

自组织状态空间模型参数初始 分布搜索算法

甘敏¹ 彭辉^{2,3} 黄云志¹ 董学平¹

摘要 自组织状态空间模型为估计非线性非高斯状态空间模型中的未知参数提供了一种有效方法. 针对自组织状态空间模型中参数的初始分布难以确定的难点, 提出了一种搜索自组织状态空间模型参数初始分布的算法. 所用搜索算法基于一种高效的进化模型, 具有全局搜索能力, 使得参数的初始分布向真实参数“移动”. 数值实验分析结果验证了提出方法的有效性.

关键词 自组织状态空间模型, 粒子滤波, 参数估计, 非线性, 非高斯

引用格式 甘敏, 彭辉, 黄云志, 董学平. 自组织状态空间模型参数初始分布搜索算法. 自动化学报, 2012, 38(9): 1538–1543

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.01538

Initial Distribution Search Algorithm for Self-organizing State Space Model

GAN Min¹ PENG Hui^{2,3} HUANG Yun-Zhi¹
DONG Xue-Ping¹

Abstract The self-organizing state space model provides an efficient approach to estimating unknown parameters in a non-linear non-Gaussian state space model. However, a difficult problem is how to determinate the initial distributions of parameters for a self-organizing state space model. To address this problem, this paper proposes an algorithm to seek the initial distribution of parameters for a self-organizing state space model. The proposed algorithm is based on an efficient evolutionary computation model which has global search capability. It makes the initial distribution of parameters close to the true parameter situation. The results of numerical experiments show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words Self-organizing state space model, particle filter, parameter estimation, nonlinear, non-Gaussian

Citation Gan Min, Peng Hui, Huang Yun-Zhi, Dong Xue-Ping. Initial distribution search algorithm for self-organizing state space model. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(9): 1538–1543

收稿日期 2011-01-04 录用日期 2012-05-10

Manuscript received January 4, 2011; accepted May 10, 2012

国家国际科技合作计划 (2011DFA10440), 国家自然科学基金 (70921001, 61203106, 71271215, 51007016, 60974022), 湖南省科技厅国际合作重点项目 (2009WK2009), 中央高校基本科研业务费专项资金 (2010HGBZ0597, 2011HGQC0995) 资助

Supported by International Science and Technology Cooperation Program of China (2011DFA10440), National Natural Science Foundation of China (70921001, 61203106, 71271215, 51007016, 60974022), Key International Cooperation Programs of Hunan Provincial Science and Technology Department (2009WK2009), and Fundamental Research Funds for the Central Universities (2010HGBZ0597, 2011HGQC0995)

本文责任编辑 韩崇昭

Recommended by Associate Editor HAN Chong-Zhao

1. 合肥工业大学电气与自动化工程学院 合肥 230009 2. 中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083 3. 先进控制与智能自动化湖南省工程实验室 长沙 410083

1. School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei 230009 2. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083 3.

在自然科学、工程和经济等领域, 人们常常需要在仅知道一些不精确的观测值的情况下, 估计动态模型的状态. 如果模型是线性、高斯的状态空间模型, 卡尔曼滤波^[1]是解决这类问题的强有力工具. 随着应用的扩展, 研究者对各种“非标准 (Non-standard)” (非线性、非高斯) 的时间序列产生了越来越强烈的兴趣, 因为普通的线性高斯模型已得不到合理的结果. 一个最直接的想法就是用线性模型去近似非线性模型、用高斯分布近似非高斯分布, 这就导致了各类扩展的卡尔曼滤波^[2]. 扩展的卡尔曼滤波, 从概念上来讲就有固有的缺陷, 因为得到的是一个“错误”问题的最优解. 一个更有吸引力的方法是保持模型的非线性、非高斯结构, 而去得到其近似最优解, Kitagawa^[3]和 Gordon 等^[4]提出的蒙特卡罗粒子滤波就是此类方法. 最近, 粒子滤波已被广泛应用于各种问题^[5].

蒙特卡罗粒子滤波是一种递归地生成和更新一组带权重的粒子来近似系统状态变量后验概率分布的模拟技术. 在模型参数都已知的假定下, 大量的粒子滤波算法被提出^[6–11]. 然而, 在实际应用中模型中的某些参数可能是未知的, 此时就需要从观测数据中估计出这些参数. 用蒙特卡罗粒子滤波来精确估计模型参数是非常困难的, 其主要原因是用粒子滤波计算的似然度存在取样误差 (Sampling error), 因而很难获取精确的极大似然估计. 为此, Kitagawa^[12]提出了自组织的状态空间模型的方法. 在自组织状态空间模型中状态向量被扩展为包括原始模型状态和未知参数情形, 然后扩展的状态向量用蒙特卡罗粒子滤波来估计, 这样状态和参数就被同时估计出来而不用极大化粒子滤波的似然度. Hüseler 等^[13]指出应用自组织状态空间模型的难点在于未知参数的初始取样中可能只有少量的值在其后验分布所集中的区域, 因而可能得不到后验分布位置、形状的精确信息. 针对这个难点, Yano^[14]基于 Nelder-Mead 单纯形方法最小化负的对数似然度来搜索参数的初始分布. 但是, 正如 Yano 所指出的, 这种初始分布搜索算法很容易落入局部最优点^[14]. 还有, Kitagawa 也指出当对数似然度有许多局部极值时, 为较好同时估计状态和参数, 需先最大化对数似然度把初始参数空间限制在一个较小的区域, 然后再应用自组织状态空间模型^[12].

针对以上问题, 本文提出了基于一种进化模型的自组织状态空间模型参数初始分布全局搜索算法. 由于蒙特卡罗粒子滤波所计算的似然度是用“粒子”来近似的, 所以似然度函数实际上是不可微的. 进化算法有不需要目标函数连续可微的优势, 而且本文所用的进化模型有较强的全局搜索能力, 因而它非常适合解决以上问题. 通过用进化算法来最小化负的自组织状态空间模型的对数似然度, 可使参数的初始分布向其“真实”分布靠近. 三组数值实验结果和比较表明了算法的有效性.

1 自组织状态空间模型

考虑时间序列 $\{\mathbf{y}_t, t = 1, \dots, T\}$ 一般化的非线性、非高斯的状态空间模型:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \\ \mathbf{y}_t = h(\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t) \end{cases} \quad (1)$$

其中, \mathbf{x}_t 是 n_s 维的未知状态变量, \mathbf{y}_t 是 n_m 维的观测变量;

Hunan Engineering Laboratory for Advanced Control and Intelligent Automation, Changsha 410083

\mathbf{v}_t 和 \mathbf{w}_t 分别是 n_v 和 n_w 维系统噪声和观测噪声, 其密度函数分别为 $q(\mathbf{v})$ 和 $r(\mathbf{w})$; $f: \mathbf{R}^{n_s} \times \mathbf{R}^{n_v} \rightarrow \mathbf{R}^{n_s}$ 表示可能的非线性状态转移函数, $h: \mathbf{R}^{n_s} \times \mathbf{R}^{n_w} \rightarrow \mathbf{R}^{n_w}$ 表示可能的非线性观测函数. 模型 (1) 的第一个方程叫系统方程, 第二个方程叫观测方程.

状态空间模型 (1) 包含了一类广泛的线性、非线性, 高斯、非高斯时间序列模型. 当模型的参数已知时, 状态空间建模一个重要的问题就是从观测数据中估计出状态向量 \mathbf{x}_t . 如果模型是线性、高斯的, 卡尔曼滤波给出了最优滤波解. 但是对于非线性、非高斯的情形, 不存在闭合形式的解. 最初的通常做法是把非线性模型线性化, 并假设噪声为高斯分布, 这种方法会导致估计精确不高、滤波发散等问题. 近年来, 粒子滤波在解决非线性、非高斯状态空间模型的状态滤波问题上得到了极大关注, 这种方法通过蒙特卡罗模拟方法来实现递归贝叶斯滤波, 递归地生成和更新一组带权重的粒子来近似系统状态变量的后验概率密度. 与扩展的卡尔曼滤波相比, 粒子滤波一个吸引人的特点是它提供了对一个正确问题的近似解, 而不是对一个“错误问题”的最优解.

在一些实际问题中, 状态空间模型 (1) 中的函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, $h(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ 和密度函数 $q(\mathbf{v})$ 和 $r(\mathbf{w})$, 可能会含有某些未知参数. 此时, 我们需要从观测数据中估计出这些参数, 记未知参数所组成的向量为 θ . 最大化似然函数是估计模型参数最常用的方法. 模型 (1) 明确了两个条件密度函数: 给定前一状态 \mathbf{x}_{t-1} 时状态 \mathbf{x}_t 的密度 $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \theta)$; 给定状态 \mathbf{x}_t 时 \mathbf{y}_t 的密度 $p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t, \theta)$. 把到时刻 j 的观测值集合记为 $\mathbf{Y}_j = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_j\}$, 则参数 θ 所对应的模型似然度函数为

$$L(\theta) = p(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T|\theta) = \prod_{t=1}^T p(\mathbf{y}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, \theta) \quad (2)$$

其中, $p(\mathbf{y}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, \theta)$ 是给定 \mathbf{Y}_{t-1} 时 \mathbf{y}_t 的条件密度, 且有:

$$p(\mathbf{y}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, \theta) = \int p(\mathbf{y}_t, \mathbf{x}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, \theta) d\mathbf{x}_t = \int p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t, \theta)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, \theta) d\mathbf{x}_t \quad (3)$$

参数 θ 的极大似然估计由最大化对数似然函数 $l(\theta) = \log L(\theta)$ 得到. 然而, 极大似然法遇到的一个问题是粒子滤波计算的似然度存在取样误差. 考虑到这个问题, Kitagawa^[12] 提出了一种贝叶斯估计方法, 把状态向量扩展为

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

则对于这个扩展状态向量的状态空间模型为

$$\begin{cases} \mathbf{z}_t = F(\mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \\ \mathbf{y}_t = H(\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t) \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$F(\mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{v}_t) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \\ \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$H(\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t) = h(\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t) \quad (7)$$

状态空间模型 (5) 被称为自组织的状态空间模型, 由于原始状态向量 \mathbf{x}_t 和参数向量 θ 被包含在扩展状态向量 \mathbf{z}_t

中, 那么就可以不需要最大化似然函数就同时得到参数和原始状态向量的边缘后验概率密度:

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{Y}_T) = \int p(\mathbf{z}_t|\mathbf{Y}_T) d\theta = \int p(\mathbf{x}_t, \theta|\mathbf{Y}_T) d\theta \quad (8)$$

$$p(\theta|\mathbf{Y}_T) = \int p(\mathbf{z}_t|\mathbf{Y}_T) d\mathbf{x}_t = \int p(\mathbf{x}_t, \theta|\mathbf{Y}_T) d\mathbf{x}_t \quad (9)$$

2 基于进化模型的初始分布搜索

在自组织状态空间模型 (5) 的框架下, 给定未知参数的初始分布, 用普通的蒙特卡罗粒子滤波算法就可以估计出扩展的状态向量了. 假设参数向量 θ 的初始粒子 $\theta_0^{(i)} \{i = 1, \dots, M\}$ 从下面的均匀分布中取样:

$$\theta_{0,j}^{(i)} \sim \text{uniform}(c_j - r_j, c_j + r_j) \quad (10)$$

其中, $\theta_{0,j}^{(i)}$ 是 $\theta_0^{(i)}$ 的第 j 个分量, $\text{uniform}(c_j - r_j, c_j + r_j)$ 表示从 $c_j - r_j$ 到 $c_j + r_j$ 的均匀分布, r_j 是用户根据所解问题选取的一个实数. 记 c_j 为 \mathbf{C} 的第 j 个分量, r_j 为 \mathbf{r} 的第 j 个分量, 则自组织状态空间模型的滤波算法可如下描述.

算法 1. 自组织状态空间模型 (Self-organizing state space model, SOSS)

```

[ { {z_t^{(i)}, w_t^{(i)}}_{i=1}^M }_{t=1}^T, llk ] =
SOSS [ {x_0^{(i)}}_{i=1}^M, {y_t}_{t=1}^T, C ]
{
  初始化负的对数似然度: llk = 0.
  初始化粒子集: theta_0^{(i)} ~ uniform(C - r, C + r),
  {z_0^{(i)}}_{i=1}^M = ( {x_0^{(i)}}_{i=1}^M, {theta_0^{(i)}}_{i=1}^M ).
  for t = 1, ..., T
    for i = 1, ..., M
      预测: z_t^{(i)} ~ p(z_t|z_{t-1}^{(i)});
      计算粒子权重: w_t^{(i)} = p(y_t|z_t = z_t^{(i)});
    endfor
    负的对数似然度: llk = llk - log( (sum_{i=1}^M w_t^{(i)}) / M );
    权重归一化: w_tilde_t^{(i)} = w_t^{(i)} / (sum_{i=1}^M w_t^{(i)});
    重取样:
      {z_t^{(i)}, w_t^{(i)}}_{i=1}^M = resample[ {z_t^{(i)}, w_tilde_t^{(i)}}_{i=1}^M ];
    endfor
  return [ { {z_t^{(i)}, w_t^{(i)}}_{i=1}^M }_{t=1}^T, llk ].
}

```

Hüseler 等^[13] 指出应用自组织状态空间模型的难点在于滤波后的取样 $\theta_t^{(i)}$ 是初始取样 $\theta_0^{(i)}$ 的子集, 而未知参数的初始分布不好确定, 假定的初始取样中可能只有少量的值在其后验分布所集中的区域, 因而难以得到好的结果. 针对这个问题本文提出了一种搜索自组织状态空间模型参数初始分布算法, 其主要思想是最小化自组织状态空间模型的负的对数似然度, 使未知参数的初始分布向真实参数“移动”. 蒙特卡罗粒子滤波算法所计算的似然度是用“粒子”来近似的, 所以似然度函数实际上是不可微的. 进化算法作为一种全局搜索算法有目标函数不需可微或连续、易执行和稳健性等优点. 对于实参优化问题, Deb^[15] 提出了一种基于群的算法发生器, 这种方法把搜索分为四个独立的策略: 选择策

略、生成后代策略、替换策略和更新策略。受 Deb 的启发, Cai 等^[16]设计了一种非常有效的基于群的算法发生器模型, 这种计算模型在解决目标函数维数较高且拓扑结构复杂的问题上也取得了很好的效果。因而本文基于这种进化模型来搜索自组织状态空间模型的初始分布。Yano^[14]提出了基于 Nelder-Mead 单纯形方法来搜索参数的初始分布, 但是, 正如 Yano 所指出的, 这种方法很容易落入局部最优点。Kitagawa 也指出当对数似然度有许多局部极值时, 为较好同时估计状态和参数, 需先最大化对数似然度把初始参数空间限制在一个较小的区域^[12]。本文基于这种进化模型的全局搜索算法可较好解决以上问题, 具体算法步骤如下:

算法 2. 进化初始分布搜索算法 (Evolutionary SOSS, ESOSS)

$$[P] = \text{ESOSS} \left(\left\{ \mathbf{x}_0^{(i)} \right\}_{i=1}^M, \left\{ \mathbf{y}_t \right\}_{t=1}^T, \mu, \lambda \right)$$

{

1) 初始化。在可能的搜索空间初始化规模为 N 的群体 C_1, C_2, \dots, C_N 表示式 (10) 中均匀分布的中心。把总群体记为集合 P 。

计算对数似然度。对群体中的每一个个体 C_i 用算法 1 计算其对数似然度 llk , 并把对数似然度作为个体的适应值。

for $gen = 1, \dots, tm_gen$

2) 选择。从群体 P 中随机选取 μ 个个体, 记为集合 Q 。从集合 P 中减去集合 Q , 即 $P = P - Q$ 。

3) 生成后代。用单形杂交算子把集合 Q 中的个体作为父体产生 λ 个后代 (集合 R)。记 Q 中的 μ 个个体为 $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, \mu$, 则生成一个后代的步骤如下, 其中单形杂交算子的参数根据文献 [16] 来选择。

a) 计算 μ 个父体的中心: $\mathbf{o} = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\mu} \mathbf{x}_i$

b) 用扩展因子 $(1 + \tau)$ 沿 $(\mathbf{x}_i - \mathbf{o})$ 的各个方向扩展原始的单形, 来形成一个新的单形:

$$\mathbf{y} = (1 + \tau)(\mathbf{x}_i - \mathbf{o}), \quad i = 1, \dots, \mu$$

c) 从新单形中选择一个点作为后代:

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{\mu} k_i \mathbf{y}_i + \mathbf{o}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_{\mu} = 1$$

4) 替换。用算法 1 计算集合 R 中个体适应值。从集合 R 中选出适应值最小的个体, 记为 \mathbf{s}_1 ; 从集合 Q 中选出适应值最大的个体, 记为 \mathbf{s}_2 。如果 \mathbf{s}_1 的适应值小于 \mathbf{s}_2 的, 用 \mathbf{s}_1 替换 \mathbf{s}_2 ; 否则, 没有替换。

5) 更新。把集合 P 和集合 Q 合并, 即 $P = P \cup Q$ 。

endfor

return $[P]$

}

表 1 单变量静态增长模型参数估计结果

Table 1 Comparison results of parameter estimation of the univariate nonstationary growth model

| Method | Initial values | -Log-likelihood | σ_s | σ_m | Likelihood function evaluation number |
|------------------------|---|-----------------|------------|------------|---------------------------------------|
| Evolutionary algorithm | $\sigma_s \sim \text{uniform}(0.1, 15)$ | 246.1691 | 2.9280 | 0.8642 | 630 |
| | $\sigma_m \sim \text{uniform}(0.1, 15)$ | (0.1206) | (0.0886) | (0.0603) | |
| Simplex Nelder-Mead | [0.5, 0.5] | 446.3865 | 0.5488 | 0.5975 | 425 |
| | [2, 0.8] | 246.7476 | 2.2501 | 1.2107 | 391 |
| True parameter value | | | 3 | 1 | |

3 数值实验

在本节中, 我们用三个例子来检验提出的初始分布搜索算法的效果。第一个为单变量非静态增长模型, 第二个为随机波动模型, 第三个为金融市场微结构模型。每个例子都生成 100 个数据 ($T = 100$)。取式 (10) 中的参数 $r_j = 0.1$, 进化算法中的群体规模 $N = 30, \mu = \lambda = n + 1$ (n 为未知参数 θ 的维数), 进化代数 200。粒子滤波算法的粒子数目 $M = 6000$, 重采样算法采用残差重采样。

3.1 单变量非静态增长模型

考虑以下的单变量非静态增长模型, 它是一个非线性高斯状态空间模型:

$$x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{25x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + 8 \cos(1.2(t-1)) + v_t,$$

$$x_0 \sim N(0, 1)$$

$$y_t = \frac{x_t^2}{20} + w_t \tag{11}$$

其中, $v_t \sim N(0, \sigma_s^2), w_t \sim N(0, \sigma_m^2)$ 。在此模型中, σ_s 和 σ_m 为未知参数, 其真实值为 $\sigma_s = 3, \sigma_m = 1$ 。则自组织状态空间模型扩展的状态向量为

$$\mathbf{z}_t = \left(x_t \quad \sigma_s \quad \sigma_m \right)^T \tag{12}$$

用模型 (11) 生成长度为 100 的时间序列, 表 1 中第 2 行给出了应用本文提出的算法得到的结果。表中的结果为算法运行 15 次, σ_s 和 σ_m 初始均匀分布中心的平均值, 括号内为标准差, 图 1 给出了估计结果的盒图。可以看到应用进化算法

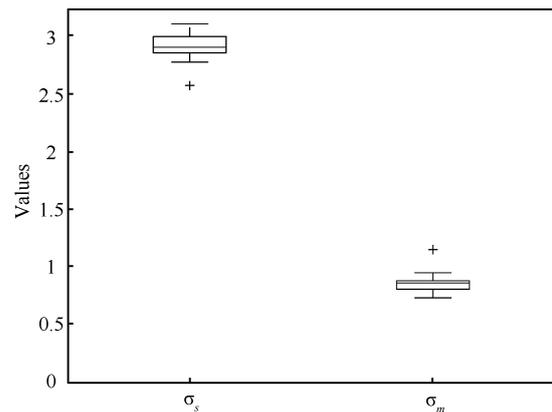


图 1 单变量非线性增长模型参数估计盒图

Fig. 1 Boxplots of estimated parameters of the univariate nonstationary growth model

得到的结果非常接近真实值. 表中也给出了用 Nelder-Mead 单纯形方法从不同初始点得到的结果, 可以看到单纯形方法还是较容易落入局部最优的, 其结果要明显劣于进化算法. 从算法的复杂度来看, 运行一次进化算法计算似然度方程的次数为 630, 对于 Nelder-Mead 单纯形方法从两个不同的点出发的计算量就超出了进化算法. 因而, 本文提出的初始分布搜索算法是既得到了较好结果也有较高的效率, 其性能要高于单纯形法. 图 2 给出了模型 (11) 的真实状态和用本文算法估计到的状态值, 可以看到在模型某些参数未知的情况下状态也得到了较好的估计.

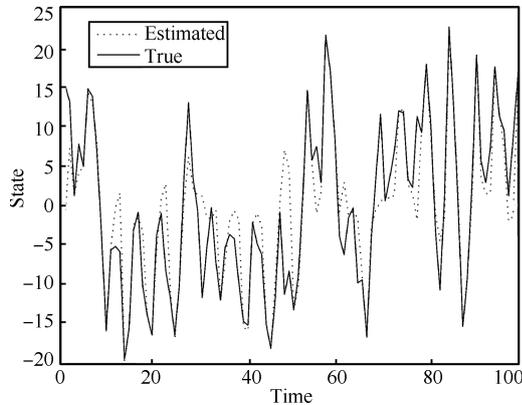


图 2 单变量非线性增长模型真实状态与估计状态值

Fig. 2 True values and estimated values of the states of the univariate nonstationary growth model

3.2 随机波动率模型

考虑以下定义的随机波动率模型:

$$\begin{aligned} x_t &= 0.8x_{t-1} + v_t, \quad x_0 \sim N(0, 1), \\ y_t &= \beta \exp\left(\frac{x_t}{2}\right) w_t \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $v_t \sim N(0, \sigma_s^2)$, $w_t \sim N(0, 1)$. 在此模型中, σ_s 和 β 为未知参数, 其真实值为 $\sigma_s = 3, \beta = 1$. 自组织状态空间模型扩展的状态向量为

$$\mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} x_t & \sigma_s & \beta \end{pmatrix}^T \quad (14)$$

用模型 (13) 生成长度为 100 的时间序列, 表 2 中第 2 行给出了应用本文提出的算法得到的结果. 同样, 表 2 中的结果为算法运行 15 次, σ_s 和 β 初始均匀分布中心的平均值, 括号内为标准差, 图 3 给出了估计结果的盒图. 表中也给出了用 Nelder-Mead 单纯形方法从不同初始点得到的结果, 可以看到其结果要明显劣于进化算法. 图 4 给出了真实状态值 x_t 和用本文算法估计到的状态值, 可以看到模型的状态值得到了较好的估计.

3.3 金融市场微结构模型

由 Peng 等^[17] 提出的金融市场微结构模型的状态方程有如下形式:

$$\begin{cases} P_t = P_{t-1} + \phi_{t-1}e^{\lambda_{t-1}} + e^{\frac{\lambda_{t-1}}{2}} v_{1,t} \\ \phi_t = 0.001 + \beta_1 \phi_{t-1} + v_{2,t} \\ \lambda_t = -0.001 + \beta_2 \lambda_{t-1} + v_{3,t} \end{cases} \quad (15)$$

观测方程为

$$\begin{cases} y_{1,t} = P_t + w_{1,t} \\ y_{2,t} = e^{\lambda_t} + w_{2,t} \end{cases} \quad (16)$$

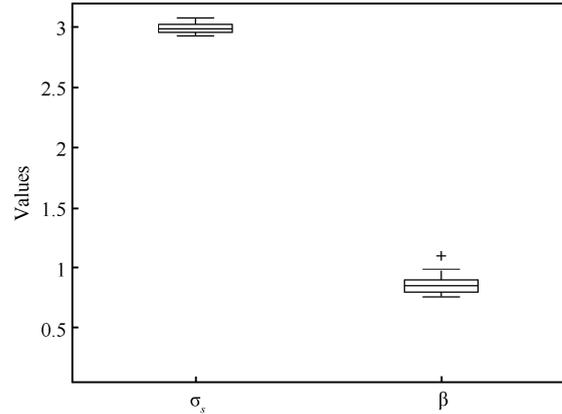


图 3 随机波动率模型参数估计盒图

Fig. 3 Boxplots of estimated parameters of the stochastic volatility model

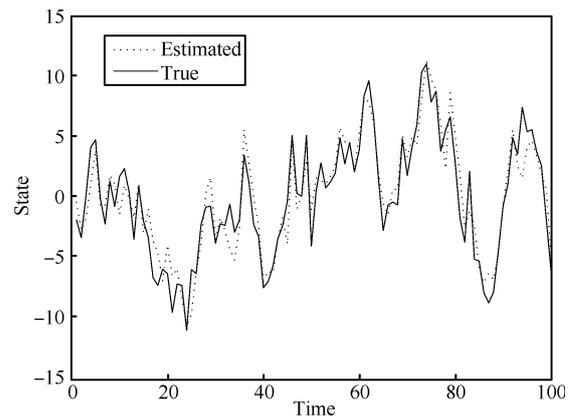


图 4 随机波动率模型真实状态与估计状态值

Fig. 4 True values and estimated values of the state of the stochastic volatility model

其状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \\ \mathbf{y}_t = h(\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t) \end{cases} \quad (17)$$

其中, $\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} P_t & \phi_t & \lambda_t \end{bmatrix}^T$, $v_{1,t} \sim N(0, 0.1^2)$, $v_{2,t} \sim N(0, 0.05^2)$, $v_{3,t} \sim N(0, 0.05^2)$, $w_{1,t} \sim N(0, 0.01^2)$, $w_{2,t} \sim N(0, 0.05^2)$. 在模型 (17) 中, β_1 和 β_2 为未知参数, 其真实值为 $\beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.9$. 自组织状态空间模型扩展的状态向量为

$$\mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} P_t & \phi_t & \lambda_t & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}^T \quad (18)$$

用模型 (17) 生成长度为 100 的时间序列, 表 3 中第 2 行给出了应用本文提出的算法得到的结果. 表 3 中的结果为算法运行 15 次, β_1 和 β_2 初始均匀分布中心的平均值, 括号内为标准差, 图 5 给出了估计结果的盒图. 可以看到对于此高维的例子, 应用本文提出的算法得到的结果还是非常接近真实值. 表中也给出了用 Nelder-Mead 单纯形方法从不同初始点得到的结果, 其结果要明显劣于进化算法. 图 6~图 8 给出了真实状态值 $\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} P_t & \phi_t & \lambda_t \end{bmatrix}^T$ 和用本文算法估计到的状态值, 可以看出估计的状态值和真实状态值是非常接近的.

表 2 随机波动率模型参数估计结果

Table 2 Comparison results of parameter estimation of the stochastic volatility model

| Method | Initial values | -Log-likelihood | σ_s | σ_m | Likelihood function evaluation number |
|------------------------|---|-----------------|------------|------------|---------------------------------------|
| Evolutionary algorithm | $\sigma_s \sim \text{uniform}(0.1, 15)$ | 210.3486 | 2.9942 | 0.8660 | 630 |
| | $\sigma_m \sim \text{uniform}(0.1, 15)$ | (0.0761) | (0.0450) | (0.0921) | |
| Simplex Nelder-Mead | [0.5, 0.5] | 445.7575 | 0.5032 | 0.5250 | 243 |
| | [2, 0.6] | 246.7476 | 2.2501 | 1.2107 | 391 |
| | [4, 2] | 211.0952 | 3.1234 | 1.9123 | 315 |
| True parameter value | | | 3 | 1 | |

表 3 金融市场微结构模型参数估计结果

Table 3 Comparison results of parameter estimation of the financial market microstructure model

| Method | Initial values | -Log-likelihood | σ_s | σ_m | Likelihood function evaluation number |
|------------------------|--|-----------------|------------|------------|---------------------------------------|
| Evolutionary algorithm | $\sigma_s \sim \text{uniform}(0.1, 2)$ | -173.9235 | 0.9211 | 0.9109 | 630 |
| | $\sigma_m \sim \text{uniform}(0.1, 2)$ | (0.4559) | (0.0318) | (0.0313) | |
| Simplex Nelder-Mead | [0.6, 0.6] | -147.6285 | 0.6156 | 0.6148 | 255 |
| | [1.1, 1.1] | -171.4299 | 1.0600 | 1.0655 | 292 |
| | [1.1, 0.6] | -169.0340 | 1.0441 | 0.6394 | 284 |
| True parameter value | | | 0.9 | 0.9 | |

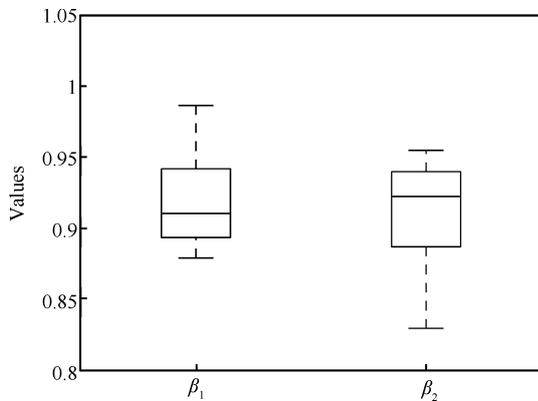


图 5 金融市场微结构模型参数估计盒图

Fig. 5 Boxplots of estimated parameters of the financial market microstructure model

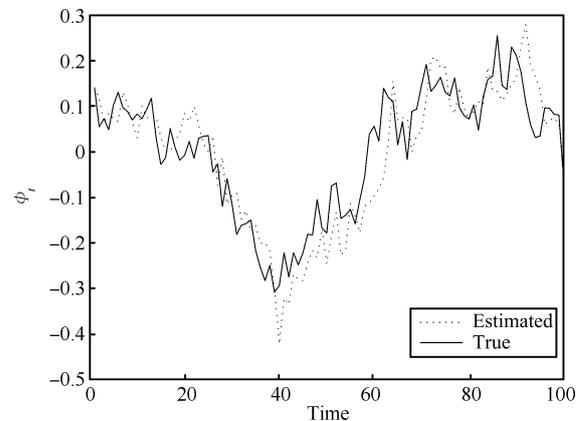


图 7 金融市场微结构模型真实状态与估计状态值 (ϕ_t)

Fig. 7 True values and estimated values of the state of the financial market microstructure model (ϕ_t)

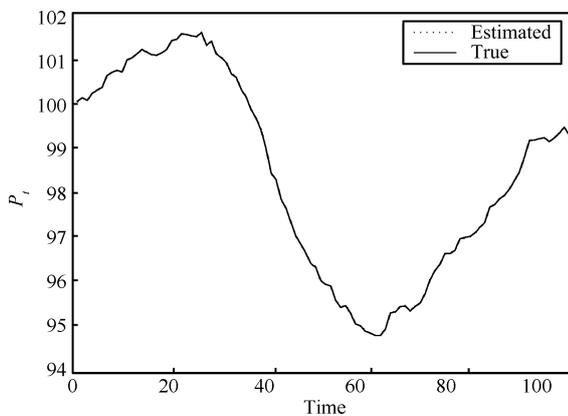


图 6 金融市场微结构模型真实状态与估计状态值 (P_t)

Fig. 6 True values and estimated values of the state of financial market microstructure model (P_t)

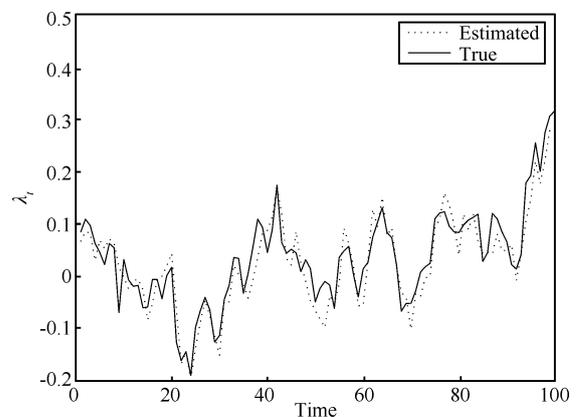


图 8 金融市场微结构模型真实状态与估计状态值 (λ_t)

Fig. 8 True values and estimated values of the state of the financial market microstructure model (λ_t)

4 结论

本文提出了一种基于一种进化模型的自组织状态空间模型参数初始分布搜索算法, 通过最小化自组织状态空间模型负的对数似然度, 使参数的初始分布向其“真实”分布靠近. 这种方法实际上结合了最大似然估计和贝叶斯估计方法, 适用于一类非常广泛的非线性非高斯模型, 可同时估计出动态系统中的状态和未知参数. 所用的进化算法是一种高效的进化模型, 具有较强全局搜索能力, 可解决目标函数的不可微问题. 三个仿真例子的实验结果表明算法可较好估计出模型中的未知参数和状态, 且其性能从整体上要优于单纯形方法.

References

- 1 Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 1960, **82**(1): 35–45
 - 2 Alspach D L, Sorenson H W. Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, **17**(4): 439–448
 - 3 Kitagawa G. Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space model. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 1996, **5**(1): 1–25
 - 4 Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEEE Proceedings F: Radar and Signal Processing*, 1993, **140**(2): 107–113
 - 5 Doucet A, de Freitas N, Gordon N. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Heidelberg: Springer, 2001
 - 6 Zuo Jun-Yi, Zhang Yi-Zhe, Liang Yan. Particle filter based on adaptive part resampling. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(4): 647–652
(左军毅, 张怡哲, 梁彦. 自适应不完全重采样粒子滤波器. *自动化学报*, 2012, **38**(4): 647–652)
 - 7 Ouyang Cheng, Ji Hong-Bing, Guo Zhi-Qiang. Improved multiple model particle PHD and CPHD filters. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 341–348
(欧阳成, 姬红兵, 郭志强. 改进的多模型粒子 PHD 和 CPHD 滤波算法. *自动化学报*, 2012, **38**(3): 341–348)
 - 8 Wang Xiang-Hai, Fang Ling-Ling, Cong Zhi-Huan. Research on real-time multi-target tracking algorithm based on MSPF. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(1): 139–144
(王相海, 方玲玲, 丛志环. 基于 MSPF 的实时监控多目标跟踪算法研究. *自动化学报*, 2012, **38**(1): 139–144)
 - 9 Yang Xiao-Jun, Xing Ke-Yi. Channel fault tolerant target tracking in multi-hop wireless sensor networks based on particle filtering. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(4): 440–448
(杨小军, 邢科义. 无线多跳传感器网络下基于粒子滤波的信道容错的目标跟踪方法. *自动化学报*, 2011, **37**(4): 440–448)
 - 10 Zhao Ling-Ling, Ma Pei-Jun, Su Xiao-Hong. A fast quasi-Monte Carlo-based particle filter algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(9): 1351–1356
(赵玲玲, 马培军, 苏小红. 一种快速准蒙特卡罗粒子滤波算法. *自动化学报*, 2010, **36**(9): 1351–1356)
 - 11 Ye Long, Wang Jing-Ling, Zhang Qin. Genetic resampling particle filter. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(8): 885–887
(叶龙, 王京玲, 张勤. 遗传重采样粒子滤波器. *自动化学报*, 2007, **33**(8): 885–887)
 - 12 Kitagawa G. A self-organizing state-space model. *Journal of the American Statistical Association*, 1998, **93**(443): 1203–1215
 - 13 Hüseler M, Künsch H R. Approximating and maximizing the likelihood for a general state-space model. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Heidelberg: Springer, 2001. 159–175
 - 14 Yano K. A self-organizing state space model and simplex initial distribution search. *Computational Statistics*, 2008, **23**(2): 197–216
 - 15 Deb K. A population-based algorithm-generator for real-parameter optimization. *Soft Computing*, 2005, **9**(4): 236–253
 - 16 Cai Z X, Wang Y. A multiobjective optimization-based evolutionary algorithm for constrained optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, **10**(6): 658–675
 - 17 Peng H, Ozaki T, Haggan-Ozaki V. Modeling and asset allocation for financial markets based on a discrete time microstructure model. *The European Physical Journal B: Condensed Matter*, 2003, **31**(2): 285–293
- 甘敏 博士, 合肥工业大学讲师. 主要研究方向为非线性时间序列建模与分析. E-mail: aganmin@yahoo.com.cn
(GAN Min Ph.D., lecturer at the School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology. His research interest covers nonlinear time series modeling and analysis.)
- 彭辉 博士, 中南大学教授. 主要研究方向为复杂系统建模、控制与优化. 本文通信作者. E-mail: huipeng@mail.csu.edu.cn
(PENG Hui Ph.D., professor at the School of Information Science and Engineering, Central South University. His research interest covers complex systems modeling, control and optimization. Corresponding author of this paper.)
- 黄云志 博士, 合肥工业大学教授. 主要研究方向为传感器技术, 数字信号处理和智能仪表. E-mail: hqyz@hfut.edu.cn
(HUANG Yun-Zhi Ph.D., professor at the School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology. Her research interest covers sensor technology, digital signal processing and intelligent instrument.)
- 董学平 博士, 合肥工业大学副教授. 主要研究方向为分布参数系统, 切换系统和过程控制. E-mail: hfdxp@126.com
(DONG Xue-Ping Ph.D., associate professor at the School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology. His research interest covers distributed parameter systems, switched systems and process control.)