

二进神经网络中汉明球突的判定及其逻辑意义

杨娟¹ 陆阳¹ 俞磊¹ 方欢¹

摘要 在布尔空间中, 汉明球突表达了一类结构清晰的布尔函数, 由于其特殊的几何特性, 存在线性可分与线性不可分两种空间结构. 剖析汉明球突的逻辑意义对二进神经网络的规则提取十分重要, 然而, 从线性可分的汉明球突中提取具有清晰逻辑意义的规则, 以及如何判定非线性可分的汉明球突, 并得到其逻辑意义, 仍然是二进神经网络研究中尚未很好解决的问题. 为此, 本文首先根据汉明球突在汉明图上的几何特性, 采用真节点加权高度排序的方法, 提出对于任意布尔函数是否为汉明球突的判定算法; 然后, 在此基础上利用已知结构的逻辑意义, 将汉明球突分解为若干个已知结构的并集, 从而得到汉明球突的逻辑意义; 最后, 通过实例说明判定任意布尔函数是否为汉明球突的过程, 并相应得到汉明球突的逻辑表达.

关键词 二进神经网络, 汉明球, 汉明球突, 笛卡尔球, 规则提取

引用格式 杨娟, 陆阳, 俞磊, 方欢. 二进神经网络中汉明球突的判定及其逻辑意义. 自动化学报, 2012, 38(9): 1459–1470

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.01459

The Judgment for Hamming Sphere Dimple in Binary Neural Networks and Its Logical Meaning

YANG Juan¹ LU Yang¹ YU Lei¹ FANG Huan¹

Abstract In boolean space, Hamming sphere dimple is able to express a kind of boolean function with clear structure. Hamming sphere dimple contains linearly separable and nonlinearly separable structures because of its special geometric characteristic. It is very important to analyze the logical meaning of Hamming sphere dimple for extracting rules from binary neural networks. However, how to extract the rules with explicit logical meaning of the linearly separable and nonlinearly separable Hamming sphere dimples and how to judge whether a nonlinearly separable boolean function is a Hamming sphere dimple have not yet been settled. To solve these problems, we firstly analyze the features of Hamming sphere dimple with Hamming-graph, and then propose an algorithm for judging whether a boolean function is linearly or nonlinearly separable Hamming sphere dimple by sorting the weighted height of the true nodes. Furthermore, we decompose Hamming sphere dimple into two known structures to obtain the logical meaning of Hamming sphere dimple by using the logical meaning of the known structures. Finally, we explain whether an arbitrary boolean function is a Hamming sphere dimple through examples, and obtain the logical meaning of the corresponding Hamming sphere dimple.

Key words Binary neural networks, Hamming sphere, Hamming sphere dimple, Cartesian sphere, rule extraction

Citation Yang Juan, Lu Yang, Yu Lei, Fang Huan. The judgment for Hamming sphere dimple in binary neural networks and its logical meaning. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(9): 1459–1470

在模式分类问题中, 二进神经网络一般侧重于神经网络表达的高效性和简洁性, 主要体现在减少隐元数目以优化网络结构; 在机器学习和知识发现问题中, 二进神经网络侧重于神经网络内在知识的可表达性, 主要是神经网络的规则提取问题^[1].

从神经网络的结构与权值提取出较为精简的规则目前仍是研究难点^[2–3], 研究方法大致分为两大类^[4]: 基于功能分析的方法和基于结构分析的方法. 基于功能分析方法即是将网络视为一个黑盒, 不考

虑网络结构及其内部连接权, 提取的规则反映了输入数据与输出数据间的关系, 用一组规则代替原来的网络. 近年来, 文献 [5] 提出一种统计的神经网络规则提取方法, 提取出可理解性好、简洁、紧凑、保真度高的符号规则, 但该方法的复杂性高, 在使用过程中需要进行人为干涉, 难以实现规则的自动提取; 文献 [6] 通过引入粗糙集理论及数据挖掘中的相关方法, 以期利用神经网络的泛化能力提取出高精度的规则, 但该方法在提取规则时采用分层穷举的方法, 因而随着网络维数的增大, 算法复杂度呈指数级增长. 基于结构分析方法的主要思想是将网络分解, 直接分析每个节点在网络中所起功能^[7]. 近年来, 文献 [8] 借助允许剪枝的搜索树存储中间结果, 提出 CoOp 算法, 提取出 “if-then” 形式的规则; 文献 [9]

收稿日期 2011-07-14 录用日期 2012-04-09
Manuscript received July 14, 2011; accepted April 9, 2012
本文责任编辑 周杰

Recommended by Associate Editor ZHOU Jie

1. 合肥工业大学计算机与信息学院 合肥 230009

1. School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009

扩展文献 [8], 借助二元判定图 (Binary decision diagram, BDD) 存储中间结果, 提取出更为简洁的规则. “ M -of- N ”形式是“if-then”规则前件的一种特殊形式, 对于提取出前件为“ M -of- N ”形式的规则, 大部分算法都采用预处理、聚类、剪枝、训练网络后再进行规则提取等步骤^[10], 文献 [11] 不采用预处理, 而采用启发式算法剪枝以减少搜索空间, 提取出前件为“ M -of- N ”形式的规则, 减少了提取出的规则数目. 但从上述文献来看, 各种规则提取算法都没有和二进制空间线性可分结构系密切相连, 特别是对于多种线性可分结构系在二进神经网络学习结果中同时存在的情况, 没有建立合理的规则提取方法, 故导致提取出的规则数目较多. 由于任何一个二进神经元都对应于一个线性可分函数, 某些线性可分函数具有相似的逻辑结构和知识内涵, 组成一类线性可分结构系, 因此, 如果能从线性可分结构系中挖掘出其本质的逻辑内涵, 并且对于任意学习算法生成的二进神经元都能判定属于何种线性可分结构系, 则从二进神经网络中提取出逻辑规则将变得较为容易.

目前对于某些线性可分结构系已有与二进神经元等价判别法, 如各类超立方体^[12]、SP 函数^[13]、汉明球^[1]、笛卡尔球^[14]、线性可分的汉明球突^[15], 其中, 各类超立方体、SP 函数、汉明球、笛卡尔球均具有清晰的逻辑意义, 而线性可分的汉明球突其逻辑意义尚不清楚. 本文立足于机器学习和规则提取, 研究了布尔空间中汉明球突的判定及逻辑规则的提取: 首先, 根据汉明球突在结构上的特点, 以及存在线性可分的汉明球突与线性不可分的汉明球突两种类型, 完善了文献 [15] 中仅提出线性可分的汉明球突的判别法, 建立了对于任意布尔函数是否为汉明球突的判定算法; 其次, 利用已有的具有清晰逻辑意义的两类线性可分结构系: 汉明球与笛卡尔球, 将汉明球突分解为其并集, 进而得到汉明球突的逻辑意义, 并指出其表达形式的简洁性; 最后, 通过实例给出了判定汉明球突的过程, 并相应得到其逻辑表达. 通过本文的研究, 给出了线性可分的汉明球突的逻辑意义, 并且得到了一类非线性可分函数的判定方法及逻辑意义, 为二进神经网络的规则提取增加了新的理论基础.

1 相关概念

B_2 表示 $\{0, 1\}$ 二元域, F 是 $B_2^n \rightarrow B_2$ 的任意映射, 称 F 为 n 元布尔函数, B_2^n 构成了 n 维布尔函数样本空间. 对于所有 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n$, 以 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示 F 在 X 处的取值, 简记为 $F(X)$, 称 X 为 B_2^n 中的样本, $F(X)$ 为样本值,

$F(X) \in B_2$.

首先, 对汉明球及汉明球突进行说明.

定义 1. 集合 $F^{-1}(1) = \{X \in B_2^n \mid F(X) = 1\}$, $F^{-1}(0) = \{X \in B_2^n \mid F(X) = 0\}$.

定义 2. 在 B_2^n 中, 对于样本 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$, 如果存在集合 $U(d) = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^{-1}(1) \mid d_H(X^c, X) \leq d\}$, 使得 $U(d) = F^{-1}(1)$, $\overline{U(d)} = F^{-1}(0)$, 其中, d 是位于区间 $[0, n]$ 中的整数, 则 $U(d)$ 称为以 X^c 为中心, 半径为 d 的汉明球, $d_H(X^c, X)$ 为 X^c 与 X 之间的汉明距离.

定义 3. 在 B_2^n 中, 对于样本 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$, 如果存在集合 $U(d) = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^{-1}(1) \mid d_H(X^c, X) \leq d\}$, 及 $K(d+1) = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^{-1}(1) \mid d_H(X^c, X) = d+1\}$, 使得 $U(d) \cup K(d+1) = F^{-1}(1)$, $\overline{U(d) \cup K(d+1)} = F^{-1}(0)$, 其中, d 是位于区间 $[0, n]$ 中的整数, $\text{card}(K(d+1)) = m$, 其中, $\text{card}(K(d+1)) = m$ 表示集合 $K(d+1)$ 中元素个数为 m 个, 则 $M(d, m) = U(d) \cup K(d+1)$ 称为以 X^c 为中心, 半径为 d 的 m 阶汉明球突, $K(d+1)$ 为突点集.

下面介绍汉明图, 后续定理的证明均是建立在汉明图的几何意义上进行证明的.

定义 4. n 维汉明图 $HG = \langle V, E \rangle$ 是表示 n 维汉明几何空间的一个 n 次正则图. 其节点集 V 有 2^n 个节点, 每个节点对应 n 元布尔函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的一个样本 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 即相当于 n 维超立方体的一个顶点. 若 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$, 称 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为真节点; 若 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, 称 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为伪节点. HG 的边集 E 有 2^{n+1} 条边, 每条边邻接两节点间的汉明距离均为 1.

汉明图在核心节点未确定之前是无向图, 确定之后是有向图. 并规定核心节点为第 0 层. 图 1 是 $n = 4$, 核心节点为 $(0, 0, 0, 0)$ 的汉明图. 将图中节点编码与所要求的不同核心节点的二进制作按位相加, 即可得到任意核心节点的有向汉明图.

对于中心为 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$, 半径为 d 的汉明球 $U(d)$, 其对应的汉明图即为核心节点为 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$, 从第 0 层一直到第 d 层节点都为真节点, 其余节点均为伪节点.

对于中心为 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$, 半径为 d 的汉明球突 $M(d, m)$, 其对应的汉明图即为核心节点为 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$, 从第 0 层一直到第 d 层节点都为真节点, 第 $d+1$ 层有 m 个节点为真节点,

其余的节点均为伪节点。

图 2 为中心在 $(0, 0, 0, 0)$, 半径为 2 的汉明球 $U(2)$; 图 3 为中心在 $(0, 0, 0, 0)$, 半径为 1 的汉明球突 $M(1, 3)$, 其中, 黑色节点为真节点, 灰色节点为伪节点。

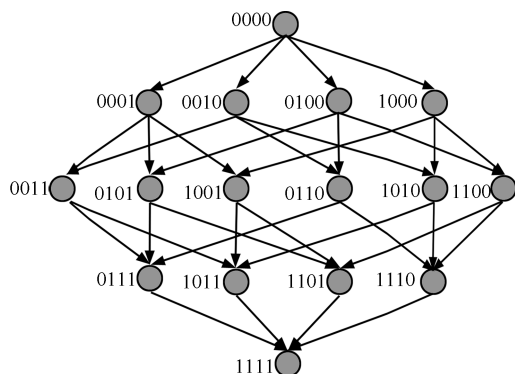


图 1 $n = 4$, 核心节点为 $(0, 0, 0, 0)$ 的汉明图
Fig. 1 The Hamming-graph with the center node $(0, 0, 0, 0)$, $n = 4$

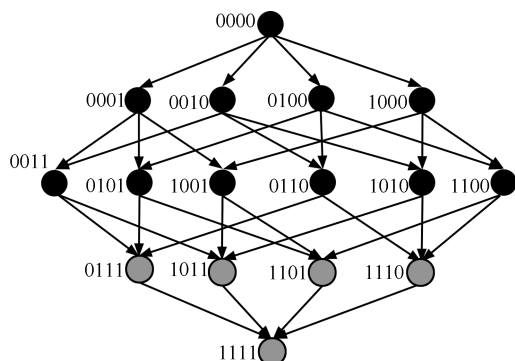


图 2 中心在 $(0, 0, 0, 0)$ 的汉明球 $U(2)$
Fig. 2 Hamming sphere $U(2)$ with the center node $(0, 0, 0, 0)$

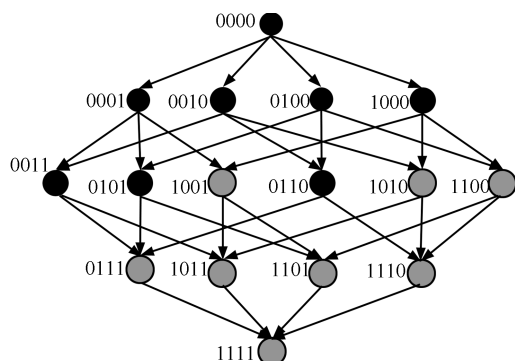


图 3 中心在 $(0, 0, 0, 0)$ 的汉明球突 $M(1, 3)$
Fig. 3 Hamming sphere dimple $M(1, 3)$ with the center node $(0, 0, 0, 0)$

定义 5. 设确定核心节点的 n 维汉明图 $HG = \langle V, E \rangle$ 中有 C_0 个真节点, 取 $C_i = \sum_{m=1}^{C_0} x_i^m$, 取

权系数 $w_i = 2C_i - C_0, i = 1, 2, \dots, n$, 则称 $H(X^k) = \sum_{i=1}^n w_i x_i^k$ 为节点 $X^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ 的加权高度。

2 任意汉明球突的判定

引理 1. 对于确定核心节点的 n 维汉明图 $HG = \langle V, E \rangle$ 中有 C_0 个真节点, 按照定义 5 计算得到权值 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, 在此基础上增加一个真节点 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 若 $x_p = 1$, 则权系数变为 $w_p^{\text{new}} = w_p + 1$; 若 $x_p = 0$, 则权系数变为 $w_p^{\text{new}} = w_p - 1$ 。

证明. 对于未增加节点的汉明图 $HG = \langle V, E \rangle$, 按照定义 5, 权系数 $w_p = 2C_p - C_0, C_p = \sum_{m=1}^{C_0} x_p^m$, 当增加真节点 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 时, 若 $x_p = 1$, 则:

$$C_p^{\text{new}} = \sum_{m=1}^{C_0+1} x_p^m = \sum_{m=1}^{C_0} x_p^m + x_p = \sum_{m=1}^{C_0} x_p^m + 1 = C_p + 1$$

又由于 $C_0^{\text{new}} = C_0 + 1$, 则:

$$w_p^{\text{new}} = 2C_p^{\text{new}} - C_0^{\text{new}} = 2(C_p + 1) - (C_0 + 1) = 2C_p - C_0 + 1 = w_p + 1$$

同理, 若 $x_p = 0$, 则:

$$C_p^{\text{new}} = \sum_{m=1}^{C_0+1} x_p^m = \sum_{m=1}^{C_0} x_p^m + x_p = \sum_{m=1}^{C_0} x_p^m + 0 = C_p + 0 = C_p$$

又由于 $C_0^{\text{new}} = C_0 + 1$, 则:

$$w_p^{\text{new}} = 2C_p^{\text{new}} - C_0^{\text{new}} = 2C_p - (C_0 + 1) = 2C_p - C_0 - 1 = w_p - 1$$

□

定理 1. 对于汉明球突 $M(d, k)$, 若其中心节点 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ 中 $x_p^c = 1$, 则由定义 5 计算得权系数 $w_p \geq 0$; 若其中心节点 X^c 中 $x_p^c = 0$, 则权系数 $w_p \leq 0$ 。

证明. 对于汉明球突 $M(d, k)$, 设其中心节点为 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ 。

情况 1. 若 $x_p^c = 1$ 。

当仅一个节点时, 由定义 5 计算得 $w_p = 1$ 。

当 $d = 0$ 时, 逐渐增加第一层节点 $X^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$, 若 $x_p^1 = 0$, 由引理 1 可得 $w_p^{\text{new}} = w_p - 1 = 1 - 1 = 0$; 若 $x_p^1 = 1$, 由引理 1 可得

$w_p^{new} = w_p + 1 = 1 + 1 = 2$. 从引理 1 可以推出, 增加第 p 位为 0 的节点, 使得权系数 w_p 减少 1, 增加第 p 位为 1 的节点, 使得权系数 w_p 增加 1, 而第一层最多只能增加一个第 p 位为 0 的节点, 故 $w_p \geq 0$. 当 $d = 1$ 时, 即第一层所有节点都为真节点, 对于汉明球 $U(1)$, 计算得 $w_p = n - 1$, 当逐渐增加第二层节点 $X^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$ 时, 若 $x_p^2 = 0$, 则由引理 1 可得 $w_p^{new} = w_p - 1 = (n - 1) - 1 > 0$; 若 $x_p^2 = 1$, 则由引理 1 可得 $w_p^{new} = w_p + 1 = (n - 1) + 1 > 0$. 而对于第二层最多可以增加 C_{n-1}^1 个第 p 位为 0 的节点, 故权系数最小为 $w_p^{new} = w_p - (n - 1) = (n - 1) - (n - 1) = 0$, 故 $w_p \geq 0$.

对于 $2 \leq d \leq n$ 时, $M(d, k)$ 中前 d 层中所有节点均为真节点, 则对于汉明球 $U(d)$ 中, 由定义 5 计算权系数, 根据汉明图的结构, 可得:

$$\begin{aligned} C_p &= 1 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^d \\ C_0 &= 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^d \\ w_p &= 2C_p - C_0 = \\ &= 2(1 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^d) - \\ &= (1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^d) = \\ &= 1 + 2(C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^d) - \\ &= (C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^d) \end{aligned} \quad (1)$$

由组合数的性质, 对于任意的 $n, k, 0 \leq k \leq n$, 有 $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, 则式 (1) 可化简为

$$\begin{aligned} w_p &= 2C_p - C_0 = \\ &= 1 + 2(C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^d) - \\ &= (C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^d) = \\ &= 1 + 2(C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^d) - \\ &= (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0 + C_{n-1}^2 + \\ &= C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^d + C_{n-1}^{d-1}) = \\ &= 1 + 2(C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^d) - \\ &= (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^d + \\ &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{d-1}) = \\ &= 1 + (C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^d) - \\ &= (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{d-1}) = C_{n-1}^d \end{aligned}$$

而对于第 $d + 1$ 层最多可以增加 C_{n-1}^d 个第 p 位为 0 的节点, 故权系数最小为 $w_p^{new} = w_p - C_{n-1}^d = C_{n-1}^d - C_{n-1}^d = 0$, 故 $w_p \geq 0$.

故对于任意 d , 若其中心节点 X^c 的第 p 位为 1 时, 则权系数 $w_p \geq 0$.

情况 2. 若 $x_p^c = 0$.

当仅一个节点时, 由定义 5 计算得 $w_p = -1$.

当 $d = 0$ 时, 逐渐增加第一层节点 $X^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$, 若 $x_p^1 = 0$, 由引理 1 可得 $w_p^{new} = w_p - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$; 若 $x_p^1 = 1$, 由引理 1 可得 $w_p^{new} = w_p + 1 = -1 + 1 = 0$. 从引理 1 可以推出, 增加第 p 位为 0 的节点, 使得权系数 w_p 减少 1, 增加第 p 位为 1 的节点, 使得权系数 w_p 增加 1, 而第一层最多只能增加一个第 p 位为 1 的节点, 故 $w_p \leq 0$.

当 $d = 1$ 时, 即第一层所有节点都为真节点, 对于汉明球 $U(1)$, 计算得 $w_p = -(n - 1)$, 当逐渐增加第二层节点 $X^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$ 时, 若 $x_p^2 = 0$, 则由引理 1 可得 $w_p^{new} = w_p - 1 = -(n - 1) - 1 < 0$; 若 $x_p^2 = 1$, 则由引理 1 可得 $w_p^{new} = w_p + 1 = -(n - 1) + 1 = -n + 2 < 0$. 而对于第二层最多可以增加 C_{n-1}^1 个第 p 位为 1 的节点, 故权系数最大为 $w_p^{new} = w_p + (n - 1) = -(n - 1) + (n - 1) = 0$, 故 $w_p \leq 0$.

同理可证 $2 \leq d \leq n$ 时, $w_p \leq 0$.

综合情况 1 和情况 2, 该定理得证. \square

由定理 1 的证明过程可得推论 1.

推论 1. 对于汉明球突 $M(d, k)$, 当且仅当第 $d + 1$ 层有 C_{n-1}^d 个突点, 且突点的第 p 位与其中心节点 X^c 的第 p 位不同时, 权系数 $w_p = 0$.

定理 2. 对于汉明球突 $M(d, k)$, 则由定义 5 计算权值, $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, 至多只能有一个权系数 w_i 为 0, $i = 1, 2, \dots, n$.

证明(反证法).

假设权值 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 中有两个权系数为 0, 设为 $w_p = w_q = 0$, 并设汉明球突 $M(d, k)$ 的中心节点为 X^c .

由于 $w_p = 0$, 则由推论 1 可知, 第 $d + 1$ 层中只能有 C_{n-1}^d 个节点, 且其第 p 位与中心节点 X^c 的第 p 位不同; 又由于 $w_q = 0$, 并且由于第 $d + 1$ 层只有 C_{n-1}^d 个节点, 则该 C_{n-1}^d 个节点的第 q 位与 X^c 的第 q 位不同, 故第 $d + 1$ 层的 C_{n-1}^d 个节点满足以下两个条件:

- 1) $X^{d+1} = (\dots, \overline{x_p^c}, \dots, \overline{x_q^c}, \dots)$;
- 2) $d_H(X^{d+1}, X^c) = d + 1$;

但满足上述要求的节点共有 C_{n-2}^{d-1} 节点, 又由于 $C_{n-1}^d = C_{n-2}^d + C_{n-2}^{d-1}$, 且 $C_{n-2}^d > 0$, 故 $C_{n-2}^{d-1} < C_{n-1}^d$, 与第 $d + 1$ 层只有 C_{n-1}^d 个节点矛盾, 故至多只能有一个权系数为 0. \square

定理 3. 对于汉明球突 $M(d, k)$, 则加权高度最大的节点一定位于中心节点.

证明. 对于汉明球突 $M(d, k)$, 设其中心节点为 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$, 由定义 5 计算得权值

为 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, 对于任意的非中心节点 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$H(X^c) - H(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i^c - \sum_{i=1}^n w_i x_i = \sum_{i=1}^n w_i (x_i^c - x_i) \quad (2)$$

- 1) 若 $x_i^c = x_i = 1$, 则 $w_i (x_i^c - x_i) = 0$;
- 2) 若 $x_i^c = 1, x_i = 0$, 则 $w_i (x_i^c - x_i) = w_i$, 又由定理 1, 当 $x_i^c = 1$ 时, $w_i \geq 0$, 故 $w_i (x_i^c - x_i) = |w_i|$;
- 3) 若 $x_i^c = 0, x_i = 1$, 则 $w_i (x_i^c - x_i) = -w_i$, 又由定理 1, 当 $x_i^c = 0$ 时, $w_i \leq 0$, 故 $w_i (x_i^c - x_i) = |w_i|$;
- 4) 若 $x_i^c = x_i = 0$, 则 $w_i (x_i^c - x_i) = 0$.

综合上述 4 种情况, 设 $d_H(X^c, X) = s, 1 \leq s \leq n$, 设 X 与 X^c 不同码元的角标集合为 $J = \{j_1, j_2, \dots, j_s\}$, 则式 (2) 为

$$H(X^c) - H(X) = \sum_{i \in J} |w_i| \geq \min \{|w_1|, |w_2|, \dots, |w_n|\}$$

由定理 2, 权值 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 中至多有一个权系数为 0, 故若 $d_H(X^c, X) = s, 2 \leq s \leq n$ 时, $H(X^c) - H(X) > 0$; 若 $d_H(X^c, X) = 1$, 在集合 $S = \{X | d_H(X^c, X) = 1\}$ 中至多有 1 个 $X' \in S$, 使得 $H(X^c) - H(X') = 0$.

而对于汉明球突 $M(d, k)$, 若 $H(X^c) = H(X')$, 则从汉明图的几何结构上 X^c 与第一层节点 X' 都可作为中心节点, 故汉明球突中加权高度最大的节点一定位于中心节点。□

对于任意 n 维布尔函数, 其中, 有 m 个为真节点, 其余 $2^n - m$ 个为伪节点, 由于汉明球突中其加权高度最大的节点即为中心节点, 故可建立是否为汉明球突的判别算法。

具体算法步骤如下:

- 1) 若 $m \in (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^d, C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^d + C_n^{d+1})$, 则其空间逻辑结构可能为汉明球突 $M(d, k)$, 其中, $k = m - (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^d)$;
- 2) 计算 m 个真样本的加权高度 $H(X)$;
- 3) 将真样本的加权高度 $H(X)$ 排序, 最大的 $H(X)$ 所对应的节点 X^c 即为中心节点;
- 4) $s = 0$;
- 5) 若集合 $\{X | d_H(X, X^c) = s\}$ 中的所有节点都为真节点, 则进行步骤 6), 否则进行步骤 7);
- 6) $s = s + 1$, 若 $s \leq d$, 则转回步骤 5), 否则进行步骤 8);
- 7) 则该布尔函数逻辑上不是汉明球突, 结束判

别;

8) 若集合 $\{X | d_H(X, X^c) = s\}$ 中恰好有 $k = m - (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^d)$ 个节点为真节点, 则该布尔函数在逻辑上是汉明球突 $M(d, k)$, 否则不是汉明球突, 结束判别。

对于任意布尔函数, 文献 [16] 可以判别是否为线性可分函数. 若是线性可分函数, 采用文献 [15] 中判别法即可以判别是否为线性可分的汉明球突, 若是非线性可分函数, 目前无法判别其结构; 但通过上述算法, 对于任意布尔函数, 根据汉明球突在几何上的特点, 不论该函数是否线性可分, 上述算法均可以判定其结构是否为汉明球突, 为进一步提取布尔函数的逻辑意义作为基础。

3 汉明球突的逻辑意义

在二进神经网络中, 二进神经元的知识内涵和其对应的空间结构有很强的内在关系, 这种知识内涵往往通过空间结构的逻辑意义予以表达, 因此, 研究二进神经网络中各类空间结构的逻辑意义具有重要的意义. 汉明球突是二进神经网络中一类重要的空间结构, 接下来介绍如何从汉明球突中提取其逻辑意义。

定义 6. 对于中心节点为 X^c 的汉明球突 $M(0, k)$, 其突点为与 X^c 之间汉明距离为 1 的 k 个样本, 称此时的汉明球突 $M(0, k)$ 为笛卡尔球, 记为 $C(X^c, k)$ 。

文献 [15] 指出对于任意的汉明球突 $M(d, k)$ 随着其半径、突点个数及位置的不同, 有些是线性可分的, 有些是线性不可分的; 但对于 $d = 0$ 时的汉明球突 $M(0, k)$ 即笛卡尔球, 文献 [16] 证明其是线性可分的, 文献 [14] 又给出该结构的逻辑意义。

引理 2^[14]. 设笛卡尔球 $C(X^c, k)$ 的中心节点为 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$, 其 k 个突点与 X^c 分别在集合 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ 位码元相异, 则该笛卡尔球 $C(X^c, k)$ 的逻辑意义可表达为 $\left(\bigwedge_{i=1, i \notin S}^n x_i^c\right) \wedge U$, 其中, U 为 B_2^k 中 $d = 1$ 的汉明球, \wedge 为逻辑与。

从汉明球突的定义可知, 半径为 0 的汉明球突即为笛卡尔球, 即笛卡尔球为汉明球突的一个特例, 故由引理 2 可以得到汉明球突 $M(0, k)$ 逻辑意义; 而对于半径大于 0 的汉明球突, 从其在汉明图上的结构特点发现, 汉明球突可以分解为一个汉明球与若干个笛卡尔球间并集, 借助汉明球与笛卡尔球的逻辑意义, 即得定理 4。

定理 4. 对于中心节点为 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ 的汉明球突 $M(d, k)$, 设其 k 个突点为 X^1, X^2, \dots, X^k , 若 X^1, X^2, \dots, X^{l_1} 的父节点为

$L_1, X^{l_1+1}, X^{l_1+2}, \dots, X^{l_2}$ 的父节点为 $L_2, \dots, X^{l_{s-1}+1}, X^{l_{s-1}+2}, \dots, X^k$ 的父节点为 L_s , 则汉明球突可表达为

$$M(d, k) = U(d) \vee C(L_1, l_1) \vee C(L_2, l_2 - l_1) \vee \dots \vee C(L_s, k - l_{s-1})$$

其中, $C(L_1, l_1)$ 是突点为 X^1, X^2, \dots, X^{l_1} 的笛卡尔球, $C(L_2, l_2 - l_1)$ 是突点为 $X^{l_1+1}, X^{l_1+2}, \dots, X^{l_2}$ 的笛卡尔球, $\dots, C(L_s, k - l_{s-1})$ 是突点为 $X^{l_{s-1}+1}, X^{l_{s-1}+2}, \dots, X^k$ 的笛卡尔球, \vee 为逻辑或。

证明. 对于中心节点为 $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ 的汉明球突 $M(d, k)$, k 个突点为 X^1, X^2, \dots, X^k , 由汉明球突的定义可知:

$$M(d, k) = U(d) \vee X^1 \vee X^2 \vee \dots \vee X^k$$

又由于:

$$\begin{aligned} & C(L_1, l_1) \vee C(L_2, l_2 - l_1) \vee \dots \vee \\ & C(L_s, k - l_{s-1}) = \\ & (L_1 \vee X^1 \vee X^2 \vee \dots \vee X^{l_1}) \vee \\ & (L_2 \vee X^{l_1+1} \vee X^{l_1+2} \vee \dots \vee X^{l_2}) \vee \dots \vee \\ & (L_s \vee X^{l_{s-1}+1} \vee X^{l_{s-1}+2} \vee \dots \vee X^k) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & U(d) \vee C(L_1, l_1) \vee C(L_2, l_2 - l_1) \vee \dots \vee \\ & C(L_s, k - l_{s-1}) = \\ & U(d) \vee (L_1 \vee X^1 \vee X^2 \vee \dots \vee X^{l_1}) \vee \\ & (L_2 \vee X^{l_1+1} \vee X^{l_1+2} \vee \dots \vee X^{l_2}) \vee \dots \vee \\ & (L_s \vee X^{l_{s-1}+1} \vee X^{l_{s-1}+2} \vee \dots \vee X^k) = \\ & U(d) \vee (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_s) \vee \\ & (X^1 \vee X^2 \vee \dots \vee X^{l_1} \vee X^{l_1+1} \vee X^{l_1+2} \vee \dots \vee \\ & X^{l_2} \vee \dots \vee X^{l_{s-1}+1} \vee X^{l_{s-1}+2} \vee \dots \vee X^k) = \\ & U(d) \vee (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_s) \vee \\ & (X^1 \vee X^2 \vee \dots \vee X^k) \end{aligned}$$

又由于 $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_s \in U(d)$, 故:

$$\begin{aligned} & U(d) \vee C(L_1, l_1) \vee C(L_2, l_2 - l_1) \vee \dots \vee \\ & C(L_s, k - l_{s-1}) = \\ & U(d) \vee (X^1 \vee X^2 \vee \dots \vee X^k) = M(d, k) \end{aligned}$$

故得证. \square

由定理 4 及引理 2, 即可得到任意汉明球突的逻辑意义, 对于任意给定的样本集合, 可以按照图 4 流程进行判断, 如果空间结构为汉明球突, 可以得到其逻辑表达。

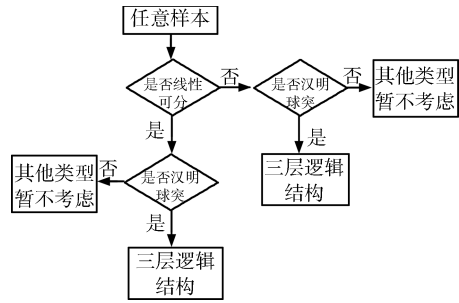


图 4 任意样本是否为汉明球突的逻辑结构判定流程图

Fig. 4 The flow chart of judging Hamming sphere dimple

下面对定理 4 中分解的笛卡尔球的数目进行说明。

定义 7. 对于确定核心节点的 n 维汉明图 $HG = \langle V, E \rangle$, 第 d 层的全部节点可由第 $d - 1$ 层节点作为父节点生成, 其所需第 $d - 1$ 层节点的最少数目记为 $F(d - 1)$ 。

定义 8. 对于确定核心节点的 n 维汉明图 $HG = \langle V, E \rangle$, 若第 $d - 1$ 层中 $F(d - 1)$ 个节点即可生成第 d 层的所有节点, 则称该第 $d - 1$ 层的 $F(d - 1)$ 个节点与第 d 层的 C_n^d 个节点构成汉明图的第 $(d - 1) \sim d$ 层的精简子结构, 记为 $(F(d - 1), C_n^d)$ 。

定义 9. 对于确定核心节点的 n 维汉明图 $HG = \langle V, E \rangle$, 其第 $(d - 1) \sim d$ 层的精简子结构为 $(F(d - 1), C_n^d)$, 设该 $F(d - 1)$ 个节点为 $X^1, X^2, \dots, X^{F(d-1)}$, 第 d 层的所有节点由 $X^1, X^2, \dots, X^{F(d-1)}$ 生成, 即 X^1 生成 $X^{11}, X^{12}, \dots, X^{1S_1}$; X^2 生成与 X^1 所生成的子节点不同的其他子节点 $X^{21}, X^{22}, \dots, X^{2S_2}$; 以此类推, $X^{2F(d-1)}$ 生成与 $X^1, X^2, \dots, X^{F(d-1)-1}$ 所生成的子节点所不同的其他子节点 $X^{F(d-1)1}, X^{F(d-1)2}, \dots, X^{F(d-1)S_{F(d-1)}}$. 其中 $\sum_{i=1}^{F(d-1)} S_i = C_n^d$, 称 $T^i = (X^i : X^{i1}, X^{i2}, \dots, X^{iS_i})$ ($i = 1, 2, \dots, F(d - 1)$) 为精简子结构 $(F(d - 1), C_n^d)$ 的子树。

定义 10. 对于确定核心节点的 n 维汉明图 $HG = \langle V, E \rangle$, 其第 $(d - 1) \sim d$ 层的精简子结构为 $(F(d - 1), C_n^d)$, 称第 $d - 1$ 层 $F(d - 1)$ 个节点 $X^1, X^2, \dots, X^{F(d-1)}$ 之外的节点为冗余节点。

图 5 为第 1 ~ 2 层的精简子结构 $(F(1), C_n^2)$ 示意图, 如图 5 所示第 1 层的 5 个节点 $(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ 即可生成第 2 层的所有 $C_6^2 = 15$ 个节点, 节点 $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ 为冗余节点, $(F(1), C_n^2)$ 的子树即为

$$T^1 = ((1, 0, 0, 0, 0, 0) : (1, 1, 0, 0, 0, 0),$$

$(1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1, 0),$
 $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$

$T^2 = ((0, 1, 0, 0, 0, 0) : (0, 1, 1, 0, 0, 0),$
 $(0, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 1))$

$T^3 = ((0, 0, 1, 0, 0, 0) : (0, 0, 1, 1, 0, 0),$
 $(0, 0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 1))$

$T^4 = ((0, 0, 0, 1, 0, 0) : (0, 0, 0, 1, 1, 0),$
 $(0, 0, 0, 1, 0, 1))$

$T^5 = ((0, 0, 0, 0, 1, 0) : (0, 0, 0, 0, 1, 1))$

定理 5. 对于确定核心节点的 n 维汉明图 $HG = \langle V, E \rangle$, 其第 $(d-1) \sim d$ 层的精简子结构为 $(F(d-1), C_n^d)$, 由其每个子树 $T^i = (X^i : X^{i1}, X^{i2}, \dots, X^{iS_i})$ ($i = 1, 2, \dots, F(d-1)$) 再生成精简结构, 则每棵子树的叶子节点 $X^{i1}, X^{i2}, \dots, X^{iS_i}$ ($i = 1, 2, \dots, F(d-1)$) 中有一个节点为冗余节点.

证明. 对于子树 $T^i = (X^i : X^{i1}, X^{i2}, \dots, X^{iS_i})$, 设 X^{i1} 与 X^i 不同码元位为 m_1 , X^{i2} 与 X^i 不同码元位为 m_2, \dots, X^{iS_i} 与 X^i 不同码元为 m_{S_i} . 由 T^i 的叶子节点生成精简结构, 根据定义 9 可得:

X^{i1} 生成的所有不重复的子节点与 X^{i1} 不同码元位分别为 m_2, m_3, \dots, m_{S_i} ;

X^{i2} 生成的所有不重复的子节点与 X^{i2} 不同码元位分别为 m_3, \dots, m_{S_i} ;

⋮

$X^{i(S_i-1)}$ 生成的所有不重复的子节点与 $X^{i(S_i-1)}$ 不同码元位为 m_{S_i} ;

由此可得 X^{iS_i} 没有与上述不重复的子节点, 故 X^{iS_i} 为冗余节点, 不失一般性, 每个子树的叶子节点 $X^{i1}, X^{i2}, \dots, X^{iS_i}$ 中有一个节点为冗余节点. □

定理 6. 对于确定核心节点的 n 维汉明图 $HG = \langle V, E \rangle$, 其第 $d \sim (d+1)$ 层的精简子结构为 $(F(d), C_n^{d+1})$, 则 $F(d) = C_n^d - F(d-1)$, 其中 $F(0) = 1$.

证明. 第 d 层有 C_n^d 个节点, 在第 $(d-1) \sim d$ 层的精简子结构 $(F(d-1), C_n^d)$ 中, 由定义 9 可知有 $F(d-1)$ 棵子树, 即为 $T^1 = (X^1 : X^{11}, X^{12}, \dots, X^{1S_1}), T^2 = (X^2 : X^{21}, X^{22}, \dots, X^{2S_2}), \dots, T^{F(d-1)} = (X^{F(d-1)} : X^{F(d-1)1}, X^{F(d-1)2}, \dots, X^{F(d-1)S_{F(d-1)}})$, 则 C_n^d 个节点分为 $F(d-1)$ 组, 对于每组, 再生成精简结构, 即得到第 $d \sim (d+1)$ 层的精简子结构 $(F(d), C_n^{d+1})$, 由定理 5 可知, 每组中 $X^{i1}, X^{i2}, \dots, X^{iS_i}$ 均有一个节点为冗余节点, 故 $F(d) = C_n^d - F(d-1)$. 另外, 对于第 0 层只有一个节点, 生成了第 1 层, 故 $F(0) = 1$. □

由定理 6 可知, 第 d 层所需最少节点数目在最坏的情况下通过递推公式可以计算出来, 故对于任意的汉明球突 $M(d, k)$, 在最坏的情况下, 其逻辑表达为 $M(d, k) = U(d) \vee C(L_1, l_1) \vee C(L_2, l_2 - l_1) \vee \dots \vee C(L_{F(d)}, k - l_{F(d)-1})$, 其中, $C(L_i, l_i - l_{i-1}), (l_0 = 0, l_{F(d)} = k, i = 1, 2, \dots, F(d))$ 为中心在 L_i , 含有 $l_i - l_{i-1}$ 个突点的笛卡尔球, 即笛卡尔球的数目在最坏的情况下为 $F(d)$ 个.

由于 $F(d) = C_n^d - F(d-1) < C_n^d$, 并且根据布尔函数的互补性, 只需考虑 $d \leq [n/2]$ 的汉明球突, 故 $F(d) < C_n^d < C_n^{d+1}$, 因而对于突点为 X^1, X^2, \dots, X^k 的汉明球突 $M(d, k)$, 定理 4 提出的逻辑表达比定义表达式即 $M(d, k) = U(d) \vee X^1 \vee X^2 \vee \dots \vee X^k$ 简洁有效.

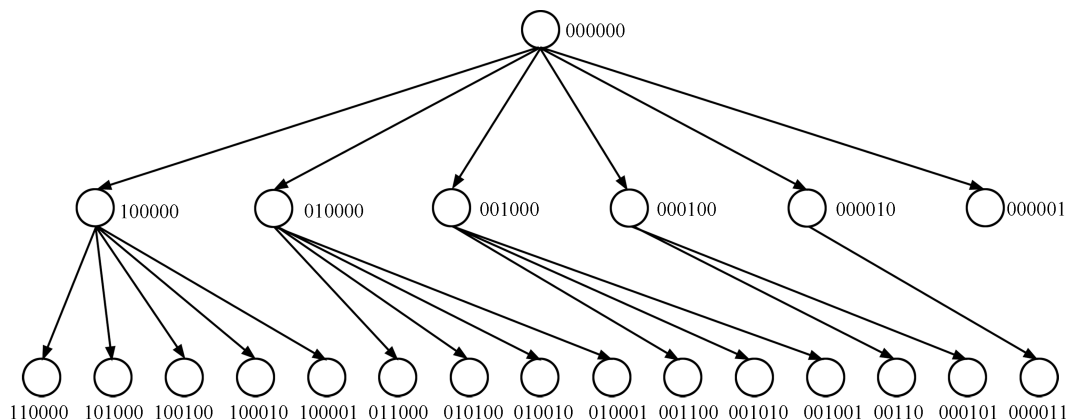


图 5 $n = 6$ 时, 第 1 ~ 2 层精简子结构及其子树示意图

Fig. 5 The schematic diagram of 1 ~ 2 simplified substructure and its subtrees, $n = 6$

4 举例分析

对于前文讨论的判别方法及逻辑意义的提取, 例 1 和例 2 分别用线性可分的汉明球突及线性不可分的汉明球突分析说明; 例 3 和例 4 进一步说明借助汉明球突的逻辑意义, 从网络中提取网络规则.

例 1. B_2^6 中, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, 输入样本集合 $D_1 = \{5, 9, 12, 13, 15, 17, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 45, 47, 52, 53, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 63\}$, 在 6 维布尔空间中, D_1 集合中元素的样本值为“1”, 其余样本的样本值为“0”, 对应的卡诺图如图 6.

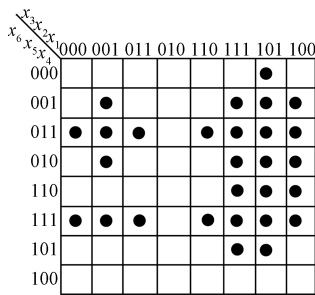


图 6 D_1 卡诺图

Fig. 6 Karnaugh map of D_1

利用几何学习算法^[16], 可以判定该函数为线性可分函数, 并得到权值 $W = \{10, -8, 12, 12, 14, -4\}$, 阈值 $\theta = 21$.

由于该函数是线性可分函数, 利用文献 [15] 的方法, 可判定其逻辑结构为汉明球突, 即线性可分的汉明球突, 中心为 $(1, 0, 1, 1, 1, 0)$, 半径为 2, 突点有 6 个, 分别为 $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 1, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0, 1, 1)$. 由定理 4, 可得其逻辑关系可表示为

$$F = U(2) \vee C((1, 1, 1, 1, 1, 1), 4) \vee C((1, 0, 0, 1, 1, 1), 1) \vee C((0, 0, 1, 1, 1, 1), 1)$$

其中, $U(2)$ 为中心为 $(1, 0, 1, 1, 1, 0)$, 半径为 2 的汉明球; $C((1, 1, 1, 1, 1, 1), 4)$ 为中心为 $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, 含有 4 个突点的笛卡尔球; $C((1, 0, 0, 1, 1, 1), 1)$ 为中心为 $(1, 0, 0, 1, 1, 1)$, 含有 1 个突点的笛卡尔球; $C((0, 0, 1, 1, 1, 1), 1)$ 为中心为 $(0, 0, 1, 1, 1, 1)$, 含有 1 个突点的笛卡尔球. 该逻辑表达中只需用 3 个笛卡尔球就可表达, $3 < F(2) = 10$, 不属于最坏的情况.

例 2. B_2^6 中, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, 输入样本集合 $D_2 = \{1, 4, 5, 7, 9, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 37, 41, 44, 45, 47,$

$53, 57, 60, 61, 63\}$, 在 6 维布尔空间中, D_2 集合中元素的样本值为“1”, 其余样本的样本值为“0”, 对应的卡诺图如图 7.

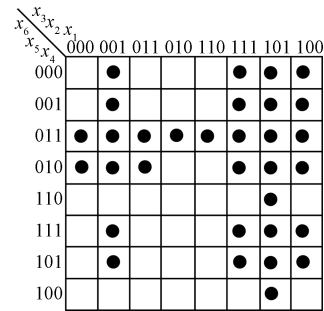


图 7 D_2 卡诺图

Fig. 7 Karnaugh map of D_2

利用几何学习算法^[16], 可以判定该函数为线性不可分函数. 再利用本文提出的算法:

1) 共有 $m = 32$ 个真节点, 故 $m \in (C_6^0 + C_6^1 + C_6^2, C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3)$, 则可能为 $M(2, 10)$;

2) 计算 32 个样本的加权高度, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, 根据定义 5 计算 $C_0 = 32$, $C_1 = 22$, $C_2 = 10$, $C_3 = 21$, $C_4 = 20$, $C_5 = 19$, $C_6 = 10$, 进而 $w_1 = 12$, $w_2 = -12$, $w_3 = 10$, $w_4 = 8$, $w_5 = 6$, $w_6 = -12$, 计算加权高度如表 1.

表 1 D_2 元素加权高度比较表

Table 1 The weighted height of elements in D_2

X	$H(X)$	X	$H(X)$
000110	14	111111	12
000010	6	111101	6
100000	12	101000	22
100100	20	101100	30
100110	26	101110	36
100010	18	101010	28
100111	14	101011	16
100101	8	101111	24
110110	14	101101	18
110010	6	101001	10
010110	2	001000	10
011110	12	001100	18
111000	10	001110	24
111100	18	001010	16
111110	24	001111	12
111010	16	001101	6

由此可得加权高度最大的节点为 $(1, 0, 1, 1, 1, 0)$, 即 $X^c = (1, 0, 1, 1, 1, 0)$;

3) 集合 $\{X | d_H(X, X^c) = 1\}$ 与 $\{X | d_H(X, X^c) = 2\}$ 中所有节点都为真节点;

4) 集合 $\{X | d_H(X, X^c) = 3\}$ 中恰好有 $k = m - (C_6^0 + C_6^1 + C_6^2) = 10$ 个, 故该函数为线性

不可分的汉明球突 $M(2, 10)$, 即中心为 $X^c = (1, 0, 1, 1, 1, 0)$, 半径为 2, 突点个数为 10, 分别为 $(0, 1, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 0, 0, 1)$. 该 10 个突点找不到共同的父节点, 故属于最坏的情况, 需要 $F(2) = 10$ 个笛卡尔球可表达, 该逻辑关系为

$$F = U(2) \vee C((0, 1, 1, 1, 1, 0), 1) \vee C((0, 0, 0, 1, 1, 0), 1) \vee C((0, 0, 1, 0, 1, 0), 1) \vee C((0, 0, 1, 1, 0, 0), 1) \vee C((1, 1, 0, 1, 1, 0), 1) \vee C((1, 1, 1, 0, 1, 0), 1) \vee C((1, 1, 1, 1, 0, 0), 1) \vee C((1, 0, 0, 0, 1, 0), 1) \vee C((1, 0, 0, 1, 0, 0), 1) \vee C((1, 0, 1, 0, 0, 0), 1)$$

其中, $U(2)$ 是中心为 $(1, 0, 1, 1, 1, 0)$, 半径为 2 的汉明球,

$$C((0, 1, 1, 1, 1, 0), 1), C((0, 0, 0, 1, 1, 0), 1), C((0, 0, 1, 0, 1, 0), 1), C((0, 0, 1, 1, 0, 0), 1), C((1, 1, 0, 1, 1, 0), 1), C((1, 1, 1, 0, 1, 0), 1), C((1, 1, 1, 1, 0, 0), 1), C((1, 0, 0, 0, 1, 0), 1), C((1, 0, 0, 1, 0, 0), 1), C((1, 0, 1, 0, 0, 0), 1)$$

均为只有一个突点的笛卡尔球.

例 3. 文献 [17] 中 7 bit 二进制函数, 集合 $D_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 16, 17, 21, 32, 33, 34, 36, 40, 48, 64, 65, 66, 68, 69, 72, 80, 81, 84, 85, 87, 93, 96, 100, 101, 102, 108, 116, 117\}$ 中的 36 个元素的样本值为“1”, 其余样本的样本值为“0”.

针对该问题, 文献 [18] 采用汉明图学习算法, 在隐层使用 3 个神经元, 第一个神经元 N_1 可以将样本 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 16, 17, 32, 33, 34, 36, 40, 48, 64, 65, 66, 68, 72, 80, 96\}$ 分离出来, 第二个神经元 N_2 可以将样本 $B =$

$\{21, 69, 81, 84, 85, 87, 93, 116, 117\}$ 分离出来, 第三个神经元 N_3 可以将样本 $C = \{100, 101, 102, 108\}$ 分离出来, 虽然其可以使用较为简洁的网络结构实现该布尔函数, 但并没有挖掘出每个神经元的逻辑意义, 更不能得到该函数的逻辑表达.

采用本文提出的算法, 可以判别样本集 A 为汉明球突 $M(1, 15)$, 由定理 4 可得到其逻辑关系为

$$F_A = U(1) \vee C((0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), 6) \vee C((0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), 4) \vee C((1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), 5)$$

其中, $U(1)$ 为中心在 $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, 半径为 1 的汉明球, $C((0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), 6)$, $C((0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), 4)$ 与 $C((1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), 5)$ 分别为笛卡尔球, 如图 8 所示 (实心节点样本值为“1”).

样本集 B 为中心在 $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$, 半径为 1 的汉明球突 $M(1, 1)$, 由定理 4 可得其逻辑关系为

$$F_B = U(1) \vee C((1, 0, 1, 0, 1, 0, 0), 1)$$

其中, $U(1)$ 为中心在 $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$, 半径为 1 的汉明球, $C((1, 0, 1, 0, 1, 0, 0), 1)$ 为笛卡尔球, 如图 9 所示 (实心节点样本值为“1”).

样本集 C 为中心在 $(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$, 半径为 0 的汉明球突 $M(0, 3)$, 即笛卡尔球, 故其逻辑关系为

$$F_C = C((1, 1, 0, 0, 1, 0, 0), 3)$$

如图 10 所示 (实心节点样本值为“1”, 虚线节点样本值仍为“1”, 但在神经元 N_1, N_2 中已经将此类节点实现出来, 故此处不需重复).

故综合上述三个神经元 N_1, N_2 和 N_3 , 则对于 7 bit 二进制函数 $F^{-1}(1) = D_3$, 可将其表示为

$$F = M(1, 15) \vee M(1, 1) \vee M(0, 3) = F_A \vee F_B \vee F_C$$

故得到了该布尔函数的逻辑表达.

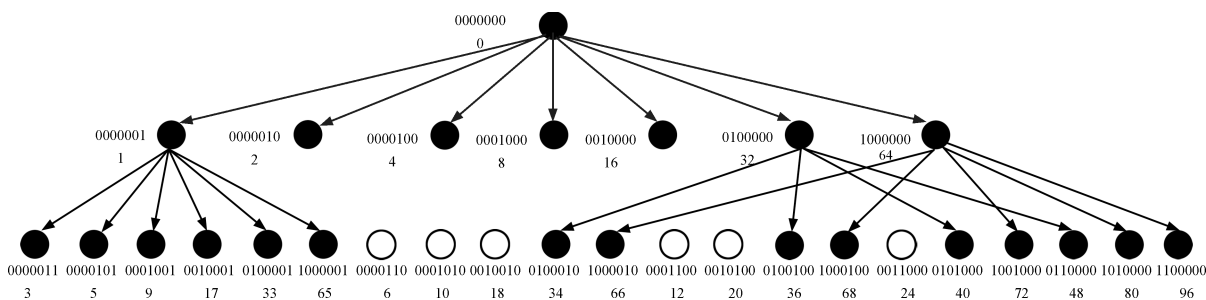


图 8 神经元 N_1 所示的汉明球突 $M(1, 15)$
Fig. 8 Neuron N_1 expressing Hamming sphere dimple $M(1, 15)$

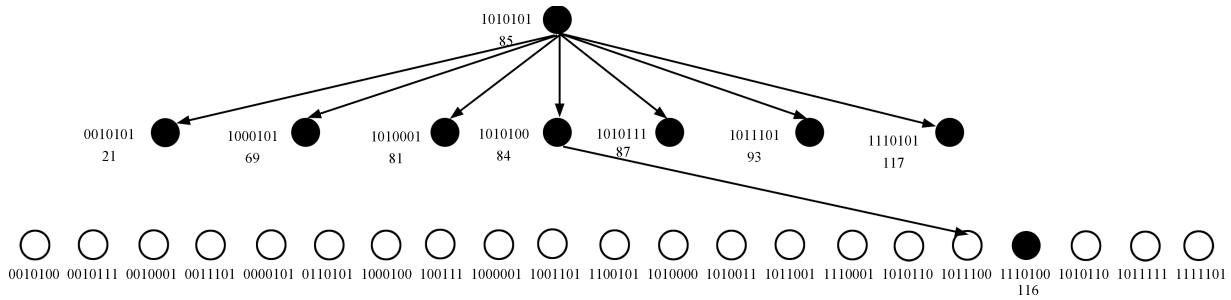


图 9 神经元 N_2 所示的汉明球突 $M(1,1)$

Fig. 9 Neuron N_2 expressing Hamming sphere dimple $M(1,1)$

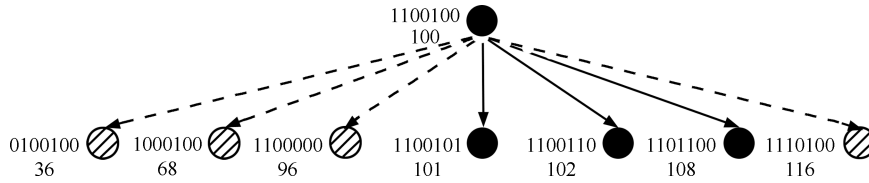


图 10 神经元 N_3 所示的汉明球突 $M(0,3)$

Fig. 10 N_3 expressing Hamming sphere dimple $M(0,3)$

例 4. 对于文献 [19] 中的 6 bit 逼近圆域, 该圆心在 (4,4), 直径为 4, 落在圆内及圆上的样本值为“1”, 落在圆外的样本值为“0”, 如图 11 所示, 其卡诺图如图 12, 这是典型的非线性可分函数, 可以归结为一个 B_2^6 空间中的布尔函数 $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, 其中, $F^{-1}(1) = \{010011, 011011, 011010, 010100, 011100, 011101, 101011, 100011, 100010, 101100, 100100, 100101\}$.

许多学者采用不同的学习算法^[17-18, 20-21] 实现该问题, 对于三层前向二进神经网络, 目前研究表明隐层最少需要使用 4 个神经元, 而对于这 4 个神经元所表达的逻辑意义仍不清楚, 文献 [20] 将分解结果表示为加权汉明球, 而加权汉明球目前仍未提取出清晰的逻辑意义; 文献 [18] 借助汉明图可以快速地通过 4 个隐元实现, 并未指出每个神经元的逻辑含义; 文献 [21] 将分解结果用十进制来表示, 从中更难以提取出清晰的逻辑意义. 上述三种学习算法通过 4 个神经元 S_1, S_2, S_3, S_4 将 $F^{-1}(1)$ 中的样本 $\{010011, 011011, 011010\}, \{010100, 011100, 011101\}, \{101011, 100011, 100010\}, \{101100, 100100, 100101\}$ 分别实现. 对于神经元 S_1, S_2, S_3, S_4 采用文献 [15] 的方法判别出其均为半径为 0 的汉明球突, 利用定理 4 进一步得出每个神经元的逻辑意义:

$S_1 = C((0, 1, 1, 0, 1, 1), 2) = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_4 \wedge x_5 \wedge U_1(1)$, 其中, $U_1(1)$ 为 B_2^2 空间中中心为 (1,1), 半径为 1 的汉明球;

$S_2 = C((0, 1, 1, 1, 0, 0), 2) = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_4 \wedge \bar{x}_5 \wedge U_2(1)$, 其中, $U_2(1)$ 为 B_2^2 空间中中心为 (1,0), 半径为 1 的汉明球;

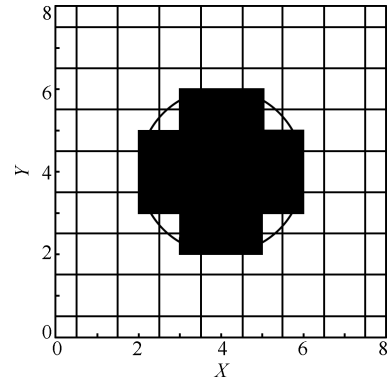


图 11 6 bit 逼近圆域

Fig. 11 Circular region obtained by 6 bit quantization

x_1, x_2, x_3	x_4, x_5, x_6							
	000	001	011	010	110	111	101	100
000	0	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0	0
011	0	0	1	1	0	0	1	1
010	0	0	1	0	0	0	0	1
110	0	0	0	0	0	0	0	0
111	0	0	0	0	0	0	0	0
101	0	0	1	0	0	0	0	1
100	0	0	1	1	0	0	1	1

图 12 6 bit 逼近圆域卡诺图

Fig. 12 Karnaugh map of circular region obtained by 6 bit quantization

$S_3 = C((1, 0, 0, 0, 1, 1), 2) = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_4 \wedge x_5 \wedge U_3(1)$, 其中, $U_3(1)$ 为 B_2^2 空间中中心为 (0,1),

半径为 1 的汉明球;

$S_4 = C((1, 0, 0, 1, 0, 0), 2) = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_4 \wedge \bar{x}_5 \wedge U_4(1)$, 其中, $U_4(1)$ 为 B_2^2 空间中中心为 $(0, 0)$, 半径为 1 的汉明球.

故 6 bit 逼近圆域函数

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_4 \wedge x_5 \wedge U_1(1)) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_4 \wedge \bar{x}_5 \wedge U_2(1)) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_4 \wedge x_5 \wedge U_3(1)) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_4 \wedge \bar{x}_5 \wedge U_4(1))$$

5 结论

在布尔空间中, 汉明球突是一类结构清晰的布尔函数, 由于其结构上的特性, 存在线性可分和线性不可分两种, 本文在前面工作^[15]的基础上, 首先, 对于任意样本提出是否为汉明球突的判定算法; 其次, 将汉明球突分解为汉明球与笛卡尔球并集, 得出汉明球突的逻辑意义, 并通过实例验证该方法的有效性.

本文的研究增加了一种具有清晰逻辑意义及判别法的线性可分结构系, 同时又给出了非线性可分的汉明球突的逻辑表达, 为非线性可分函数的逻辑表达开辟了一个新的研究方向. 事实上, 二进神经网络的规则提取中最重要的是依赖于其网络自身理论体系的完备性, 如果具有清晰逻辑意义及判别法的线性可分结构系覆盖了全部的二进神经元, 则建立一般的二进神经网络规则提取将变得容易, 在此意义上, 二进神经网络中汉明球突的判定及其逻辑意义丰富了对二进神经网络规则提取的理论.

References

- Lu Yang, Wei Zhen, Gao Jun, Han Jiang-Hong. Logical meaning of Hamming sphere and its general judgement method in binary neural networks. *Journal of Computer Research and Development*, 2002, **39**(1): 79–86 (陆阳, 魏臻, 高隽, 韩江洪. 二进神经网络中汉明球的逻辑意义及一般判别方法. 计算机研究与发展, 2002, **39**(1): 79–86)
- Huynh T Q, Reggia J A. Guiding hidden layer representations for improved rule extraction from neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, **22**(2): 264–275
- Diederich J, Tickle A B, Geva S. Quo Vadis. Reliable and practical rule extraction from neural networks. In: Proceedings of the Advances in Machine Learning I, Studies in Computational Intelligence. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010, **262**: 479–490
- Zhou Zhi-Hua, Chen Shi-Fu. Rule extraction from neural networks. *Journal of Computer Research and Development*, 2002, **39**(4): 398–405 (周志华, 陈世福. 神经网络规则抽取. 计算机研究与发展, 2002, **39**(4): 398–405)
- Zhou Zhi-Hua, He Jia-Zhou, Yin Xu-Ri, Chen Zhao-Qian. A statistics-based approach for rule extraction from neural networks. *Journal of Software*, 2001, **12**(2): 263–269 (周志华, 何佳州, 尹旭日, 陈兆乾. 一种基于统计的神经网络规则抽取方法. 软件学报, 2001, **12**(2): 263–269)
- Chen Guo. Method for rule extraction from neural networks based on functional point of view. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2008, **21**(6): 787–793 (陈果. 一种基于功能性观点的神经网络规则提取方法. 模式识别与人工智能, 2008, **21**(6): 787–793)
- Setiono R. Extracting M -of- N rules from trained neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2000, **11**(2): 512–519
- Bader S, Holldobler S, Mayer-Eichberger B. Extracting propositional rules from feed-forward neural networks: a new decompositional approach. In: Proceedings of the 3rd International Workshop on Neural-Symbolic Learning and Reasoning. Hyderabad, India: IJCAI, 2007. 1–6
- Bader S. Extracting propositional rules from feed-forward neural networks by means of binary decision diagrams. In: Proceedings of the 5th International Workshop on Neural-Symbolic Learning and Reasoning. Pasadena, California, USA, 2009. 22–27
- Darbari A. Rule Extraction from Trained ANN: a Survey. Technical Report, Institute of Artificial Intelligence, Department of Computer Science, TU Dresden, Germany, 2001
- Tsopez N, Mephu-Nguifo E, Tindo G. Towards a generalization of decompositional approach of rule extraction from multilayer artificial neural network. In: Proceedings of the 2011 International Joint Conference on Neural Networks. San Jose, California, USA: IEEE, 2011. 1562–1569
- Lu Yang, Han Jiang-Hong, Zhang Wei-Yong. Logical relation determination criteria and equivalence rule extraction on binary neural networks. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2001, **14**(2): 171–176 (陆阳, 韩江洪, 张维勇. 二进神经网络逻辑关系判据及等价规则提取. 模式识别与人工智能, 2001, **14**(2): 171–176)
- Lu Yang, Han Jiang-Hong, Wei Zhen. A general judging and constructing method of SP functions in binary neural networks. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(2): 234–241 (陆阳, 韩江洪, 魏臻. 二进神经网络中 SP 函数的一般判别和构造方法. 自动化学报, 2003, **29**(2): 234–241)
- Lu Yang, Han Jiang-Hong, Zhang Wei-Yong. Study of Cartesian sphere in binary neural networks. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2004, **17**(3): 368–373 (陆阳, 韩江洪, 张维勇. 二进神经网络中笛卡尔球的研究. 模式识别与人工智能, 2004, **17**(3): 368–373)
- Yang Juan, Lu Yang, Huang Zhen-Jin, Wang Qiang. Hamming sphere dimple in binary neural networks and its linear separability. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(6): 737–745 (杨娟, 陆阳, 黄振谨, 王强. 二进神经网络中的汉明球突及其线性可分性. 自动化学报, 2011, **37**(6): 737–745)

- 16 Kim J H, Park S K. The geometrical learning of binary neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1995, **6**(1): 237–247
- 17 Ma Xiao-Min, Yang Yi-Xian, Zhang Zhao-Zhi. A new framework and some results for threshold function. *Chinese Journal of Computers*, 2000, **23**(3): 225–230
(马晓敏, 杨义先, 章照止. 一种新的阈函数的分析框架及有关结论. 计算机学报, 2000, **23**(3): 225–230)
- 18 Hua Qiang, Zheng Qi-Lun. The Hamming-graph learning algorithm of BNN. *Chinese Journal of Computers*, 2001, **24**(11): 1250–1255
(华强, 郑启伦. 二进神经网络的汉明图学习算法. 计算机学报, 2001, **24**(11): 1250–1255)
- 19 Gray D L, Michel A N. A training algorithm for binary feedforward neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1992, **3**(2): 176–194
- 20 Ma Xiao-Min, Yang Yi-Xian, Zhang Zhao-Zhi. Research on the learning algorithm of binary neural network. *Chinese Journal of Computers*, 1999, **22**(9): 931–935
(马晓敏, 杨义先, 章照止. 二进神经网络学习算法研究. 计算机学报, 1999, **22**(9): 931–935)
- 21 Chen F Y, Chen G R, He Q B, He G L, Xu X B. Universal perceptron and DNA-like learning algorithm for binary neural networks: non-LSBF implementation. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2009, **20**(8): 1293–1301



杨娟 合肥工业大学计算机与信息学院博士研究生. 2009 年获得合肥工业大学数学学院硕士学位. 主要研究方向为人工智能, 神经网络.

E-mail: yangjuan6985@163.com
(**YANG Juan** Ph.D. candidate at the School of Computer and Information, Hefei University of Technology.

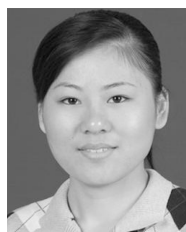
She received her master degree from Hefei University of Technology in 2009. Her research interest covers artificial intelligence and neural networks.)



陆阳 合肥工业大学计算机与信息学院教授. 主要研究方向为人工智能, 计算机控制, 传感器网络. 本文通信作者.

E-mail: luyang.hf@126.com

(**LU Yang** Professor at the School of Computer and Information, Hefei University of Technology. His research interest covers artificial intelligence, computer control, and sensor network. Corresponding author of this paper.)



俞磊 合肥工业大学计算机与信息学院博士研究生. 2007 年获得合肥工业大学计算机与信息学院硕士学位. 主要研究方向为物联网技术, 无线传感器网络.

E-mail: fishstonehfu1006@163.com

(**YU Lei** Ph.D. candidate at the School of Computer and Information, Hefei University of Technology. She received her master degree from Hefei University of Technology in 2007. Her research interest covers internet of things (IOT) application and wireless sensor network.)



方欢 合肥工业大学计算机与信息学院博士研究生. 2006 年获得山东科技大学信息学院硕士学位. 主要研究方向为人工智能, 智能控制.

E-mail: fanghuan0307@163.com

(**FANG Huan** Ph.D. candidate at the School of Computer and Information, Hefei University of Technology.

She received her master degree from Shandong University of Science and Technology in 2006. Her research interest covers artificial intelligence and intelligent control.)