

# 基于随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵的压缩传感

张成<sup>1</sup> 杨海蓉<sup>2</sup> 韦穗<sup>1</sup>

**摘要** 选择合适的测量矩阵是压缩传感理论实用化的关键之一. 本文在 Toeplitz 矩阵独立元素中随机地引入零元, 形成随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵, 使得随机独立变元个数可以减少到原 Toeplitz 矩阵的  $1/2 \sim 1/16$ , 甚至更少, 非零元个数同样大大减少, 有利于数据传输和存储. 模拟实验表明随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵在重建效果优于 Gauss 矩阵和原 Toeplitz 矩阵的同时, 重建时间只有 Gauss 矩阵和一般 Toeplitz 矩阵重建时间的约  $15\% \sim 40\%$ .

**关键词** 压缩传感, 测量矩阵, 托普利兹, 确定性矩阵

**引用格式** 张成, 杨海蓉, 韦穗. 基于随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵的压缩传感. 自动化学报, 2012, 38(8): 1362–1369

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2012.01362

## Compressive Sensing Based on Deterministic Sparse Toeplitz Measurement Matrices with Random Pitch

ZHANG Cheng<sup>1</sup> YANG Hai-Rong<sup>2</sup> WEI Sui<sup>1</sup>

**Abstract** Selecting an appropriate measurement matrix is one of the key points of compressive sensing. Due to randomly introducing zero elements into these matrices to form sparse Toeplitz matrices with random pitch, the number of random independent variables can be reduced to  $1/2$  and  $1/16$  less than that of original Toeplitz matrices, the number of non-zero elements can also be reduced significantly, which is conducive to data transmission and storage. Simulation results show that the reconstructions of sparse Toeplitz measurement matrices with random pitch are better than Gaussian and original Toeplitz matrices. Moreover, the time of reconstruction is only about  $15\%$  to  $40\%$  of the time of Gauss and general Toeplitz reconstruction.

**Key words** Compressive sensing, measurement matrix, Toeplitz, deterministic matrix

**Citation** Zhang Cheng, Yang Hai-Rong, Wei Sui. Compressive sensing based on deterministic sparse Toeplitz measurement matrices with random pitch. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(8): 1362–1369

压缩传感 (Compressive sensing, CS)<sup>[1–2]</sup> 替代 Nyquist 采样定理, 作为采样信号的一个新选择, 能从小部分的线性投影中高概率重建原始信号. 考虑一个实值、长度为  $N$  的  $K$ -稀疏的信号  $x$ , 将通过计算  $x$  的  $M$  次线性投影所得的测量值向量  $y$  编码, 即通过下式被编码:

$$y = \Phi x + e \quad (1)$$

其中,  $\Phi$  是  $M \times N$  的测量矩阵,  $e$  是测量误差. 利用  $x$  具有  $K$ -稀疏这个先验条件, 使得  $x$  的求解变得可能, 通过寻求满足式 (1) 的最稀疏信号, 获得  $x$  的稀疏表示系数  $\theta$  的估计, 即:

$$\hat{\theta} = \arg \min \|\theta\|_1, \text{ s.t. } \|y - \Phi\Psi\theta\| = \|y - A\theta\| \leq \varepsilon \quad (2)$$

其中,  $A$  称为传感矩阵,  $\varepsilon$  是噪声容限. 测量矩阵的适当选择对信号重建所需测量次数、能否实际应用及其后端重建效果都具有极其重要的影响. Candès 等<sup>[2–3]</sup> 证明了只要测量矩阵  $\Phi$  满足限制等容性条件, 那么式 (2) 可以利用线性规划算法和贪婪算法等高概率重建原始信号. Candès 等<sup>[2]</sup> 提出可以高概率重建信号的三种随机测量矩阵: 高斯测量矩阵、贝努里测量矩阵和傅里叶随机测量矩阵. 近期, 文献 [4–6] 中提出 Toeplitz 结构的随机测量矩阵并给出相应的限制等容性质 (Restricted isometry prosperities, RIP) 的证明及其在稀疏通道估计中的应用的详细理论分析, 改进了随机 Gauss 测量矩阵自由元素太多的缺点, 使得测量矩阵的物理实现难度大大减低且计算速度大大加快. 文献 [7–8] 分别

收稿日期 2011-05-23 录用日期 2011-08-12  
Manuscript received May 23, 2011; accepted August 12, 2011  
国家自然科学基金 (60872106), 安徽高校省级自然科学基金项目 (KJ2011B131), 安徽大学青年基金 (KJQN1010) 和“新一代宽带无线移动通信网”国家科技重大专项 (2009ZX-03006-001-02) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60872106), Anhui University Provincial Natural Science Research Project (KJ2011B131), Youth Science Foundation of Anhui University (KJQN1010), and “The Next Generation Broadband Wireless Mobile Communications Network” National Science and Technology of Major Projects (2009ZX-03006-001-02)  
本文责任编辑 董峰  
Recommended by Associate Editor DONG Feng  
1. 安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室 合肥 230039  
2. 合肥师范学院数学系 合肥 230609  
1. Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039  
2. Department of Mathematics, Hefei Normal University, Hefei 230609

给出确定性矩阵采样的重构理论分析和保证确定性测量矩阵满足 RIP 条件的标准. 文献 [9–14] 在确定性测量矩阵的基础上, 分别提出 Quasi-Toeplitz 矩阵、Semi-Hadamard、混沌 Toeplitz、轮排二值块对角 (Binary permuted block diagonal, BPBD)、块状多项式测量矩阵和非常稀疏投影测量矩阵等, 并给出满足 RIP 条件的分析与证明. 本文在 Bajwa 等<sup>[4]</sup> 的工作基础上, 提出随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵作为测量矩阵, 模拟实验结果表明本文提出的矩阵在获得较好的重建结果的同时, 矩阵的存储空间只需要原来的  $1/2 \sim 1/16$ , 计算时间也降低到原 Toeplitz 所需时间的  $15\% \sim 40\%$  左右, 有着较大的研究意义.

## 1 基本理论

Donoho<sup>[1]</sup> 以及 Candès 等<sup>[3]</sup> 分别给出从式 (2) 中高概率重建信号时, CS 矩阵  $\Phi$  的充分条件. 对一个  $M \times N$  矩阵成为一个 CS 矩阵的充分条件是满足  $3K$  阶的 RIP 性质, 其意义为: 设  $T = \{1, 2, \dots, N\}$ , 而  $\Phi_T$  是  $M \times |T|$  子阵,  $\Phi_T$  由保留对应  $T$  中的指标对应  $\Phi$  的列得到; 那么, 存在一个常数  $\delta_{3K} \in (0, 1/3)$ , 使得:

$$(1 - \delta_{3K})\|\mathbf{z}\| \leq \|\Phi_T \mathbf{z}\| \leq (1 + \delta_{3K})\|\mathbf{z}\|, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}^{|T|} \quad (3)$$

对所有  $|T| \leq 3K$  的子集,  $T$  都成立.

在可压缩传感应用中, 线性投影  $\Phi_x$  采样需要物理实现. 在大多数情况下, 使用随机 Gaussian 矩阵是不可能的或成本太高, 这就是本文研究随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵的动机. Bajwa 等<sup>[4]</sup> 和 Rauhut 等<sup>[5]</sup> 证明了形式为

$$\Phi_{\text{Toep}} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_N \\ \phi_{N+1} & \phi_1 & \cdots & \phi_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N+M-1} & \phi_{N+M-2} & \cdots & \phi_{N-M+1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

的 Toeplitz 矩阵,  $\Phi_{\text{Toeplitz}} (\phi_{i+1,j+1} = \phi_{i,j})$  是一个测量矩阵, 其中, 元  $\{\phi_i\}_{i=1}^{N+M-1}$  满足独立同分布 (Independent identically distributed, IID) 的高斯分布, 下面对式 (1) 按矩阵乘法按列式展开:

$$\begin{aligned} y = A\theta + e = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{pmatrix} + e = \\ & \mathbf{A}_1\theta_1 + \mathbf{A}_2\theta_2 + \cdots + \mathbf{A}_N\theta_N + e \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $A = [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2 \ \cdots \ \mathbf{A}_N]$ ,  $\mathbf{A}_i (1 \leq i \leq N)$  表示传感矩阵的列. 在每一次的迭代过程中, 从传感矩阵的列  $\mathbf{A}_i (1 \leq i \leq N)$  中选择与信号最匹配的列来构建稀疏逼近, 并求出信号表示的残差, 然后, 继续选择与信号残差最为匹配的列, 经过一定次数的迭代, 信号可以由一些传感矩阵的列来线性表示. 但是由于信号在已选定支撑列的集合上的投影的非正交性, 使得每次迭代的结果可能是次最优的. 下面将说明怎样通过式 (3) 的矩阵构造对应的随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵. 模拟实验表明某些随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵与 Gaussian 效果相当, 甚至更优.

## 2 随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵

本节以间距  $\Delta = 2$  的稀疏 Toeplitz 矩阵为例, 给出随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵的构造方法. 本文在式 (4) 的基础上做出一些改进, 对于一般的 Toeplitz 矩阵, 对由其第 1 行和第 1 列元素所构成的向量  $\mathbf{T}_1 = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_N \ \phi_{N+1} \ \cdots \ \phi_{N+M-1}]$  做出随机间距稀疏的变化. 我们知道, 向量  $\mathbf{T}_1$  中包含了式 (4) Toeplitz 矩阵中的所有独立元素. 下面对向量  $\mathbf{T}_1$  进行赋值, 其元素  $\phi_i (i \in \Lambda, \Lambda$  是从  $1 \sim N + M - 1$  的索引序列中随机选取的  $[(N + M - 1)/\Delta]$  个索引) 的值服从独立同分布随机 Gaussian 分布,  $\mathbf{T}_1$  向量中其他元素全部赋值为 0. 然后根据 Toeplitz 矩阵的特点构造随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵:

$$\phi_{i+1,j+1} = \phi_{i,j} \quad (6)$$

下面给出本文提出的随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵满足限制等容性条件的证明.

**引理 1.** 给定  $N, K$ , 假定  $M \times N$  矩阵的列是标准化的, 其元素是独立同分布, 那么对于每一个  $\delta_{3K} \in (0, 1/3)$  和  $T \subset \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $|T| = 3K$ ,  $M \times |T|$  的子矩阵至少以  $1 - \exp(-f(M, K, \delta_{3K}))$  的概率满足式 (3), 其中  $f(M, K, \delta_{3K})$  是  $M, K$  和  $\delta_{3K}$  的实值函数. 假定  $\{\phi_i\}_{i \in \Lambda}$  中的随机变量独立同分布,  $\Phi$  是一个  $M \times N$  大小的随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵. 那么, 对于每一个  $\delta_{3K} \in (0, 1/3)$  和  $T \subset \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $|T| = 3K$ , 随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵满足 RIP 条件的概率至少为

$$1 - \exp\left(-f\left(\left\lfloor \frac{M}{q} \right\rfloor, K, \delta_{3K}\right) + \ln(q)\right) \quad (7)$$

其中,  $q = \lceil 3K(3K - 1)/\Delta \rceil + 1$ .

**注 1.** 作为一个说明, 概率分布  $P(a)$  给定如下:

$$N\left(0, \frac{1}{M}\right), \begin{cases} +\sqrt{\frac{1}{M}}, & p = \frac{1}{2} \\ -\sqrt{\frac{1}{M}}, & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} +\sqrt{\frac{3}{M}}, & p = \frac{1}{6} \\ 0, & p = \frac{2}{3} \\ -\sqrt{\frac{3}{M}}, & p = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (8)$$

那么

$$f(M, K, \delta_{3K}) = c_0 M - 3K \ln\left(\frac{12}{\delta_{3K}}\right) - \ln(2) \quad (9)$$

其中,  $c_0 = c_0(\delta_{3K}) = \delta_{3K}^2/16 - \delta_{3K}^3/48$ <sup>[15]</sup>.

**证明.** 选定  $\delta_{3K} \in (0, 1/3)$ ,  $T \subset \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $|T| = 3K$ .  $\Phi_{T,i}$  表示  $\Phi$  的第  $i$  行并构造一个相关图  $G = (V, E)$ , 定点  $V = \{1, 2, \dots, M\}$ ,

$$E = \{(i, i') \in V \times V : i \neq i', \Phi_{T,i} \text{ and } \Phi_{T,i'} \text{ are dependent}\}$$

注意由于 Toeplitz 矩阵  $\Phi$  的特性,  $\Phi_{T,i}$  和  $\Phi_T$  的其他行之间的最大相互依赖是:

$$\left\lceil \frac{3K(3K-1)}{\Delta} \right\rceil = q - 1$$

这就是说图  $G$  的最大自由度 (从顶点派生的边的最大数目)  $\leq (q-1)^2$ . 因此, 使用 Hajnal-Szemerédi 的图等价着色定理<sup>[16]</sup>, 可以将  $G$  分成  $q$  块 (或更多) 使:

$$\left\lceil \frac{M}{q} \right\rceil \leq \min_{j \in \{1, 2, \dots, q\}} |C_j| \leq \max_{j \in \{1, 2, \dots, q\}} |C_j| \leq \left\lceil \frac{M}{q} \right\rceil \quad (10)$$

其中,  $\{C_j\}_{j=1}^q$  对应不同的颜色分类. 下一步,  $\Phi_T^j$  是  $|C_j| \times |T|$  的分割子矩阵通过保留  $C_j$  的索引对应  $\Phi_T$  的行:

$$\begin{aligned} \|\Phi_T \mathbf{z}\| &= \sum_{j=1}^q \|\Phi_T^j \mathbf{z}\|_2^2 = \\ & \sum_{j=1}^q \frac{|C_j|}{M} \|\tilde{\Phi}_T^j \mathbf{z}\|_2^2, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}^{|T|} \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\tilde{\Phi}_T^j = \sqrt{M/|C_j|} \Phi_T^j$  (保证  $\tilde{\Phi}_T^j$  的列范数的期望是 1). 然后, 由  $\Phi_T^i$  的定义, 每一个  $\tilde{\Phi}_T^j$ , 其独立元素取自概率分布  $P(a)$ , 是一个  $|C_j| \times |T|$  子矩阵, 满足式 (3) 的概率至少为

$$1 - \exp(-f(|C_j|, K, \delta_{3K})) \geq$$

$$1 - \exp\left(-f\left(\left\lceil \frac{M}{q} \right\rceil, K, \delta_{3K}\right)\right) \quad (12)$$

同样注意  $\sum_{j=1}^q \frac{|C_j|}{M} = 1$ , 从式 (11) 可以得到:

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^q \tilde{\Phi}_T^j \text{ satisfies (3)} \right\}$$

即

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \frac{|C_j|}{M} (1 - \delta_{3K}) \|\mathbf{z}\|_2^2 &\leq \sum_{j=1}^q \frac{|C_j|}{M} \|\tilde{\Phi}_T^j \mathbf{z}\|_2^2 \leq \\ \sum_{j=1}^q \frac{|C_j|}{M} (1 + \delta_{3K}) \|\mathbf{z}\|_2^2 &\Rightarrow \\ (1 - \delta_{3K}) \|\mathbf{z}\|_2^2 &\leq \|\Phi_T \mathbf{z}\|_2^2 \leq (1 + \delta_{3K}) \|\mathbf{z}\|_2^2 \end{aligned} \quad (13)$$

也即

$$\begin{aligned} \left\{ \bigcap_{j=1}^q \tilde{\Phi}_T^j \text{ satisfies (3)} \right\} \\ \subset \{\Phi_T \text{ satisfies (3)}\} \end{aligned} \quad (14)$$

因此, 有:

$$\Pr\{\Phi_T \text{ satisfies (3)}\} = \quad (15a)$$

$$1 - \Pr\{\Phi_T \text{ does not satisfies (3)}\} \geq$$

$$1 - \Pr\left(\left\{ \bigcup_{j=1}^q \tilde{\Phi}_T^j \text{ does not satisfies (3)} \right\}\right) \geq \quad (15b)$$

$$1 - \sum_{j=1}^q \Pr\left(\left\{ \tilde{\Phi}_T^j \text{ does not satisfies (3)} \right\}\right) \geq$$

$$1 - \sum_{j=1}^q \exp\left(-f\left(\left\lceil \frac{M}{q} \right\rceil, K, \delta_{3K}\right)\right) =$$

$$1 - \exp\left(-f\left(\left\lceil \frac{M}{q} \right\rceil, K, \delta_{3K}\right) + \ln(q)\right) \quad (15c)$$

其中, 式 (15a) 遵循式 (14), 式 (15b) 遵循一致性边界  $\left\{ \bigcup_{j=1}^q \tilde{\Phi}_T^j \text{ does not satisfy (3)} \right\}$ , 式 (15c) 遵循式 (12) 的结果.  $\square$

不严谨地说, 当  $M$  充分大时, 引理 1 表明对于任意  $3K$  阶子集  $T$ , 如果一个 IID 子矩阵满足式 (3) 的概率至少是  $1 - \exp(-O(M))$ , 那么随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵至少以  $1 - \exp(-O(M\Delta/K^2))$  的概率满足式 (3). 下一步随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵对所有的子集满足式 (3) 条件的一致性下界. 下面专门说明一致性边界的影响.

**定理 1.** 给定  $N, K$ , 假定  $\Phi$  是一个  $M \times N$  的随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵, 其元  $\{\phi_i\}_{i \in \Lambda}$  服从式 (8)

给出的 IID 的概率分布, 那么存在常数  $c_1, c_2 > 0$ , 仅依赖于参数  $\delta_{3K}$ , 对于任意的  $M > c_1 K^3 \ln(N/K)$  和每一个  $\delta_{3K} \in (0, 1/3)$ ,  $\Phi$  满足  $3K$  阶的 RIP 的概率至少是  $1 - \exp(-c_2 M \Delta / K^2)$ .

**证明.** 固定  $\delta_{3K} \in (0, 1/3)$ . 从引理 1 和式 (9) 可以得出  $\Phi$  满足式 (3) 对于  $T \subset \{1, 2, \dots, N\}$  的任意  $3K$  候选子集的概率至少为

$$1 - \exp \left\{ -c_0 \left[ \frac{M}{q} \right] + 3K \ln \left( \frac{12}{\delta_{3K}} \right) + \ln(2) + \ln(q) \right\} \geq$$

$$1 - \exp \left\{ \frac{-c_0 M \Delta}{9K^2} + 3K \ln \left( \frac{12}{\delta_{3K}} \right) + \ln(9K^2) - \ln(\Delta) + \ln(2) + c_0 \right\}$$

由于  $T$  的  $3K$  子集共有  $C_N^{3K} \leq (eN/3K)^{3K}$  个选择, 其中  $C$  表示组合运算. 因此, 一致性边界在  $\Phi$  的所有  $3K$  子集上满足  $3K$  阶 RIP 的概率至少为

$$1 - \exp \left\{ \frac{-c_0 M \Delta}{9K^2} + 3K \left[ \ln \left( \frac{N}{3K} \right) + \ln \left( \frac{12}{\delta_{3K}} \right) + 1 \right] + \ln(9K^2) - \ln(\Delta) + \ln(2) + c_0 \right\}$$

下一步,  $c_2 > 0$  和  $c_1 > 27c_3 / (c_0 - 9c_2)$ , 其中  $c_3 = \ln(12/\delta_{3K}) + \ln(2) + c_0 + 4$ . 然后, 对于任意  $M > c_1 K^3 \ln(N/K)$ , 指数项上变元的上界是  $-c_2 M \Delta / K^2$ .  $\square$

假定采用随机数生成器控制测量矩阵的生成, 那么 Gauss 矩阵需要随机数生成器生成  $MN$  个独立元, 通用的 Toeplitz 矩阵只需要  $M + N - 1$  个独立元, 矩阵的其他元素可以通过以下简单的操作实现, 而本文提出的随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵只需要生成  $[(N + M - 1)/\Delta]_{\Delta=2, \dots, 16}$  个独立变量, 可以在保证重建精度的基础上, 降低生成的复杂度.

### 3 模拟实验

本节是随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵的重建实验, 图 1 是一维信号的 CS 重建实验, 信号长度  $N = 257$ , 稀疏度  $K = 30$ , 测量次数  $M = 128$ , 为了简单起见, 不失一般性, 假定稀疏矩阵  $\Psi$  是单位矩阵 (该假定不影响实验结果), 测量矩阵是  $\Delta = 8$  的随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵,  $K$  个非零值系数值是  $\pm 1$ , 其位置是随机分布的, 具有普适性. 图 1(a) 是原始信号  $\mathbf{x}$ , 图 1(b) 是测量矩阵  $\Phi$ , 图 1(c) 是测量向量  $\mathbf{y}$ , 图 1(d) 是非线性重建算法得到的估计  $\hat{\mathbf{x}}$ , 图 1(e) 是原始信号  $\mathbf{x}$  与重建信号  $\hat{\mathbf{x}}$  之间的差值  $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ . 压缩传感的重建算法很多<sup>[17-20]</sup>, 本文的重建算法是子空间追踪算法 (Subspace pursuit, SP)<sup>[20]</sup>. SP 算法是目前求解问题 (2) 的最有效的算

法之一, 无论是在重建可靠性和重建速度方面都有良好的性能表现. 在本文的实验中, 各种矩阵的验证都与此类似, 当重建误差小于某个阈值 (本文选用  $10^{-3}$ ), 表示此次重建成功, 否则重建失败, 此处采用 RT8 矩阵作为一种一般性的说明, 其他测量矩阵与此过程类似, 采用的是同样的方式.

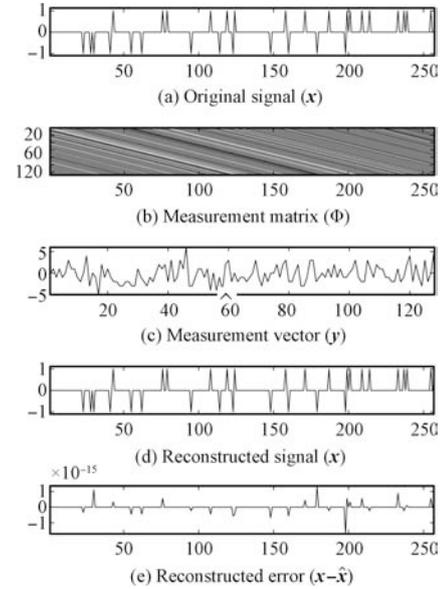


图 1 一维信号 CS 重建

Fig. 1 CS reconstruction for one dimensional signal

比较不同测量矩阵重建效果实验图 2 和图 3 所示, 其中图 2 中信号长度  $N = 257$ , 固定稀疏度  $K = 30$ ,  $K$  个非零系数值是  $\pm 1$ , 测量次数  $M$  从 80 逐渐增加到 140, 测量次数步长为 3. 图 3 的实验中信号长度  $N = 257$ , 固定测量次数  $M = 128$ , 稀疏度  $K$  从 20 逐渐增加到 56, 步长为 2. 对每组参数  $(N, M, K)$  分别测试 1000 次, 计算其重建成功率.

从图 2 和图 3 的实验结果可以看出, 本文提出的改进矩阵 RT2, RT3,  $\dots$ , RT16 在成功恢复百分比方面都优于 Gauss 矩阵和一般 Toeplitz 矩阵, 但是独立元素个数分别只有原来 Toeplitz 矩阵独立元素个数的  $1/2, 1/3, \dots, 1/16$  (其中, GT1 表示一般的 Toeplitz 矩阵, RT2 表示向量  $\mathbf{T}_1$  中有  $[(N + M - 1)/\Delta]_{\Delta=2}$  个元素赋值为随机 Gaussian 值, 其余全为 0, 其他 RT3 等依次类推), 而 RT17~RT20 可以从图 2 和图 3 的结果中明显看出, 重建成功率有一定下降. 如果采用本文提出的随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵应用到无线传感器网络中, 可以在保持准确度的情况下将传感器的使用寿命延长 2~16 倍, 甚至更长的使用时间, 可以有效降低无线传感器网络的成本.

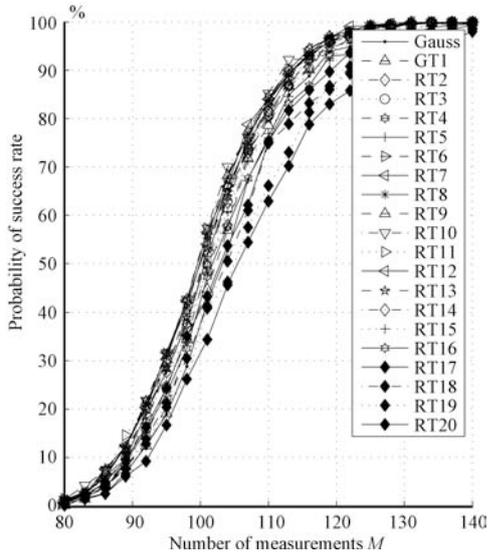


图 2 重建成功概率 vs 测量次数  $M$

Fig. 2 Probability of success rate as a function of number of measurements  $M$

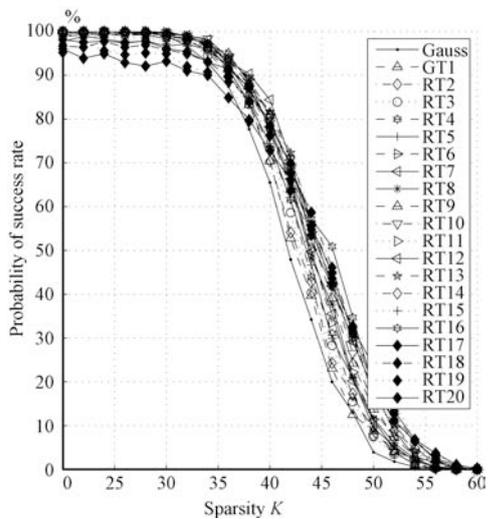


图 3 重建成功概率 vs 稀疏度  $K$

Fig. 3 Probability of success as a function of sparsity level  $K$

从表 1 中可以明显看出, 本文提出的测量矩阵在独立变元和非零元以及相应的存储空间上都有显著下降, 只有原 Toeplitz 矩阵存储空间的  $1/2 \sim 1/16$ , 大大地降低了存储成本. 随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵列向量之间的相干性对于重构性能起着非常重要的作用, 测量矩阵  $\Phi$  的列向量之间的相干性  $\mu$  定义如下:

$$\mu = \sqrt{N} \max_{i \neq j} |\langle \phi_i, \phi_j \rangle| \quad (16)$$

其中,  $\phi_i$  和  $\phi_j$  是测量矩阵  $\Phi$  的第  $i$  列和第  $j$  列.

表 1 不同测量矩阵中独立元素、非零元个数和存储空间比较

Table 1 Comparison of different matrices on the number of independent entries, non-zero entries, and storage

Phase mask	Independent entries storage	Non-zero entries storage
Gauss	$MN$	$MN$
GT1	$M + N - 1$	$MN$
RT2	$\lceil (M + N - 1)/2 \rceil$	$M \lceil N/2 \rceil$
RT3	$\lceil (M + N - 1)/3 \rceil$	$M \lceil N/3 \rceil$
RT4	$\lceil (M + N - 1)/4 \rceil$	$M \lceil N/4 \rceil$
RT5	$\lceil (M + N - 1)/5 \rceil$	$M \lceil N/5 \rceil$
RT6	$\lceil (M + N - 1)/6 \rceil$	$M \lceil N/6 \rceil$
RT7	$\lceil (M + N - 1)/7 \rceil$	$M \lceil N/7 \rceil$
RT8	$\lceil (M + N - 1)/8 \rceil$	$M \lceil N/8 \rceil$
RT9	$\lceil (M + N - 1)/9 \rceil$	$M \lceil N/9 \rceil$
RT10	$\lceil (M + N - 1)/10 \rceil$	$M \lceil N/10 \rceil$
RT11	$\lceil (M + N - 1)/11 \rceil$	$M \lceil N/11 \rceil$
RT12	$\lceil (M + N - 1)/12 \rceil$	$M \lceil N/12 \rceil$
RT13	$\lceil (M + N - 1)/13 \rceil$	$M \lceil N/13 \rceil$
RT14	$\lceil (M + N - 1)/14 \rceil$	$M \lceil N/14 \rceil$
RT15	$\lceil (M + N - 1)/15 \rceil$	$M \lceil N/15 \rceil$
RT16	$\lceil (M + N - 1)/16 \rceil$	$M \lceil N/16 \rceil$

$\mu$  值的大小从某种程度上决定了该测量矩阵捕获所有稀疏信号的能力, 是最差情况下的一种性能表征. 本文测试了两种不同情况: 第一种测试是测量矩阵的列向量未归一化, 即随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵的独立元素值是直接从原 Toeplitz 矩阵的对应位置直接赋值过来; 另一种是随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵的在第一种情况的基础上再将其列向量归一化后的测试. 由于矩阵是随机生成的, 相干性  $\mu$  具有较大的波动性, 因此这里的测试结果是在 1000 次测试结果下记录相干性  $\mu$  平均后的结果. 两种情况下测试结果分别如图 4 和图 5 所示.

从图 4(a) 的结果可以看出, 列向量未归一化的随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵相干性远低于原 Toeplitz 矩阵 (GT1), 但这种情况下对应的图像重建信噪比 (Signal-to-noise ratio, SNR) 有较明显的下降; 图 4(b) 的结果表明, 归一化后的随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵的相干性参数  $\mu$  要大于原 Toeplitz 矩阵的相干性, 随着稀疏间距  $\Delta$  和测量次数  $M$  的增大而逐渐增加.

由于实际应用中各种因素的影响, 往往会引入诸多误差, 图 5 和图 6 是 Lena 图像和 Cameraman 图像在  $\sigma^2 = 0.5$  时, 采用不同的测量矩阵的重建结果. 图像的像素灰度值归一化到  $[0, 1]$  之间, 测量值  $M = 3000$ , 测量矩阵的每一行的  $l_2$  范数为 1, 噪声向量  $\mathbf{e}$  的  $l_2$  范数同样为 1, 测量值  $\mathbf{y} = \Phi \times \mathbf{x} + \mathbf{e} \times \sigma^2$ .

图 5 是 Lena 图像重建结果, 其中, 图 5(a) 是标准 Lena 图像 (图像大小为 64 像素  $\times$  64 像素), 稀疏

基  $\Psi$  为 Daubechies5 小波基, 稀疏度  $K = 868$ , 测量次数  $M = 3000$ , 是原有总像素数目的 73.24%。图 5 (b)~5 (r) 分别是采用 Gauss, GT1 (一般的 Toeplitz), RT2, RT3, ..., RT16 测量矩阵的重建结果。

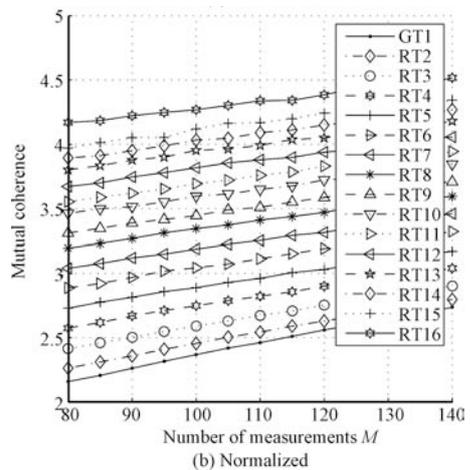
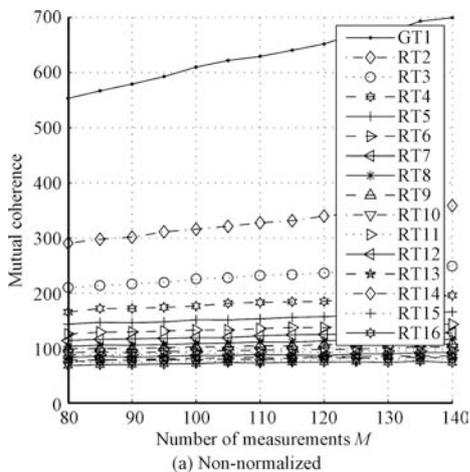


图 4 相干性测试

Fig.4 Mutual coherence tests

图 6 是 Cameraman 图像重建结果, 其中, 图 6 (a) 是标准 Cameraman 图像 (图像大小为 64 像素  $\times$  64 像素), 稀疏基  $\Psi$  为 Daubechies1 小波基, 稀疏度  $K = 734$ , 测量次数  $M = 3000$ , 是原有总像素数目的 73.24%。图 6 (b)~6 (r) 分别是采用 Gauss, GT1 (一般的 Toeplitz), RT2, RT3, ..., RT16 测量矩阵的重建结果。

从两幅图像的重建结果来看, Lena 图像的重建效果要差于 Cameraman 图像, 这是因为 Lena 图像的稀疏度比 Cameraman 图像的稀疏度大得多, 所以同样的测量次数下, Cameraman 图像的效果要好一些。

在上面实验的基础上, 测试本文提出的矩阵在方差  $\sigma^2 = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]$  的随机高斯噪

声情况下的重建效果, 考虑到噪声的随机性, 本文对数据进行一定的预处理, 图像的像素灰度值归一化到  $[0, 1]$  之间, 测量值  $M = 3000$ , 测量矩阵的每一行的  $\ell_2$  范数为 1, 噪声向量  $e$  的  $\ell_2$  范数同样为 1。

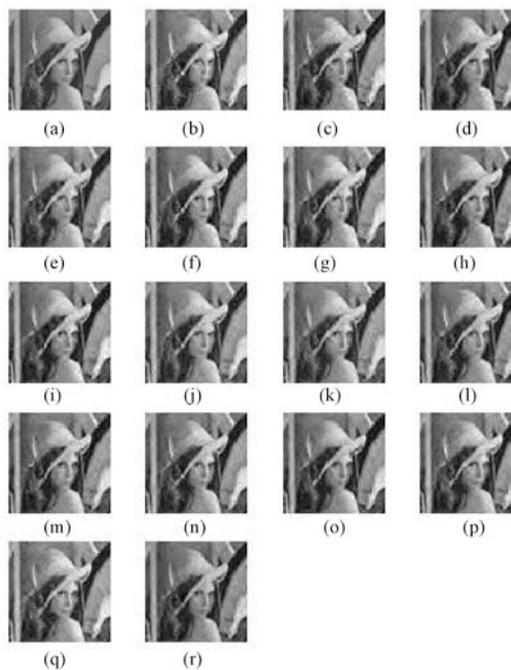


图 5 Lena 图像重建

Fig.5 Reconstruction of Lena image

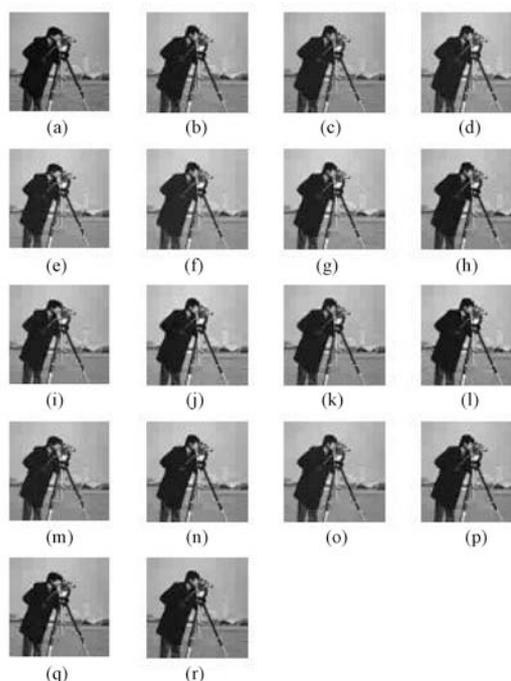


图 6 Cameraman 图像重建

Fig.6 Reconstruction of Cameraman image

考虑到噪声具有一定的随机性, 每一种方差噪

声下测试 10 次, 统计其信噪比的均值和每次重建所花费的时间的均值, 结果如图 7 和图 8 所示. 图 7(a) 和图 7(b) 分别是 Lena 图像在不同方差下图像重建的信噪比和重建时间随噪声方差增加的变化曲线. 图 8(a) 和图 8(b) 分别是 Cameraman 图像在不同方差下图像重建的信噪比和重建时间随噪声方差增加的变化曲线. 从图 7 和图 8 实验结果曲线可以看出, 和现有的 Gauss、Toeplitz 测量矩阵相比, 本文提出的随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵在保证重建质量的情况下, 在编码和存储、实现成本以及提高传感器的使用寿命上有着较大的优势. 此外, 随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵在重建时间上大大下降, 这是因为在重建算法中, 需要进行多次  $A \times x$  和  $A^T \times y$  的乘法, 本文提出的测量矩阵中有大量的零元素, 导致乘法运算大大下降, 比 Gauss 和原 Toeplitz 矩阵的重建时间节约了 60%~85%, 甚至更多. 对于 CS 理论走向实用具有重要的意义.

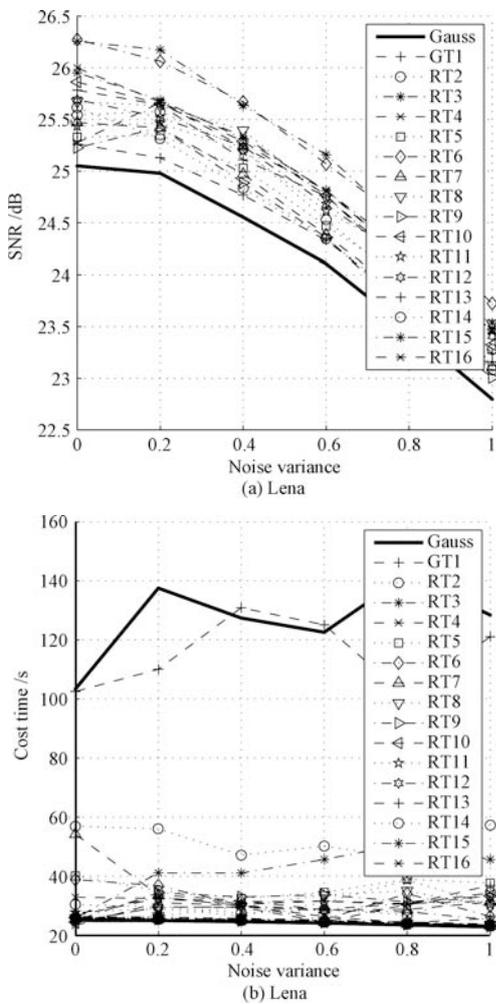


图 7 不同噪声方差下 Lena 图像重建  
Fig. 7 Lena image reconstruction versus different noise variances

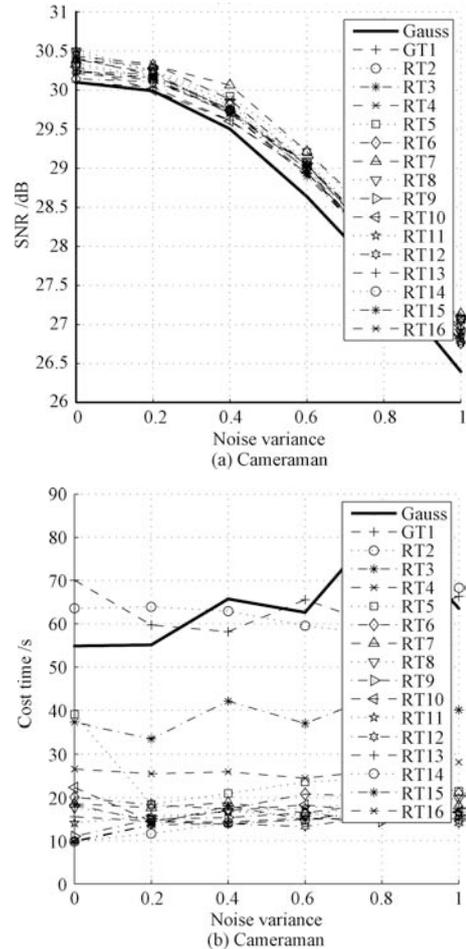


图 8 不同噪声方差下 Cameraman 图像重建  
Fig. 8 Cameraman image reconstruction versus different noise variances

### 4 结论

测量矩阵作为压缩传感理论三个主要研究内容之一, 是将可压缩传感从理论推向实际应用的一个关键因素. 本文提出的随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵在物理上更容易实现、存储成本低, 在无线传感网络等领域方面可以有效地延长无线传感网络的使用寿命, 降低无线传感网络的维持成本. 可以在保证重建精度的同时, 大大地节约后端 CS 重建所需的时间, 对于 CS 理论的实际应用具有重要意义.

### References

- 1 Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306
- 2 Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489–509
- 3 Candès E J, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, **59**(8): 1207–1223

- 4 Bajwa W U, Haupt J D, Raz G M, Wright S J, Nowak R D. Toeplitz-structured compressed sensing matrices. In: Proceedings of the 14th IEEE/SP Workshop on Statistical Signal Processing. Madison, USA: IEEE, 2007. 294–298
- 5 Rauhut H. Circulant and Toeplitz matrices in compressed sensing. In: Proceedings of the Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations. Saint Malo, France: SPARS/INRIA, 2009. 1–7
- 6 Haupt J, Bajwa W U, Raz G, Nowak R. Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(11): 5862–5875
- 7 DeVore R A. Deterministic constructions of compressed sensing matrices. *Journal of Complexity*, 2007, **23**(4–6): 918–925
- 8 Calderbank R, Howard S, Jafarpour S. Construction of a large class of deterministic sensing matrices that satisfy a statistical isometry property. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 358–374
- 9 Wang K, Liu Y L, Zhang J X. RIP analysis for quasi-Toeplitz CS matrices. In: Proceedings of the International Conference on Future Information Technology and Management Engineering. Changzhou, China: IEEE, 2010. 223–226
- 10 Zhang G S, Jiao S H, Xu X L. Compressed sensing and reconstruction with semi-Hadamard matrices. In: Proceedings of the 2nd International Conference on Signal Processing Systems. Dalian, China: IEEE, 2010. 194–197
- 11 Yu L, Barbot J P, Zheng G, Sun H. Toeplitz-structured chaotic sensing matrix for compressive sensing. In: Proceedings of the 7th International Symposium on Communication Systems Networks and Digital Signal Processing. Newcastle upon Tyne, UK: IEEE, 2010. 229–233
- 12 He Z X, Ogawa T, Haseyama M. The simplest measurement matrix for compressed sensing of natural images. In: Proceedings of the 17th IEEE International Conference on Image Processing. Hong Kong, China: IEEE, 2010. 4301–4304
- 13 Li X B, Zhao R Z, Hu S H. Blocked polynomial deterministic matrix for compressed sensing. In: Proceedings of the 6th International Conference on Wireless Communications Networking and Mobile Computing. Chengdu, China: IEEE, 2010. 23–25
- 14 Fang Hong, Zhang Quan-Bing, Wei Sui. Method of image reconstruction based on very sparse random projection. *Computer Engineering and Applications*, 2007, **43**(22): 25–27 (方红, 章权兵, 韦穗. 基于非常稀疏随机投影的图像重建方法. *计算机工程与应用*, 2007, **43**(22): 25–27)
- 15 Baraniuk R, Davenport M, DeVore R A, Wakin M B. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices. *Constructive Approximation*, 2008, **28**(3): 253–263
- 16 Hajnal A, Szemerédi E. Proof of a conjecture of P. Erdős. *Combinatorial Theory and Its Application*. Amsterdam: North-Holland, 1970. 601–623
- 17 Li Shu-Tao, Wei Dan. A survey on compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(11): 1369–1377 (李树涛, 魏丹. 压缩传感综述. *自动化学报*, 2009, **35**(11): 1369–1377)
- 18 Yang Hai-Rong, Fang Hong, Zhang Cheng, Wei Sui. Iterative hard thresholding algorithm based on backtracking. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(3): 276–282 (杨海蓉, 方红, 张成, 韦穗. 基于回溯的迭代硬阈值算法. *自动化学报*, 2011, **37**(3): 276–282)
- 19 Lian Qiu-Sheng, Chen Shu-Zhen. Image reconstruction for compressed sensing based on the combined sparse image representation. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 385–391 (练秋生, 陈书贞. 基于混合基稀疏图像表示的压缩传感图像重构. *自动化学报*, 2010, **36**(3): 385–391)
- 20 Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(5): 2230–2249



张成 安徽大学电子科学与技术学院博士研究生. 主要研究方向为信号处理.  
E-mail: question1996@163.com  
(ZHANG Cheng Ph. D. candidate at the School of Electronic Science and Technology, Anhui University. His main research interest is signal processing.)



杨海蓉 安徽大学电子科学与技术学院博士研究生. 主要研究方向为信号处理. 本文通信作者.  
E-mail: murong81@163.com  
(YANG Hai-Rong Ph. D. candidate at the School of Electronic Science and Technology, Anhui University. Her main research interest is signal processing. Corresponding author of this paper.)



韦穗 教授. 主要研究方向为计算机视觉, 图像处理, 全息显示.  
E-mail: swei@ahu.edu.cn  
(WEI Sui Professor. Her research interest covers computer vision, image processing, and holography display.)