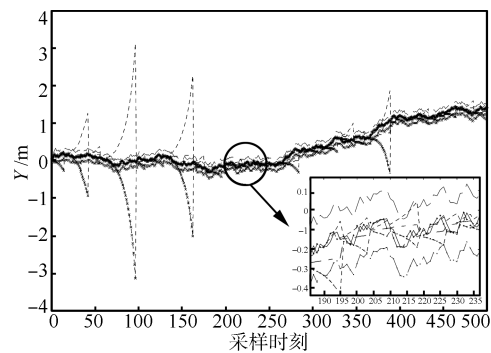
根据图 5 和表 5 所示, 在初始过程噪声椭球边界估计为真实边界 1/2 的情况下, 原始 AESMF 方法由于无法取得观测椭球交集而导致状态和参数估计几乎全部失效, 但由于具有选择更新机制因此一直保证滤波器不致发散; 而 MIT-AESMF 方法在整个过程中, 参数和状态估计始终有效, 且保持着同于表 2 的估计精度, 说明了 MIT 自适应机制引入的有效性和必要性. 此过程由于原始 AESMF 方法大多时间不进行测量更新, 因此时间较表 3 明显缩短, MIT-AESMF 方法计算时间保持与表 3 一致.

综上三种情况的本文所提出的 MIT-AESMF 与原始的 AESMF 方法相比, 虽然计算时间多消耗 10%, 但可以确保在过程噪声椭球设定值过大或小于真实过程噪声边界情况下, 且在参数阶跃发生跳变得情况下, 都能保证估计精度与噪声椭球设定值恰为真实过程噪声边界时的原始 AESMF 最佳估



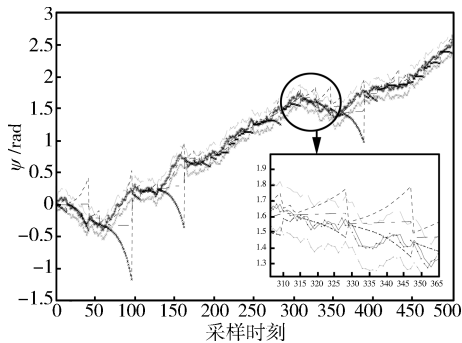
(a) 状态 X 估计对比

(a) Comparison of estimated state X



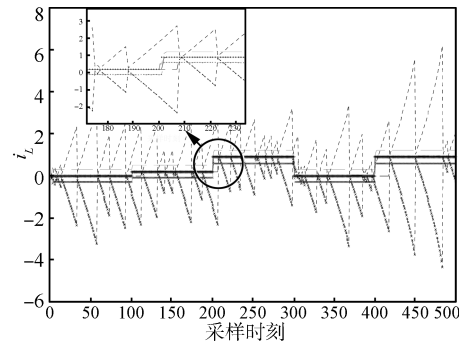
(b) 状态 Y 估计对比

(b) Comparison of estimated state Y



(c) 状态 ψ 估计对比

(c) Comparison of estimated state ψ



(d) 参数 i_L 估计对比

(d) Comparison of estimated parameter i_L

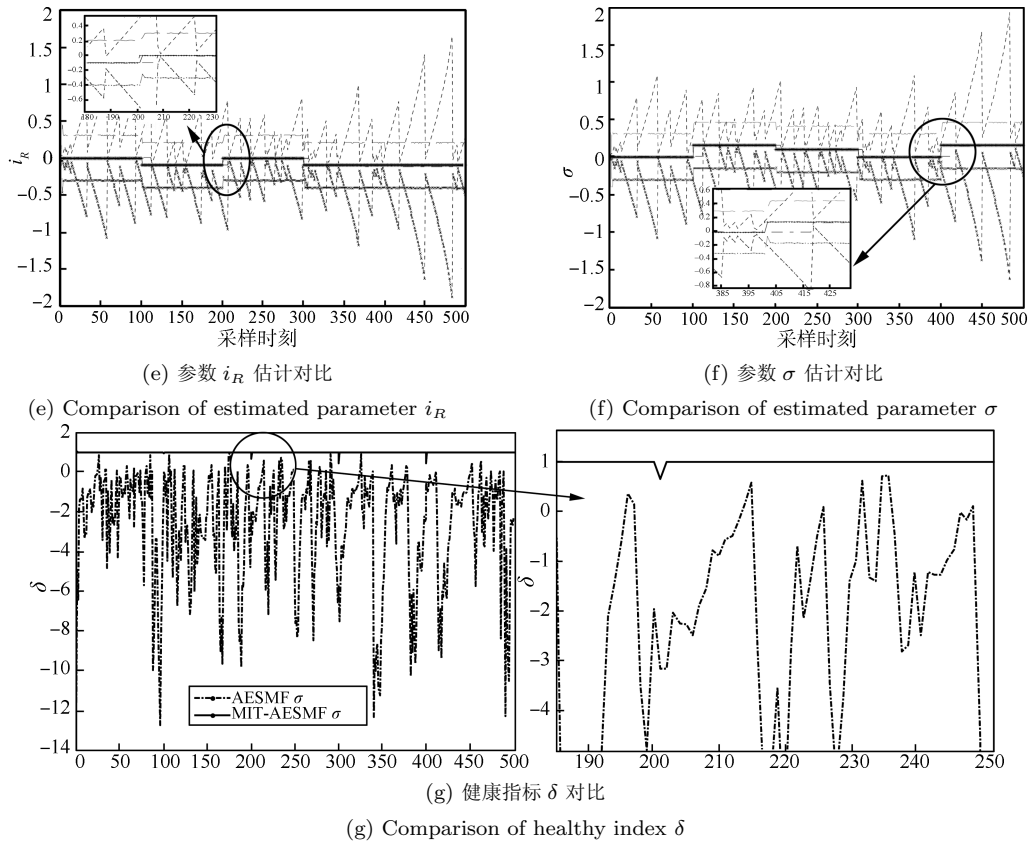


图5 过程噪声椭圆小于真实值情况下的 AESMF 与 MIT-AESMF 性能对比
Fig. 5 Performance comparison between AESMF and MIT-AESMF when process noise boundaries are smaller than true values

表5 AESMF 和 MIT-AESMF 稳态性能比较 (过程噪声椭圆界设定过小)

Table 5 Performance of AESMF and MIT-AESMF when boundaries of process noises are set smaller

	状态估计精度 V_1	参数估计精度 V_2	参数边界估计 V_3	计算时间 t (ms)
AESMF	0.123123	0.183270	3.6138	40.12
MIT-AESMF	0.000188	0.028997	0.1755	55.68

计精度; 同时, 原始 AESMF 方法却会产生较大不确定界限估计偏差, 甚至估计中始终处于估计无效状态; 而且, 在由于系统模型建立不准确而导致的健康指标小于 0 情况下, 本文所提出的 MIT-AESMF 可以更快的恢复至有效范围内, 健康度恢复速率超过接近原始 AESMF 方法 5 倍。

4 结论

本文提出了一种基于 MIT 规则的过程噪声不确定界自适应机制的扩展集员估计方法, 并将其应用于解决非线性系统状态和参数的联合估计问题新的算法通过将原始方法与自适应选择策略等方法的结合, 进一步保证滤波器稳定性, 使得不确定界更逼近真实值的范围, 且计算时间保持与原始 AESMF 方法基本相当。通过带滑动的履带式移动机器人状态和参数联合估计问题的仿真实验, 对改进算法和原始算法进行了比较, 比较结果表明成功地解决了

过程噪声不确定界未知而导致的测量更新椭圆无交集而产生的健康指标恶化问题, 在提升不确定界估计精度的基础上保证了算法的实时性。

References

- Haykin S, de Freitas N. Special issue on sequential state estimation. *Proceedings of the IEEE*, 2004, **92**(3): 399–400
- Ahrens J H, Khalil H K. Closed-loop behavior of a class of nonlinear systems under EKF-based control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(3): 536–540
- Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of IEEE*, 2004, **92**(3) 401–422
- Song Q, Jiang Z, Han J D. UKF-based active model and adaptive inverse dynamics control for mobile robot. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Roma, Italy: IEEE, 2007. 4164–4169
- Salvatore L, Stasi S, Tarchioni L. A new EKF-based algorithm for flux estimation in induction machines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, **40**(5): 496–504

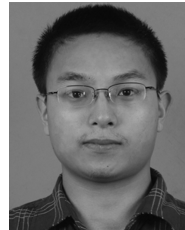
- 6 Julier S, Uhlmann J, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(3): 477–482
- 7 Ljung L. Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, **24**(1): 36–50
- 8 Jiang Z, Song Q, He Y Q, Han J D. A novel adaptive unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In: Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, 2007, New Orleans, LA, USA: IEEE, 2007. 4293–4298
- 9 Peng Y, Han J D, Huang Q J. Adaptive UKF based tracking control for unmanned trimaran vehicles. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2009, **5**(10): 3505–3516
- 10 Rao A K, Huang Y F. Analysis of finite precision effects on a recursive set membership parameter estimation algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, **40**(12): 3081–3085
- 11 Schweppe F. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, **13**(1): 22–28
- 12 Bertsekas D, Rhodes I. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, **16**(2): 117–128
- 13 Fogel E, Huang Y F. On the value of information in system identification-bounded noise case. *Automatica*, 1982, **18**(2): 229–238
- 14 Maksarov D G, Norton J P. State bounding with ellipsoidal set description of the uncertainty. *International Journal of Control*, 1996, **65**(5): 847–866
- 15 Kurzhanski A B, Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability analysis: internal approximation. *Systems and Control Letters*, 2000, **41**(3): 201–211
- 16 Chernousko F L. Ellipsoidal state estimation for dynamical systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2005, **63**(5–7): 872–879
- 17 Polyak B T, Nazin S A, Durieu C, Walter E. Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty. *Automatica*, 2004, **40**(7): 1171–1179
- 18 Scholte E, Campbell M E. A nonlinear set-membership filter for on-line applications. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, **13**(15): 1337–1358
- 19 Zhou B, Han J D, Liu G J. A UD factorization-based nonlinear adaptive set-membership filter for ellipsoidal estimation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, **18**(16): 1513–1531
- 20 Zhou Bo, Han Jian-Da. A UD factorization-based adaptive extended set-membership filter. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(2): 150–158
(周波, 韩建达. 基于 UD 分解的自适应扩展集员估计方法. *自动化学报*, 2008, **34**(2): 150–158)
- 21 Zhou B, Han J D. Nonlinear estimation methods for autonomous tracked vehicle with slip. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2007, **20**(4): 1–7
- 22 Dierks T, Jagannathan S. Output feedback control of a quadrotor UAV using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, **21**(1): 50–66
- 23 Song Da-Lei, Qi Jun-Tong, Han Jian-Da, Wang Yue-Chao. Model identification and active modeling control for rotor fly-robot: theory and experiment. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(4): 480–495
(宋大雷, 齐俊桐, 韩建达, 王越超. 旋翼飞行器机器人系统建模与主动模型控制理论及实验研究. *自动化学报*, 2011, **37**(4): 480–495)

- 24 Zhao J, Zhu L, Zang X Z, Liu G F, Liu G. Dynamics analysis of a novel mine disaster searching robot. *Applied Mechanics and Materials*, 2011, **39**: 363–368
- 25 Gu D Z, Walker D K, Randa J. Variable termination unit for noise-parameter measurement. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2009, **58**(4): 1072–1077
- 26 Song Q, Han J D. An adaptive UKF algorithm for the state and parameter estimations of a mobile robot. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(1): 72–79



宋大雷 中国科学院沈阳自动化研究所助理研究员. 2006 年于北京航空航天大学获工学学士学位. 2011 年于中国科学院沈阳自动化研究所获工学博士学位. 主要研究方向为移动机器人建模与控制. E-mail: daleisong@sia.cn

(**SONG Da-Lei** Associate professor at Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. He received his bachelor degree from Beihang University in 2006, and received his Ph. D. degree from Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences in 2011. His research interest covers modeling and control for moving robots.)



吴冲 中国科学院沈阳自动化研究所博士研究生. 2008 年于华中科技大学获工学学士学位. 主要研究方向为旋翼飞行器机器人估计与控制. E-mail: wuchong@sia.cn

(**WU Chong** Ph. D. candidate at Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. He received his bachelor degree from Huazhong University of Science and Technology in 2008. His research interest covers prediction and control for fly-robot with rotor wings.)



齐俊桐 中国科学院沈阳自动化研究所助理研究员. 2004 年于天津大学获工学学士学位. 2009 年于中国科学院沈阳自动化研究所获工学博士学位. 主要研究方向为移动机器人故障诊断与容错控制. 本文通信作者. E-mail: qijt@sia.cn

(**QI Jun-Tong** Associate professor at Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. He received his bachelor degree from Tianjin University in 2004, and received his Ph. D. degree from Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences in 2009. His research interest covers fault detection and fault tolerance control for moving robots. Corresponding author of this paper.)



韩建达 中国科学院沈阳自动化研究所研究员. 主要研究方向为基于传感器的机器人鲁棒控制系统设计, 多机器人系统和智能控制系统设计. E-mail: jdhan@sia.cn

(**HAN Jian-Da** Professor at Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers sensor-based robot robust control system design, multi-robot system, and intelligent control system design.)