

# 基于 minmax KKT 条件的三维重构方法

周果清<sup>1</sup> 王庆<sup>1</sup>

**摘要** 机器视觉中, 三维重构是一个重要问题. 基于 2 范数的最小二乘法速度较快, 但因误差代价函数非凸, 理论上无法获得全局最优解, 即使通过分支限界等方法, 往往也只能获得局部最优. 无穷范数表示的误差代价函数理论上可以获得全局最优, 但是计算速度很慢. 本文提出一种基于最小最大库恩塔克条件 (minmax KKT) 的三维重构方法. 该方法利用 minmax KKT 条件对基于 2 范数的三维重构结果进行全局最优判别, 对陷入局部最优的结果运用混合最速下降法进行全局寻优. 该方法可以获得全局最优, 相对于无穷范数算法具有更高的计算效率. 对标准数据集和真实数据的实验结果证明了本文算法的可行性和优点.

**关键词** 三维重构, 全局最优, minmax KKT, 最速下降

**引用格式** 周果清, 王庆. 基于 minmax KKT 条件的三维重构方法. 自动化学报, 2012, 38(9): 1439–1444

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2012.01439

## A Triangulation Method Based on minmax KKT

ZHOU Guo-Qing<sup>1</sup> WANG Qing<sup>1</sup>

**Abstract** Triangulation is one of important issues in machine vision. Although  $L_2$  norm based least square method is reasonably fast, the globally optimal solution cannot be obtained theoretically due to its non-convexity of the objective function. Even if some optimization strategies, such as branch and bound, are adopted, the result is locally optimal in most cases. In theoretical,  $L_\infty$  norm based approach can produce global optimal solution, however, its computational cost increases rapidly according to the size of measurement data. In this paper, we proposed a minmax KKT based triangulation method. The minmax KKT condition is first utilized to verify whether the solution by  $L_2$  norm is globally optimal. If the decision is negative, we apply hybrid steepest decent algorithm to pursuit global optimum. The proposed method can not only achieve global optimum but also raise the computational speed greatly compared to  $L_\infty$  based approach. Experimental results on benchmark data and real world scene have proven the feasibility and merit of the proposed method.

**Key words** Triangulation, global optimization, minmax KKT, steepest descent method

**Citation** Zhou Guo-Qing, Wang Qing. A triangulation method based on minmax KKT. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(9): 1439–1444

空间点的三维重构 (Triangulation), 即由已知的图像点坐标和对应的摄像机矩阵, 计算对应空间点的三维坐标, 是在计算机视觉的多视几何问题中的最重要的问题之一. 最简单和快速的方法是线性方法<sup>[1]</sup>, 但是该方法计算结果较差, 极易陷入局部最优. 因此, 一般方法采用 2 范数构造误差代价函数, 通过求解 2 范数下的优化问题获得空间点的坐标. 目前已经有很多求解该方法的方法, 常用的是 Newton 法和 Levenberg-Marquardt 法<sup>[1]</sup>, 以及光束法平差 (Bundle adjustment, BA) 算法<sup>[2]</sup>. 但是 BA 算法只有在给定初值较好的情况下, 才能够收

敛到全局最优值. 文献 [3–4] 提出了另一些基于多视几何的三维重建方法.

最新研究发现, 如果将三维重构的误差代价函数用无穷范数的形式表达, 其理论上是拟凸函数<sup>[5]</sup>, 因此可以将误差代价函数的求解归结为一个最小化最大误差优化问题, 进而寻求全局最优解. 具体的求解方法是利用无穷范数表示的误差函数为拟凸函数这个性质, 利用分支限界策略结合二阶锥规划 (Second-order cone programming, SOCP) 进行求解<sup>[6]</sup>. 这类算法可以在理论上确保获得的结果是全局最优的, 但缺点是计算速度很慢而且对外点很敏感. Olsson 等<sup>[7]</sup> 提出了利用无穷范数的代价函数是伪凸函数的性质求解三维重构问题. Agarwal 等<sup>[8]</sup> 指出基于无穷范数的三维重构问题本质上是一个广义分式规划问题, 提出利用牛顿法代替简单的二分搜索求解迭代的 SOCP 问题, 真实数据的实验结果表明其计算速度相对于文献 [6] 可以提高 1.5~4 倍. Seo 等<sup>[9]</sup> 提出在文献 [6] 的方法中, 可以用约束条件

收稿日期 2011-08-25 录用日期 2012-03-01  
Manuscript received August 25, 2011; accepted March 1, 2012  
国家自然科学基金 (60873085, 61103060) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60873085, 61103060)  
本文责任编辑 周杰  
Recommended by Associate Editor ZHOU Jie  
1. 西北工业大学计算机学院 西安 710072  
1. School of Computer Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072

子集代替整个约束条件集进行可行性检测, 从而减小求解问题的规模, 计算速度提高了大约 6 倍. Li<sup>[10]</sup> 提出了一种减少无穷范数问题求解规模的方法, 对于真实数据其速度提升大约 10 倍左右.

另外, 有研究者提出, 首先在 2 范数下对误差代价函数进行求解, 然后对获得的初始解进行全局最优性判别, 若判别成功就将其作为全局最优解, 若不成功则调用基于无穷范数的方法进行求解. 常见的方法可参考文献 [11]. 但是该类方法只是关注局部最优点的全局最优性判别, 对判别失败的点没有提出更好的解决方法.

本文提出一种基于 minmax KKT 条件的三维重构方法. 该方法首先利用 minmax KKT 条件对基于 2 范数算法的重构结果进行全局最优性判别, 如果结果陷入局部最优, 则运用混合最速下降法进行解的全局寻优. 该方法既在理论上保证了解的全局最优性, 又大大提高了计算速度.

### 1 问题描述

根据多视几何理论, 在齐次坐标系下, 空间中的点和图像上的点存在以下关系:

$$\mathbf{u}_i = P_i \mathbf{X}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, 1)^T$  表示空间中某一点的坐标,  $P_i$  表示第  $i$  个相机的摄像机矩阵,  $\mathbf{u}_i$  表示空间点  $\mathbf{X}$  在第  $i$  幅图像上成像点的坐标,  $i$  是相机的编号. 假设已经获得了空间点在每幅图像上的像点坐标  $\mathbf{u}_i$  和每幅图像对应相机的摄像机矩阵  $P_i$ , 空间点重构就是利用方程 (1) 求解  $\mathbf{X}$ .

理论上只要有足够多的对应点, 我们就可以通过求解线性方程完成三维空间点的重构. 由于图像点误差不可避免, 因此可以用重投影误差和来衡量三维重构的误差. 2 范数下的三维重构误差代价函数为

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{u}_i - P_i \mathbf{X}\|^2 \quad (2)$$

简单变换后可以得到 2 范数下的优化目标函数及约束为

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & f_i(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{j=1}^2 (\mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{x} + \tilde{a}_{ij})^2}{(\mathbf{b}_i^T \mathbf{x} + \tilde{b}_i)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}_i^T \mathbf{x} + \tilde{b}_i > 0 \\ & \mathbf{x}, \mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_i \in \mathbf{R}^n \\ & \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3) \\ \mathbf{a}_{ij} &= \mathbf{p}_{ij} - \mathbf{u}_{ij} \mathbf{p}_{i3}, \quad \tilde{a}_{ij} = \tilde{p}_{ij} - u_{ij} \tilde{p}_{i3}, \quad j = 1, 2 \\ \mathbf{b}_i &= \mathbf{p}_{i3}, \quad \tilde{b}_i = \tilde{p}_{i3} \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{p}_{ij}$  是  $P_i$  的第  $j$  列,  $\mathbf{b}_i^T \mathbf{x} + \tilde{b}_i > 0$  表示空间点一般都应该在摄像机前方.

基于无穷范数的三维重构误差代价函数为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \max_i f_i(\mathbf{x}) &= \frac{\sum_{j=1}^2 (\mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{x} + \tilde{a}_{ij})^2}{(\mathbf{b}_i^T \mathbf{x} + \tilde{b}_i)^2} \\ \text{s.t.} & \mathbf{b}_i^T \mathbf{x} + \tilde{b}_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

### 2 基于 minmax KKT 条件的全局最优判别

文献 [6] 证明了式 (5) 中的  $f_i(\mathbf{x})$  是伪凸函数, 伪凸函数是比拟凸函数更强的情形, 其定义如下.

**定义 1.** 一个函数  $f$  是伪凸函数当且仅当它是可微函数, 而且  $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \geq 0$  时,  $f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}})$ . 符号  $\nabla$  表示梯度运算符.

伪凸函数在优化问题中有着十分重要的作用, 一般来说伪凸函数的驻点就是它的全局最优点. 本文中, 虽然  $f_i(\mathbf{x})$  是伪凸函数, 但是  $\max_i f(\mathbf{x}_i)$  却不是伪凸函数<sup>[9]</sup>. 即便如此,  $\max_i f(\mathbf{x}_i)$  也有一些良好的性质, 其中最重要的性质是 minmax KKT 条件. 对于该结论的证明细节可参考文献 [12].

**推论 1 (minmax KKT 条件).**  $\mathbf{x}^*$  是  $u^* = \max_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$  的全局最优解, 其中  $S = \{\mathbf{x}; \mathbf{b}_i^T \mathbf{x} + \tilde{b}_i\}$ , 当且仅当存在  $\lambda_i^*$  满足:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (6)$$

如果  $f_i(\mathbf{x}^*) = u^*$ , 则  $\lambda_i^* \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ ; 如果  $f_i(\mathbf{x}^*) < u^*$ , 则  $\lambda_i^* = 0$  且  $\sum_i \lambda_i^* = 1$ .

推论 1 的几何含义是: 对于任意一个  $\mathbf{x}$ , 如果目标函数不是所有分量  $f_i(\mathbf{x})$  的梯度都消失, 那么在任一方向  $d$  上至少有一个  $i$  使得  $\nabla f_i(\mathbf{x}) \times d \geq 0$ , 也就是说在某一个方向至少有一个  $f_i(\mathbf{x})$  是增大的. 换句话说, 只有在全局最优点梯度才会完全消失. 根据这个重要推论, 本文首先采用基于 2 范数的方法获得空间点重构的初值, 再用 minmax KKT 条件对结果进行全局最优判别.

### 3 混合最速下降法用于全局寻优

用推论 1 对初始解进行判定的结果可能是否定的, 即某些初始解陷入了局部最优. 接下来的工作是如何从初值解出发获得全局最优解. 首先将式 (5) 进行简单变换:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} r \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{j=1}^2 (\mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{x} + \tilde{a}_{ij})^2}{(\mathbf{b}_i^T \mathbf{x} + \tilde{b}_i)^2} < r \\ & \mathbf{b}_i^T \mathbf{x} + \tilde{b}_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & r > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

对于  $\mathbf{x}$  来说,  $f_i(\mathbf{x})$  和  $r$  都是伪凸函数. 因为  $r$  对于  $\mathbf{x}$  来说是线性函数, 因此是凸函数. 由此, 可以得到关于式 (7) 的 KKT 充要条件.

**推论 2.** 对于一般不等式约束优化问题:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & \mathbf{x} \in \text{convex set} \end{aligned} \quad (8)$$

如果  $\mathbf{x}^*$  是一个可行解, 假设 (7) 的 KKT 条件在  $\mathbf{x}^*$  处满足, 那么:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (9)$$

如果  $f(\mathbf{x})$  和  $g_i(\mathbf{x})$  都是伪凸函数, 那么满足 KKT 条件 (9) 是  $\mathbf{x}^*$  为式 (8) 全局最优解的充要条件<sup>[13]</sup>.

进一步分析, 根据伪凸函数的定义, 对于  $f$ , 如果  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ , 那么对于所有的  $\mathbf{x}$  满足  $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = 0$  且  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ . 反过来, 如果对于所有  $\mathbf{x}$  有  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ , 若  $\mathbf{x}$  是全局最小值或者局部最小, 都有  $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ . 这就表明, 对于一个伪凸函数任意一个驻点都是全局最优点. 这表明除了在全局最优驻点之外, 任何一个点的梯度都不会为 0. 而以梯度下降法为基础的方法, 只有当梯度为零时算法才停止. 这就使得基于梯度的最速下降法获取全局最优解成为可能.

同时, 在三维重构问题中, 对应每一个相机的约束条件  $g_i(\mathbf{x})$  实质上构成了定义域内的一个凸包 (如图 1). 因为每一个相机图像上的误差约束构成一个以相机中心为顶点的锥体, 若干个锥体的交集是一个凸包. 受文献 [14] 启发, 本文提出基于凸约束的混合最速下降法, 从基于 2 范数的初始解出发, 寻找全局最优解.

其伪代码如下:

- 1) select the initial point  $\mathbf{x}_0$  based on the  $L_2$  norm;
- 2) **if**  $\mathbf{x}_0$  is the global optimization **then** stop, **else** continue;
- 3) **repeat**
- 4)     **if**  $\exists j : g_j(\mathbf{x}_n) > 0$
- 5)          $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \lambda \sum_{i \in L(\mathbf{x}_n)} \nabla g_i(\mathbf{x}_n)$
- 6)     **else**
- 7)          $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \lambda \nabla f_j(\mathbf{x}_n)$
- 8)     **end if**
- 9) **until**  $f(\mathbf{x}_n) < \gamma$ , where  $\gamma$  is a given error.

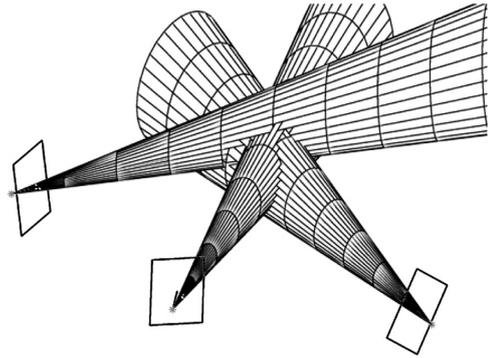


图 1 三维重构图示

Fig. 1 Illustration of 3D reconstruction

该算法既从理论上保证了可以获得三维重构的全局最优, 又避免了单纯的最速下降法带来的锯齿效应, 提高了收敛速度.

### 4 本文算法

综合上述讨论, 本文提出的基于 minmax KKT 条件的三维重构算法如下所述:

1) 由已知图像点坐标  $\mathbf{u}_i$  及其对应的摄像机矩阵  $P_i$ , 采用基于 2 范数的方法求出初始解  $\mathbf{x}^0$ , 并将其带入式 (5), 得到  $r^0 = \max_i f_i(\mathbf{x}^0)$ ;

2) 给定一个很小的正数  $\varepsilon$ , 求解线性规划:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \nabla f_i(\mathbf{x}^0) = 0, \quad \{f_i(\mathbf{x}^0) | r^0 - f_i(\mathbf{x}^0) < \varepsilon\} \\ & \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 = 1, \quad \lambda_i^0 > 0 \end{aligned}$$

如果该问题有解, 说明  $\mathbf{x}^0$  满足 minmax KKT 条件, 即是当前问题的全局最优, 算法终止, 否则进行下一步;

3) 以  $\mathbf{x}^0$  为初值, 采用混合最速下降法获取全局最优, 即重复以下步骤: 如果  $\exists j : f_j(\mathbf{x}^k) > 0$ , 则  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - t \sum_{i \in L(\mathbf{x}^k)} \nabla g_i(\mathbf{x}^k)$ ; 否则,  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \lambda \nabla f_j(\mathbf{x}^k)$ . 直到  $|f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k+1})| < \gamma$ , 其中  $\gamma$  是

一个给定的误差.

文献 [6] 求解三维重构的标准算法是将求解的问题转化为一系列的凸规划问题, 例如二阶锥规划 (SOCP), 然后通过二分搜索的迭代方法来求解每一个 SOCP 问题. 现代凸优化问题求解算法一般都是内点法 (Interior-point-algorithm). 内点法是一个多项式时间的算法, 其计算代价随着问题的规模呈多项式的递增, 当问题的规模变大 (如变量个数增加或者约束条件增加) 时, 计算速度变得很慢. 本文提出的基于 minmax KKT 条件的算法中, 步骤 1) 通过基于 2 范数的方法获取初始解, 该方法的核心部分是基于 SVD 分解的最小二乘估计, 步骤 2) 求解的是关于  $\lambda_i^0$  的线性规划. 如果  $\mathbf{x}^0$  被判定为全局最优, 那么算法耗时是最小二乘估计和线性规划之和, 远远小于迭代的凸优化问题. 如果  $\mathbf{x}^0$  被判定为局部最优解, 则调用混合最速下降法获取全局最优, 该方法相对于迭代的凸优化问题求解速度也提升较多<sup>[14]</sup>. 因此, 本文提出的算法在保证计算精度的情况下, 提高了三维重构的效率.

### 5 实验与讨论

为了验证本文算法的精度和速度, 我们采用虚拟数据和真实数据进行三维重构. 虚拟数据来自 Lund 大学的 Linfinity-1.0 数据<sup>[15]</sup>, 真实数据来自 Oxford 大学<sup>[16]</sup>. 对比算法为基于无穷范数的全局最优算法 (I-bisection)<sup>[6]</sup>, 这是一种运用对分策略的二阶锥面规划全局优化算法, 被认为是当前最好的基于无穷范数的三维空间重构算法. 本文的实验环境为 Intel P8600 CPU, 2 G 内存, Matlab 2010a.

#### 5.1 虚拟数据实验结果

虚拟数据模拟了 1000 个点的空间坐标,  $N$  个摄像机. 模拟图像尺寸为 1024 像素  $\times$  768 像素, 并对虚拟图像坐标加入了同水平的高斯噪声. 考察不同摄像机数量下的算法速度 (表 1)、不同摄像机数量情况下空间中相同数量点重投影误差均值比较 (图 2) 和相同图像数量不同噪声水平的误差比较 (图 3).

表 1 不同数量摄像机下运算速度比较

Table 1 Comparison of speed up with different cameras

摄像机 数量	计算时间 (s)		速度提升 (倍)
	I-bisection 方法	本文算法	
10	552.32	16.22	34
25	583.51	19.03	31
50	632.43	23.96	26
100	992.04	49.59	20
500	2 985.17	262.39	11

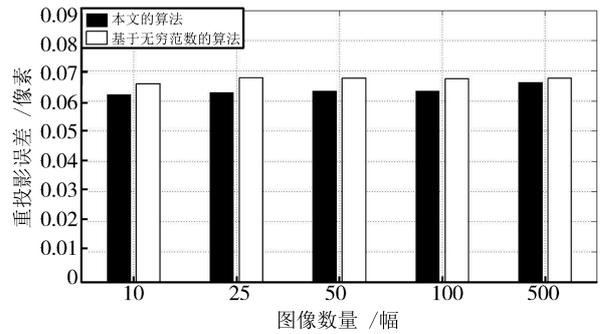


图 2 不同数量摄像机下重投影误差比较  
Fig. 2 Comparison of re-projection errors with different cameras

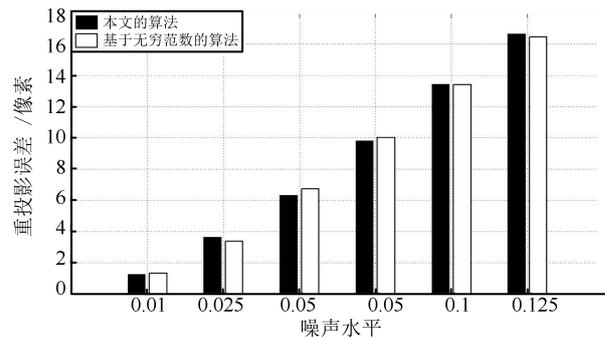


图 3 不同噪声水平下重投影误差比较  
Fig. 3 Comparison of re-projection errors with different noises

#### 5.2 真实数据实验结果

真实数据实验中, 本文采用恐龙 (图 4 和图 5)、巴黎圣母院 (图 6) 以及模型房子和沃姆德学院. 其中恐龙数据包含了 36 幅图像 4983 个空间点. 巴黎圣母院数据包含 595 幅图和 277 877 个点, 本文抽取了其中 212 幅具有良好匹配关系的图像共 160 147 个空间点. 对于巴黎圣母院数据, 考虑到计算精度, 我们首先对摄像机参数和图像点坐标进行了归一化, 因此误差绝对值较小. 具体的实验结果见表 2.

#### 5.3 分析与讨论

下面从三维重构的计算速度、精度和抗噪声能力这三个方面对实验结果进行分析和讨论.

从虚拟数据的实验结果 (表 1) 可以看出, 本文算法在 100 幅图以内速度提升在 20 倍以上, 500 幅图时本文算法和文献 [5] 的算法效率相当. 但是在真实应用中, 空间中某一个点同时在 100 幅图像中成像的几率很小. 真实数据实验中 (表 2), 本文算法针对空间点较多的恐龙数据的速度提升为 17 倍左右, 处理巴黎圣母院数据的速度提升是 26 倍左右. 对于空间点较少的实验数据, 其速度提升还要明显一些.

表 2 真实实验数据计算精度和速度比较

Table 2 Comparison of accuracy and speed up on real data

数据集	平均误差 (像素)		计算时间 (s)		速度提升 (倍)
	I-bisection 方法	本文算法	I-bisection 方法	本文算法	
恐龙	1.7460	1.5661	3 244.34	190.10	17
巴黎圣母院	0.0590	0.0404	107 510.11	4 060.34	26
模型房子	1.7478	1.5752	394.45	22.32	18
沃姆德学院	0.3677	0.3613	611.78	19.45	32

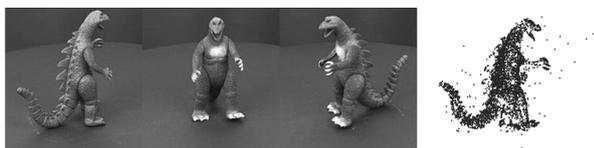


图 4 恐龙图像序列及重建结果

Fig. 4 Reconstruction result of Dino data

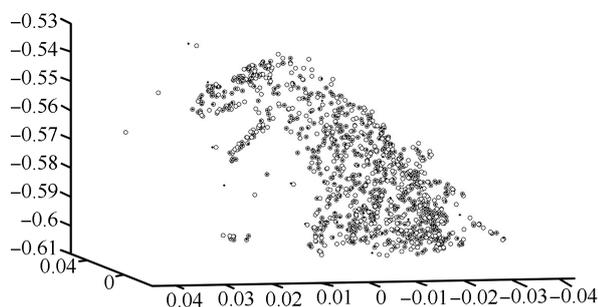


图 5 恐龙三维重构结果头部比较

Fig. 5 Comparison of head details of reconstructed Dino



图 6 巴黎圣母院图像序列及重建结果

Fig. 6 Reconstruction result of Notre Dame data

由此可见, 本文算法相比 I-bisection 方法在三维重构的速度上有明显的提升.

在计算精度方面, 针对虚拟数据, 从不同数量摄像机下的重投影误差均值比较可以看出本文算法的计算精度与 I-bisection 方法相当 (图 2), 甚至略好一些. 真实数据实验中, 本文算法针对大量空间点的恐龙、巴黎圣母院数据的计算精度都高于 I-bisection 方法. 为了更直观地比较两种方法重建结果, 图 5 截取了两种方法重建的三维恐龙的头部, 其中圆点是 I-bisection 方法重建的结果, 小圆圈是本文算法重建的结果. 可以看到绝大部分空间点是重合的, 这表明本文算法和 I-bisection 方法的重建结

果是相当的. 但是, 对于头像边的外点, 两种方法出现了不一致的重建结果. 考虑到 I-bisection 方法对外点敏感<sup>[17]</sup> 以及表 2 中得到的重建误差本文算法更小, 可知本文算法对外点更鲁棒.

相同摄像机数量不同噪声水平的虚拟数据实验中, 本文算法的 3 组结果比 I-bisection 方法略好, 3 组略差 (图 3), 但是相对差距均很少. 其主要原因是实验中为了提高计算效率, 设定了算法的迭代次数. 如果去掉迭代次数限制, 计算时间会略有增加但是抗噪能力优于对比算法.

相对于文献 [8] 提出的通过构造和计算 Hessian 矩阵判断全局最优的方法, 本文提出的基于 minmax KKT 的判别方法, 由于只计算一个线性规划, 其判别速度更快; 当判断结果是否定时, 不同于其他文献采用 I-bisection 方法进行重新求解, 本文提出利用混合最速下降法重新求解, 大大提高了计算的效率, 同时保证了全局最优. 因此本文算法更适合大规模三维重建.

## 6 总结与展望

本文提出了一种基于 minmax KKT 条件的三维重构方法, 该方法利用 minmax KKT 条件对基于 2 范数的三维重构结果进行全局最优判别, 对陷入局部最优的结果采用混合最速下降法进行全局寻优. 实验结果表明, 该算法保证了三维重建结果的精度, 比无穷范数优化算法的效率高, 特别适合于大规模场景三维重构. 同时, 该算法也适合于多视几何中具有相似形式误差函数的其他问题的全局最优快速求解, 如单应估计、摄像机姿态确定等.

## References

- Hartley R, Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision (2nd edition)*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 310–314
- Triggs B, McLauchlan P, Hartley R, Fitzgibbon A. *Vision Algorithms: Theory and Practice*. Berlin: Springer-Verlag, 2000. 298–372

- 3 Shi Li-Min, Guo Fu-Sheng, Hu Zhan-Yi. An improved PMVS through scene geometric information. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(5): 560–568  
(史利民, 郭复胜, 胡占义. 利用空间几何信息的改进 PMVS 算法. 自动化学报, 2011, **37**(5): 560–568)
- 4 Zhang Feng, Shi Li-Min, Sun Feng-Mei, Hu Zhan-Yi. An image based 3D reconstruction system for large indoor scenes. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(5): 625–633  
(张峰, 史利民, 孙凤梅, 胡占义. 一种基于图像的室内大场景自动三维重建系统. 自动化学报, 2010, **36**(5): 625–633)
- 5 Hartley R, Schaffalitzky F.  $L_\infty$  minimization in geometric reconstruction problems. In: Proceedings of the 2004 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Washington DC, USA: IEEE 2004. 504–509
- 6 Kahl F, Hartley R. Multiple-view geometry under the  $L_\infty$ -norm. In: Proceedings of the 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Anchorage, Alaska, USA: IEEE, 2008. 1603–1617
- 7 Olsson C, Eriksson A P, Kahl F. Efficient optimization for  $L_\infty$ -problems using pseudoconvexity. In: Proceedings of the 2007 IEEE Conference on International Conference on Computer Vision. Rio de Janeiro, Brazil: IEEE, 2007. 1–8
- 8 Agarwal S, Snavely N, Seitz S M. Fast algorithms for  $L_\infty$  problems in multiview geometry. In: Proceedings of the 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Anchorage, USA: IEEE, 2008. 1–8
- 9 Seo Y, Hartley R. A fast method to minimize  $L_\infty$  error norm for geometric vision problems. In: Proceedings of the 2007 IEEE Conference on International Conference on Computer Vision. Rio de Janeiro, Brazil: IEEE, 2007. 1–8
- 10 Li H D. Efficient reduction of  $L_\infty$  geometry problems. In: Proceedings of the 2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Miami, USA: IEEE, 2009. 2695–2702
- 11 Olsson C, Kahl F, Hartley R. Projective least-squares: global solutions with local optimization. In: Proceedings of the 2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Miami, USA: IEEE, 2009. 1216–1223
- 12 Polyak R, Griva I, Sotomayor J. *Nonsmooth/Nonconvex Mechanics: Modeling, Analysis, and Numerical Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000. 302–330
- 13 Olsson C, Kahl F. Generalized convexity in multiple view geometry. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2010, **38**(1): 35–51
- 14 Gerard M, De Schutter B, Verhaegen M. A hybrid steepest descent method for constrained convex optimization. *Automatica*, 2009, **45**(2): 525–531
- 15 The Maths. Lth. The  $L_\infty$  Toolbox for Matlab [Online], available: <http://www.maths.lth.se/matematiklth/personal/fredrik/download.html>, April 3, 2011
- 16 The Date of Visual Geometry Group [Online], available: <http://www.robots.ox.ac.uk/?vgg/data/data-mview.html>, April 10, 2011
- 17 Li H D. A practical algorithm for  $L_\infty$  triangulation with outliers. In: Proceedings of the 2007 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Minneapolis, USA: IEEE, 2007. 1–8



**周果清** 西北工业大学计算机学院讲师, 博士研究生. 2009 年于西北工业大学获得硕士学位. 主要研究方向为三维重建, 全局优化, 计算摄影术.

E-mail: zhouguoqing@nwpu.edu.cn

(**ZHOU Guo-Qing** Lecturer and Ph. D. candidate at the School of Computer Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University. He received his master degree from School of Computer Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University in 2009. His research interest covers 3D Reconstruction, global optimization, and computational photography.)



**王庆** 西北工业大学计算机学院教授. 主要研究方向为计算机视觉, 图像与视频处理, 光场成像, 虚拟现实. 本文通信作者. E-mail: qwang@nwpu.edu.cn

(**WANG Qing** Professor at the School of Computer Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University. His research interest covers

computer vision, image and video signal processing, light field, and virtual reality. Corresponding author of this paper.)