

# 基于倒转方法的欠驱动 Acrobot 系统稳定控制

张安彩<sup>1,2</sup> 赖旭芝<sup>1,2</sup> 余锦华<sup>3</sup> 吴敏<sup>1,2</sup>

**摘要** 针对欠驱动两杆体操机器人 Acrobot, 提出一种新的稳定控制方法. 首先, 通过利用一个虚拟摩擦力矩为 Acrobot 构造一条下摆轨迹; 然后, 运用倒转的思想为它设计出一条由垂直向下位置到垂直向上位置的期望运动轨迹, 并以此将系统的稳定控制问题转化为跟踪控制问题; 最后, 基于最优控制理论来设计跟踪控制器, 使 Acrobot 能够沿期望轨迹渐近稳定在垂直向上位置处. 仿真结果验证了所提方法的有效性.

**关键词** 欠驱动 Acrobot, 稳定控制, 李雅普诺夫函数, 倒转, 黎卡提方程

**引用格式** 张安彩, 赖旭芝, 余锦华, 吴敏. 基于倒转方法的欠驱动 Acrobot 系统稳定控制. 自动化学报, 2012, 38(8): 1263–1269

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2012.01263

## Stabilization Control of Underactuated Acrobot Based on Inverse Method

ZHANG An-Cai<sup>1,2</sup> LAI Xu-Zhi<sup>1,2</sup> SHE Jin-Hua<sup>3</sup> WU Min<sup>1,2</sup>

**Abstract** This paper presents a new method of stabilizing an underactuated two-link gymnast robot, Acrobot. First, an artificial friction torque is used to construct a falling-down motion trajectory. Next, we design a reference motion trajectory for the Acrobot from the straight-down position to the straight-up position based on an inverse idea. This transforms the problem of stabilizing the Acrobot into a tracking control problem. Finally, we use the knowledge of optimal control to design a tracking controller, which enables the Acrobot to be asymptotically stabilized at the straight-up position along the desired trajectory. Simulation results demonstrate the validity of our method.

**Key words** Underactuated Acrobot, stabilization control, Lyapunov function, inverse, Riccati equation

**Citation** Zhang An-Cai, Lai Xu-Zhi, She Jin-Hua, Wu Min. Stabilization control of underactuated acrobot based on inverse method. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(8): 1263–1269

对于一个机械系统而言, 如果系统的控制输入个数等于自由度个数, 则称这一系统为全驱动机械系统. 相应地, 当系统的控制输入个数少于自由度个数时, 我们称之为欠驱动机械系统. 与全驱动系统相比, 欠驱动系统由于减少了驱动器的个数, 使得它不但能够节约成本, 降低能量消耗, 而且还能增加系统的灵活度. 因此, 这类系统在工业控制领域具有很好的应用前景. 然而, 驱动器的减少同时也大大增加了欠驱动系统的控制设计难度, 很多适用于全驱动系统的控制方法无法直接推广到这类系统中. 目前, 欠

驱动系统控制策略的研究是控制领域一个极具挑战性的课题, 吸引了越来越多的学者投身到这一研究领域<sup>[1–3]</sup>.

欠驱动两杆体操机器人 Acrobot<sup>[4]</sup> 是近年来讨论的比较多一个欠驱动系统. 对于这个欠驱动机器人, 学者们通常研究如何将它从垂直向下位置处摇起并最终稳定在垂直向上位置处. 然而, 要实现这一控制目标并非易事, 这主要是因为 Acrobot 是一个复杂的非线性系统, 状态变量间的耦合性非常强, 而且二阶非完整约束<sup>[5]</sup> 使得它不能够严密反馈线性化. 为简化控制律设计, 目前比较常用的是分区切换控制策略. 这种策略首先将 Acrobot 的整个运动空间划分为摇起区和吸引区, 然后在这两个子区域内分别设计摇起控制器和平衡控制器, 通过控制器的切换来实现 Acrobot 的稳定控制. 基于这种策略的稳定控制方法包括部分反馈线性化法<sup>[6]</sup>、能量控制法<sup>[7]</sup>、线性二次型调节法 (Linear quadratic regulator, LQR)<sup>[6]</sup>、模糊控制法<sup>[8]</sup> 等.

虽然分区切换控制策略能够有效地实现 Acrobot 的稳定控制目标, 但是有时难于保证控制系统的全局稳定性. 为解决这一问题, 一方面, 学者们对这种控制策略的全局稳定性进行了深入的研究, 提

收稿日期 2011-12-02 录用日期 2012-03-21  
Manuscript received December 2, 2011; accepted March 21, 2012

国家自然科学基金 (61074112) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61074112)

本文责任编辑 侯增广

Recommended by Associate Editor HOU Zeng-Guang

1. 中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083, 中国 2. 先进控制与智能自动化湖南省工程实验室 长沙 410083, 中国 3. 东京工科大学计算机科学学部 东京 192-0982, 日本

1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, P.R. China 2. Hunan Engineering Laboratory for Advanced Control and Intelligent Automation, Changsha 410083, P.R. China 3. School of Computer Science, Tokyo University of Technology, Tokyo 192-0982, Japan

出了一些有效的理论分析方法, 如文献 [9] 中的非光滑李雅普诺夫函数分析法. 另一方面, 在用了一个控制器来实现 Acrobot 的稳定控制上, 学者们也做了一些探索. 如文献 [10] 提出了一种基于商值的控制方法, 但此方法需要 Acrobot 的初始位置位于垂直向上位置周围, 虽然通过选择合适的参数可以使初始位置扩展到垂直向下位置处, 但作者仅仅通过仿真进行了说明, 并没有给出严格的证明. 另外, 文献 [11] 提出了一种 Backstepping 的控制方法. 由于这一方法需要一个非线性方程的显性解, 而这对于 Acrobot 来说是很复杂的, 从而使此法的设计过程相当复杂繁琐.

基于以上研究背景, 本文提出了一种基于倒转思想的 Acrobot 系统稳定控制方法. 首先, 利用 Acrobot 受重力作用这一特性, 通过引入一个虚拟摩擦力矩为它构造出一条下摆轨迹. 然后, 运用倒转的思想为它设计出一条由垂直向下位置到垂直向上位置的期望运动轨迹. 最后, 运用最优控制理论来设计跟踪控制器, 使 Acrobot 能够沿期望轨迹渐近稳定在垂直向上位置处. 与应用分区切换策略的稳定控制方法相比, 本文所提方法无需对 Acrobot 的运动空间进行分区, 仅用一个控制器便可实现它的摇起和平衡控制, 这简化了控制系统设计, 同时避免了分区控制时难于在平衡区快速而平滑的捕获 Acrobot 的问题. 另外, 与非线性 Backstepping 法相比, 此法的设计过程更加简洁, 求解过程也更加方便, 借助一般的计算工具 (如 Matlab) 便能完成. 更值得一提的是, 此方法能够对 Acrobot 的整个稳定运动过程及稳定时间作出准确预测, 这也是其他稳定控制方法所无法比拟的.

### 1 动力学模型

欠驱动两杆体操机器人 Acrobot 的结构如图 1 所示, 其中  $m_i, J_i$  分别为第  $i$  杆的质量和转动惯量 ( $i = 1, 2$ ),  $\tau_2$  为作用在第 2 关节上的外部力矩,  $g$  为重力加速度. 若记  $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$ , 则 Acrobot 系统的动力学方程为<sup>[4]</sup>

$$M(q_2)\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$M(q_2) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2 & a_2 + a_3 \cos q_2 \\ a_2 + a_3 \cos q_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -a_3 \dot{q}_2 \sin q_2 & -a_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ a_3 \dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_4 \sin q_1 - a_5 \sin(q_1 + q_2) \\ -a_5 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

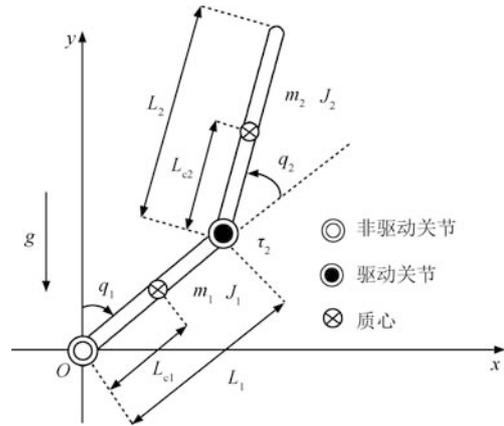


图 1 Acrobot  
Fig. 1 Acrobot

$$\begin{aligned} a_1 &= m_1 L_{c1}^2 + m_2 L_1^2 + J_1 \\ a_2 &= m_2 L_{c2}^2 + J_2 \\ a_3 &= m_2 L_1 L_{c2} \\ a_4 &= (m_1 L_{c1} + m_2 L_1)g \\ a_5 &= m_2 L_{c2}g \end{aligned}$$

Acrobot 系统的总能量为

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(q_2) \dot{\mathbf{q}} + P(\mathbf{q}) \quad (2)$$

其中,  $P(\mathbf{q}) = a_4 \cos q_1 + a_5 \cos(q_1 + q_2)$  为系统的总势能. 由式 (1) 不难验证得:

$$\dot{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{q}_2 \tau_2 \quad (3)$$

记  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ , 则系统 (1) 的状态空间形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\tau_2 \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = -M^{-1}(q_2) [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})] \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = M^{-1}(q_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

本文的控制目标是将 Acrobot 从垂直向下位置  $\mathbf{x}_d = [\pi, 0, 0, 0]^T$  处摇起, 并将其最终稳定在垂直向上的位置  $\mathbf{x}_u = [0, 0, 0, 0]^T$  处. 下面具体论述如何应用轨迹跟踪的方法实现这一目标.

## 2 运动轨迹规划

本节讨论 Acrobot 由初始点  $\mathbf{x}_d$  到目标点  $\mathbf{x}_u$  的运动规划问题.

### 2.1 下摆轨迹设计

**定理 1.** 若系统 (4) 的控制输入为

$$\tau_2 = -K_v x_4 \quad (8)$$

且其初始位置为  $\mathbf{x}_0 = [\epsilon, 0, 0, 0]^T$ , 那么, 闭环系统将最终渐近稳定于  $\mathbf{x}_d$ , 其中  $K_v$  是一个正常数,  $\epsilon > 0$  为一个非常小的数.

**证明.** 将式 (8) 代入式 (4) 中, 得:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - K_v \mathbf{g}(\mathbf{x}) x_4 = \mathbf{W}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

为系统 (9) 选取如下的李雅普诺夫函数:

$$V(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) - E_d \geq 0 \quad (10)$$

其中,  $E(\mathbf{x}) = E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $E_d = E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_d} = -(a_4 + a_5)$ . 由式 (3) 和式 (8), 可得:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -K_v x_4^2 \leq 0 \quad (11)$$

令  $\dot{V}(\mathbf{x}) \equiv 0$  得  $x_4 \equiv 0$ . 由式 (3) 和式 (4) 可知:  $E(\mathbf{x}) = E^*$  和  $x_2 = x_2^*$ , 它们均为常数. 进而联立式 (2) 和式 (4) 的第四个方程式得:

$$T_1 \cos x_1 + T_2 \sin x_1 = T_3 \quad (12)$$

其中,  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 均为常数, 这表明  $x_1 = x_1^*$  也是一个常数, 故有  $x_3 = 0$ . 那么, 进一步由式 (9) 得  $\sin x_1^* = 0$ ,  $\sin x_2^* = 0$ . 不难解得:

$$[x_1^*, x_2^*, 0, 0]^T \in \Omega = \{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_{1e}, \mathbf{x}_{2e}\}$$

其中,  $\mathbf{x}_{1e} = [0, \pi, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{x}_{2e} = [\pi, \pi, 0, 0]^T$ . 因此, 由 LaSalle 不变原理<sup>[12]</sup> 知系统 (9) 将最终趋近于  $\Omega$  的某个子集. 易于验证,  $\Omega$  为系统闭环系统 (9) 的平衡点集. 将式 (9) 分别在平衡点  $\mathbf{x}_u$ ,  $\mathbf{x}_d$ ,  $\mathbf{x}_{1e}$  和  $\mathbf{x}_{2e}$  处线性化, 并运用 Hurwitz 判据验证得  $\mathbf{x}_d$  是一个稳定的平衡点, 而  $\mathbf{x}_{1e}$ ,  $\mathbf{x}_{2e}$  和  $\mathbf{x}_u$  均为不稳定的平衡点. 所以, 闭环系统 (9) 将最终渐近稳定于  $\mathbf{x}_d$ .  $\square$

对 Acrobot 定义一个过渡过程时间  $t_d$ , 使得当  $t > t_d$  时满足如下稳态条件:

$$\begin{cases} |\Xi(q_1, 2\pi) - \pi| < 0.05\pi, |\dot{q}_1| < 0.05 \\ |\Xi(q_2, 2\pi)| < 0.05, |\dot{q}_2| < 0.05 \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $\Xi(q_i, 2\pi) = \min(\kappa(q_i), 2\pi - \kappa(q_i))$ ,  $\kappa(q_i) = \text{mod}(q_i, 2\pi)$  为  $q_i$  除以  $2\pi$  后的正余数. 注意到  $\mathbf{x}_0$  充分接近  $\mathbf{x}_u$ , 且  $\mathbf{x}(t_d)$  位于  $\mathbf{x}_d$  的小邻域内, 故可取

Acrobot 由  $\mathbf{x}_0$  到  $\mathbf{x}(t_d)$  的这段轨迹作为它的一条下摆轨迹, 并将此轨迹记为

$$\mathbf{x}_F(t) = [\mathbf{q}_F^T(t), \dot{\mathbf{q}}_F^T(t)]^T, t \in [0, t_d] \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{x}_F(0) = \mathbf{x}_0$ , 且与轨迹  $\mathbf{x}_F(t)$  相对应的控制力矩为

$$\tau_{2F}(t) = -K_v \dot{q}_{2F}(t), t \in [0, t_d] \quad (15)$$

**注 1.** 由定理 1 看到, 控制力矩 (8) 在 Acrobot 下摆过程中不断吸收能量, 使其最终稳定在能量最小的垂直向下位置  $\mathbf{x}_d$  处. 从这个角度来讲, 可称力矩 (8) 为一个虚拟的摩擦力矩.

### 2.2 期望轨迹设计

在得到 Acrobot 的一条下摆轨迹后, 我们运用倒转的思想为它构造如下一条期望运动轨迹:

$$\mathbf{x}_W(t) = \begin{cases} [\mathbf{q}_F^T(t_d - t), -\dot{\mathbf{q}}_F^T(t_d - t)]^T, & t \in [0, t_d] \\ 0, & t \in (t_d, t_d + \delta] \end{cases}$$

并定义与其对应的期望控制力矩为

$$\tau_{2W}(t) = \begin{cases} \tau_{2F}(t_d - t), & t \in [0, t_d] \\ 0, & t \in (t_d, t_d + \delta] \end{cases}$$

其中  $\delta > 0$  为一个常数. 显然,  $\mathbf{x}_W(t)$  在  $t \in [0, t_d]$  上的部分为下摆轨迹  $\mathbf{x}_F(t)$  的倒转轨迹, 而在  $(t_d, t_d + \delta]$  上的部分为 Acrobot 的一条平衡轨迹. 因为  $\mathbf{x}_F(t)$  满足方程 (1),  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = -C(\mathbf{q}, -\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ , 所以由方程 (1) 易于验证  $\mathbf{x}_W(t)$  在  $t \in [0, t_d + \delta]$  上满足:

$$M(q_{2W})\ddot{\mathbf{q}}_W + C(\mathbf{q}_W, \dot{\mathbf{q}}_W)\dot{\mathbf{q}}_W + \mathbf{G}(\mathbf{q}_W) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{2W} \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{q}_W = [q_{1W}, q_{2W}]^T$ ,  $\mathbf{x}_W = [\mathbf{q}_W^T, \dot{\mathbf{q}}_W^T]^T$ .

从  $\mathbf{x}_W(t)$  的构造过程不难发现, 它是 Acrobot 的一条始于  $\mathbf{x}_d$  的某个小邻域并终于  $\mathbf{x}_u$  的运动轨迹. 对于从初始位置  $\mathbf{x}_d$  出发的 Acrobot, 倘若能够设计一个跟踪控制器, 使它在  $t \in [0, t_d + \delta]$  上跟踪  $\mathbf{x}_W(t)$ , 那么, 这一机器人从  $\mathbf{x}_d$  被摇起并最终被稳定在  $\mathbf{x}_u$  的稳定控制目标便可实现. 这样的话, Acrobot 的稳定控制问题就转化为期望轨迹的跟踪控制问题.

## 3 跟踪控制器设计

本节基于最优控制知识来设计跟踪控制器, 使 Acrobot 沿期望轨迹  $\mathbf{x}_W(t)$  实现渐近稳定控制. 若记  $\Delta \mathbf{q} = [\Delta q_1, \Delta q_2]^T = \mathbf{q} - \mathbf{q}_W$ ,  $\tau_{2E} = \tau_2 - \tau_{2W}$ ,  $D(\cdot) = M^{-1}(\cdot)$ , 则将式 (1) 和式 (16) 两式相减得如下的误差方程:

$$\begin{bmatrix} \Delta \ddot{q}_1 \\ \Delta \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = -D(q_{2W} + \Delta q_2) \times \begin{bmatrix} H_1(\Delta q, \Delta \dot{q}) \\ H_2(\Delta q, \Delta \dot{q}) - \tau_{2E} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} H_1 = & -a_3(\Delta \dot{q}_2 + \dot{q}_{2W}) \times \\ & (2\Delta \dot{q}_1 + \Delta \dot{q}_2) \varphi_1(\Delta q_2) + \\ & \Delta \dot{q}_2(2\dot{q}_{1W} + \dot{q}_{2W}) \varphi_1(\Delta q_2) + \\ & a_3(2\ddot{q}_{1W} + \ddot{q}_{2W}) \varphi_2(\Delta q_2) - \\ & a_3\dot{q}_{2W}(2\dot{q}_{1W} + \dot{q}_{2W}) \varphi_3(\Delta q_2) - \\ & a_4\varphi_3(\Delta q_1) - a_5\varphi_4(\Delta q_1 + \Delta q_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 = & a_3\Delta \dot{q}_1(\Delta \dot{q}_1 + 2\dot{q}_{1W}) \varphi_1(\Delta q_2) + \\ & a_3\ddot{q}_{1W} \varphi_2(\Delta q_2) - a_3\dot{q}_{1W}^2 \varphi_3(\Delta q_2) - \\ & a_5\varphi_4(\Delta q_1 + \Delta q_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \sin(\xi + q_{2W}) \\ \varphi_2(\xi) &= [\cos(\xi + q_{2W}) - \cos q_{2W}] \\ \varphi_3(\xi) &= [\sin(\xi + q_{2W}) - \sin q_{2W}] \\ \varphi_4(\xi) &= [\sin(\xi + q_{1W} + q_{2W}) - \sin(q_{1W} + q_{2W})] \end{aligned}$$

上式中  $\xi$  表示任一函数变量。不难看出, 误差方程 (17) 是一个比 Acrobot 系统本身还要复杂的非线性方程, 我们很难为其设计一个非线性控制器将误差稳定在零点处。本文采用线性化方法来为误差方程设计稳定控制器。记  $e = [\Delta q^T, \Delta \dot{q}^T]^T$ , 并将式 (17) 在  $e = 0$  处线性化得:

$$\dot{e} = A(t)e + B(t)\tau_{2E} \quad (18)$$

其中

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ D(q_{2W})E(t) & -2D(q_{2W})C(q_W, \dot{q}_W) \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ D(q_{2W}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$E(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(q_W) & \mu_2(q_W) + \mu_3(q_W, \dot{q}_W, \ddot{q}_W) \\ \mu_2(q_W) & \mu_2(q_W) + \mu_4(q_W, \dot{q}_W, \ddot{q}_W) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mu_1(q_W) = a_4 \sin q_{1W} + \mu_2(q_W) \\ \mu_2(q_W) = a_5 \cos(q_{1W} + q_{2W}) \\ \mu_3(q_W, \dot{q}_W, \ddot{q}_W) = a_3(2\ddot{q}_{1W} + \ddot{q}_{2W}) \sin q_{2W} + \\ \quad a_3\dot{q}_{2W}(2\dot{q}_{1W} + \dot{q}_{2W}) \cos q_{2W} \\ \mu_4(q_W, \dot{q}_W, \ddot{q}_W) = a_3(\ddot{q}_{1W} \sin q_{2W} - \dot{q}_{1W}^2 \cos q_{2W}) \end{cases}$$

且  $0_{i \times j}$  表示  $i \times j$  阶零矩阵,  $I_2$  表示二阶单位矩阵。由于在期望运动轨迹  $x_W(t)$  中仅有分量  $q_{1W}(t)$  在  $t = t_d$  处存在一个小的阶跃, 其余分量均是连续的, 故由上述表达式可知  $B(t)$  在  $[0, t_d + \delta]$  上是连续的, 而矩阵  $A(t)$  也会在  $t = t_d$  处存在一个小的阶跃。假设  $[A(t), B(t)]$  在  $[0, t_d]$  上是能控的, 对于正定矩阵  $Q \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$  及正常数  $R \in \mathbf{R}$ , 设计如下的最优控制律:

$$\tau_{2E} = -K(t)e, \quad K(t) = R^{-1}B^T(t)P(t) \quad (19)$$

其中,  $P(t) = P^T(t) > 0$  为时变黎卡提矩阵方程

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - \\ P(t)B(t)R^{-1}B^T(t)P(t) + Q = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

的正定解。由最优控制的知识可知误差  $e(t)$  在  $[0, t_d]$  上会收敛到零。现将 Acrobot 在  $(t_d, t_d + \delta)$  上的运动看作是以  $x_W(t_d)$  为初始条件的运动。注意到  $A(t), B(t)$  在  $(t_d, t_d + \delta)$  上是时不变的, 且在此区间上有  $e(t) = x(t)$ , 另外,  $x_W(t_d) = [\epsilon, 0, 0, 0]^T$  是一个与  $x_u$  充分接近的点, 若  $[A(t), B(t)]$  在  $(t_d, t_d + \delta)$  上也是完全能控的, 则同样应用最优控制律 (19) 可使  $e(t) = x(t)$  最终稳定在  $x_u$  处。综上可知, 控制律

$$\tau_2 = \tau_{2W} + \tau_{2E} \quad (21)$$

可使 Acrobot 从  $x_d$  扬起并最终稳定在  $x_u$  处。整个稳定控制系统的结构图如图 2 所示。

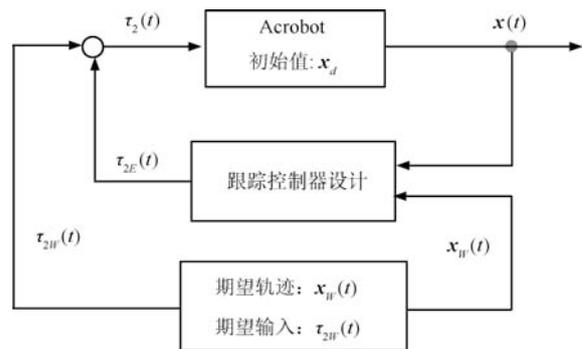


图 2 Acrobot 稳定控制系统结构图  
Fig. 2 Configuration of the stabilizing control system for Acrobot

### 4 仿真研究

在 Matlab 环境下, 运用 Simulink 搭建系统模型进行仿真研究, 以验证上述方法的有效性。Acrobot 的机械参数如表 1 所示。此外, 取系统的仿真步长为  $h = 0.001s$ , 并取定理 1 中的初始条件为  $x_0 = [0.01, 0, 0, 0]^T$ 。注意到虚拟摩擦力矩 (8) 仅与参数  $K_v$  有关, 故下摆过渡过程时间  $t_d$  只由这个参数决定。通过仿真研究发现, 当  $K_v$  较大或者较小时,  $t_d$

表 1 欠驱动 Acrobot 的机械参数  
Table 1 Physical parameters of underactuated Acrobot

$m_1$ (kg)	$L_1$ (m)	$L_{c1}$ (m)	$J_1$ (kg · m <sup>2</sup> )	$m_2$ (kg)	$L_2$ (m)	$L_{c2}$ (m)	$J_2$ (kg · m <sup>2</sup> )
0.105	0.109	0.073	$1.0396 \times 10^{-4}$	0.080	0.215	0.1075	$3.0817 \times 10^{-4}$

均比较大 (即 Acrobot 的下摆收敛时间较长), 但存在一个优化的控制参数  $K_v = 0.00182$  使得  $t_d$  取到最小值 4s. 为使 Acrobot 快速稳定在  $\mathbf{x}_d$  处, 以获得一条用时最少的期望轨迹, 从而使 Acrobot 实现从垂直向下位置到垂直向上位置的最优时间运动, 我们取  $K_v = 0.00182$  并只针对此种情形进行仿真. 取期望轨迹中平衡阶段的时间  $\delta$  为 2s, 则在上述条件下 Acrobot 的整体期望运动轨迹  $\mathbf{x}_W(t)$  及期望控制力矩  $\tau_{2W}(t)$  的仿真图如图 3 所示. 显然, 期望的运动轨迹为一条连续的轨迹.

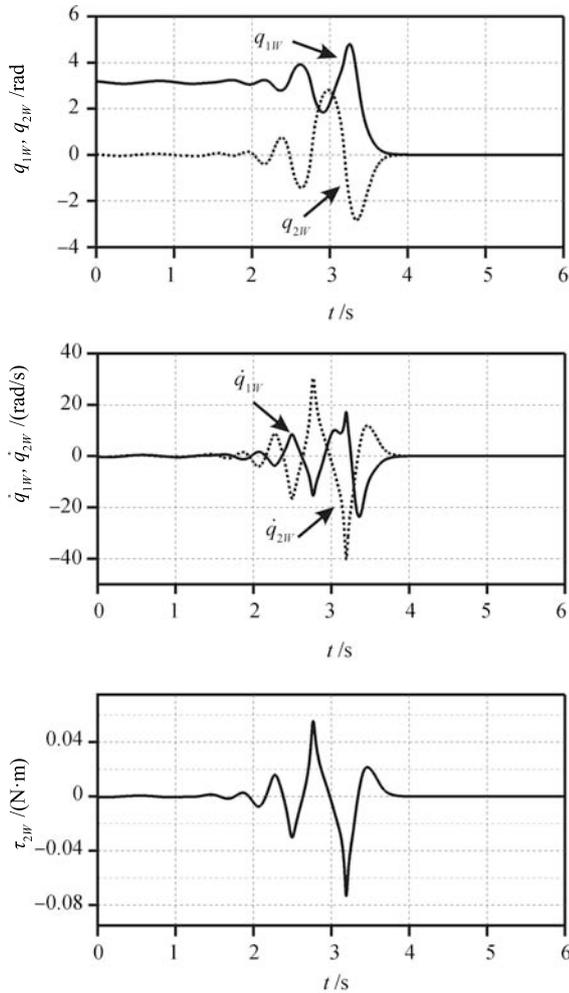


图 3 Acrobot 的期望运动轨迹

Fig. 3 The desired motion trajectory of Acrobot

鉴于目前缺乏一种有效求解时变黎卡提方程 (20) 的工具, 为得到优化反馈控制增益, 这里采用一

种简化处理的方法. 取

$$A(t) = A(kh), B(t) = B(kh), \forall t \in [kh, (k+1)h]$$

并在  $t \in [kh, (k+1)h]$  上将  $P(t)$  看作常量 (即取  $\dot{P}(t) = 0$ ), 其中

$$k \in \mathbb{K} = \{0, 1, 2, \dots, 5999\}$$

记

$$C(kh) = [B(kh), A(kh)B(kh), A^2(kh)B(kh), A^3(kh)B(kh)]$$

运用 Matlab 函数 rank 验证可得:

$$\text{rank}[C(kh)] = 4, k \in \mathbb{K}$$

故  $[A(t), B(t)]$  在采样点处均是完全能控的. 取式 (20) 中的控制参数为

$$Q = 0.015I_4, R = 8 \times 10^3$$

其中,  $I_4$  为四阶单位矩阵, 然后运用 Matlab 函数 LQR 计算可得式 (19) 中的反馈控制增益

$$\mathbf{K}(t) = [K_1(t), K_2(t), K_3(t), K_4(t)]$$

如图 4 所示. 注意到在  $t = t_1 = 3.419s$  处, 增益  $\mathbf{K}(t)$  会发生一个小突变, 这主要是因为  $\det[C(t_1)]$  太小 (可由 Matlab 函数 Det 计算得到), 即  $[A(t_1), B(t_1)]$  接近不能控所致.

图 5 给出了在初始状态  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_d$  下的系统仿真图. 由仿真结果可以看出, 在控制器 (21) 的作用下, Acrobot 能够较好地跟踪期望运动轨迹, 从而实现了从  $\mathbf{x}_d$  处摇起并最终稳定在  $\mathbf{x}_u$  处的控制目标. 为进一步说明所提控制算法在实际应用中的可行性, 我们在仿真实验中将参数摄动、外界扰动及关节摩擦力等因素考虑在内. 令  $m_1, m_2$  和  $J_2$  大于标称值 5%,  $L_{c1}, L_{c2}$  和  $J_1$  小于标称值 5%, 并假设角速度  $\dot{q}$  的测量值上存在峰值为  $\pm 0.6$  的外部白噪声扰动, 此外, 还设在 Acrobot 的第一、二关节处分别存在粘滞摩擦力

$$f_1 = -0.01\dot{q}_1, f_2 = -0.0025\dot{q}_2$$

在上述条件下系统的仿真结果如图 6 所示. 结果显示, 虽然 Acrobot 的运动轨迹会发生少许改变, 但其稳定控制目标仍能较好的实现, 这说明基于倒转的稳定控制方法在这种情形下仍然是有效的.

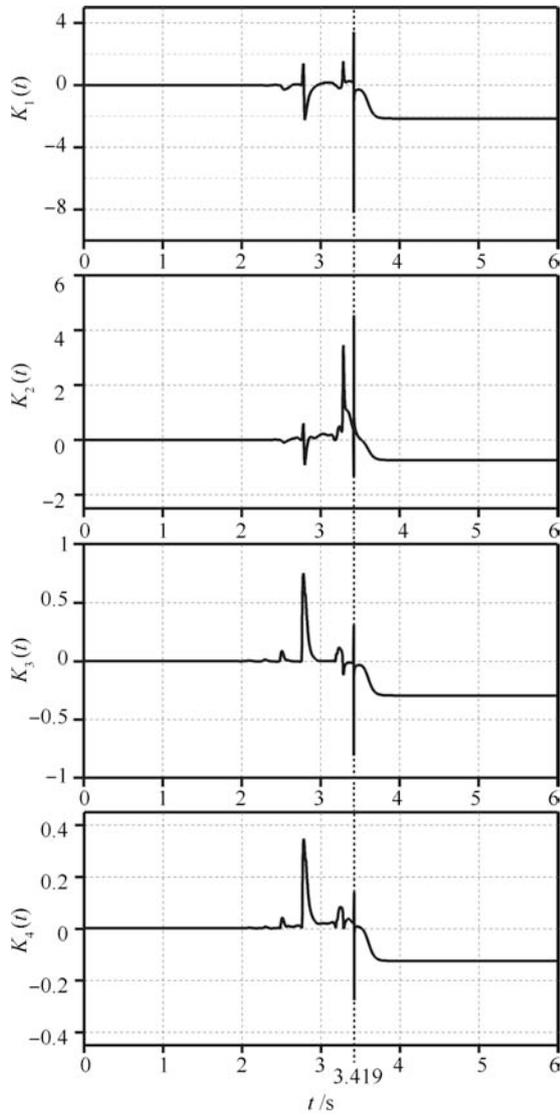


图 4 式 (19) 中的状态反馈增益  $\mathbf{K}(t)$

Fig. 4 The state feedback gain  $\mathbf{K}(t)$  in (19)

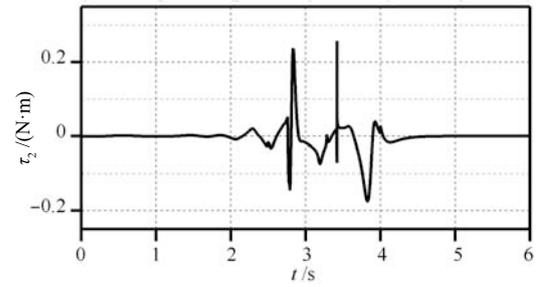
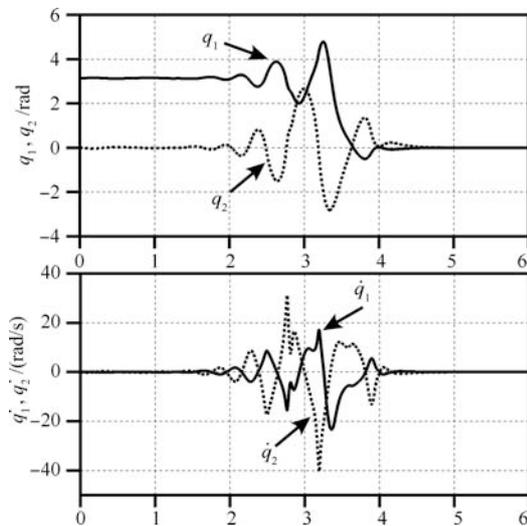


图 5 基于倒转方法的 Acrobot 稳定控制仿真结果  
Fig. 5 Simulations for the stabilization of Acrobot based on rewinding approach

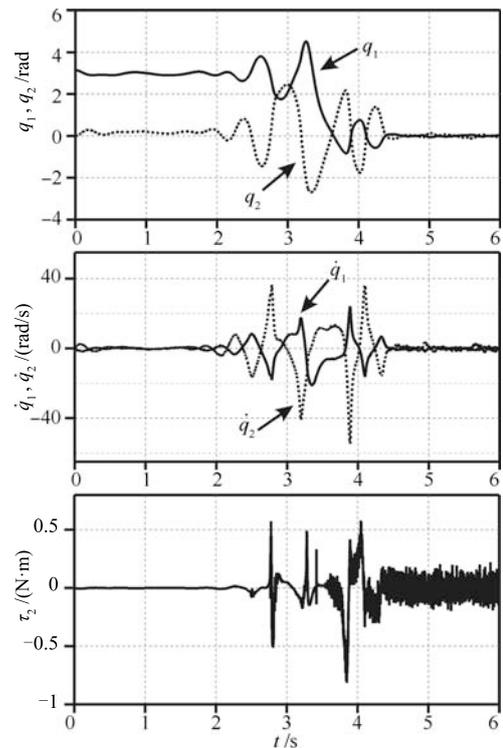


图 6 存在参数摄动、外界扰动及关节摩擦力时 Acrobot 系统的稳定控制仿真结果  
Fig. 6 Simulations for the stabilization of Acrobot when the perturbations in parameters, the external disturbance and friction actuated on joints are present

由仿真图 5 和图 6 注意到 Acrobot 在  $[t_1, 4]$  这一时间段上跟踪期望轨迹的性能并不是很好, 这主要是由  $[A(t_1), B(t_1)]$  接近不能控所造成的. 因此, 如何提高 Acrobot 在这一时间段上的跟踪性能, 使它能够准确跟踪期望轨迹, 从而以更加平滑的方式稳定在  $\mathbf{x}_u$  处, 将是我们下一步研究工作的重点. 另外, 本文只针对 Acrobot 的理想模型设计稳定控制器, 没有考虑关节耦合等因素对系统控制的影响, 当把这些因素考虑在内后如何利用倒转的思想进行稳定控制器设计, 也是我们下一步研究工作的另一个

主要方向.

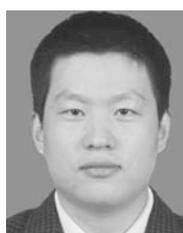
## 5 结论

为将欠驱动体操机器人 Acrobot 从垂直向下位置摇起并最终稳定在垂直向上的位置, 本文提出了一种基于倒转思想的稳定控制方法. 这一控制方法首先为具有二阶非完整约束的 Acrobot 系统设计一条由初始点到目标点的期望运动轨迹, 然后再基于最优控制知识设计跟踪控制器, 使 Acrobot 渐近跟踪期望轨迹并最终稳定在目标点. 此方法简单有效, 它无需对 Acrobot 的运动空间进行划分, 仅用一个控制器便可实现这一机器人的摇起控制和平衡控制, 而且尤为重要的是, 它能够对 Acrobot 的整个稳定过程做出准确预测.

## References

- 1 Grizzle J W, Moog C H, Chevallereau C. Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 559–576
- 2 Jia He-Ming, Zhang Li-Jun, Cheng Xiang-Qin, Bian Xin-Qian, Yan Zhe-Ping, Zhou Jia-Jia. Three-dimensional path following control for an underactuated UUV based on nonlinear iterative sliding mode. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(2): 308–314  
(贾鹤鸣, 张利军, 程相勤, 边信黔, 严浙平, 周佳加. 基于非线性迭代滑模的欠驱动 UUV 三维航迹跟踪控制. *自动化学报*, 2012, **38**(2): 308–314)
- 3 Kotyczka P. Local linear dynamics assignment in IDA-PBC for underactuated mechanical systems. In: *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. Orlando, FL, USA: IEEE, 2011. 6534–6539
- 4 Cheng Hong-Tai, Zhao Yi-Ni, Zhang Xiao-Hua. Dynamical servo control and symmetrical virtual constraints method for the Acrobot. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(11): 1594–1600  
(程红太, 赵漪旒, 张晓华. Acrobot 动态伺服控制及其对称虚约束方法研究. *自动化学报*, 2010, **36**(11): 1594–1600)
- 5 Oriolo G, Nakamura Y. Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: underactuated manipulators. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. Brighton, UK: IEEE, 1991. 2398–2403
- 6 Spong M W. The swing up control problem for the Acrobot. *IEEE Control Systems Magazine*, 1995, **15**(1): 49–55
- 7 Lai X Z, She J H, Yang S X, Wu M. Comprehensive unified control strategy for underactuated two-link manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics — Part B: Cybernetics*, 2009, **39**(2): 389–398
- 8 Lai X Z, She J H, Ohyama Y, Cai Z. Fuzzy control strategy for Acrobots combining model-free and model-based control. *IEEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 1999, **146**(6): 505–510

- 9 Lai Xu-Zhi, Wu Min, She Jin-Hua, Yang Simon X. Controller design and global stability analysis of Acrobot. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(7): 719–725  
(赖旭芝, 吴敏, 余锦华, Yang Simon X. Acrobot 控制器设计与全局稳定性分析. *自动化学报*, 2007, **33**(7): 719–725)
- 10 Willson S S, Mullhaupt P, Bonvin D. Quotient method for controlling the Acrobot. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*. Shanghai, China: IEEE, CDC/CCC 2009. 1770–1775
- 11 Olfati-Saber R. Control of underactuated mechanical systems with two degrees of freedom and symmetry. In: *Proceedings of the 2000 American Control Conference*. Chicago, USA: IEEE, 2000. 4092–4096
- 12 Khalil H K. *Nonlinear Systems* (Third edition). New Jersey, USA: Prentice Hall, 2002. 191–195



**张安彩** 中南大学信息科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向为欠驱动机械系统, 非线性系统控制.

E-mail: zhangancai123@hotmail.com  
(ZHANG An-Cai Ph. D. candidate at the School of Information Science and Engineering, Central South University. His research interest covers control of underactuated mechanical system and nonlinear system.)



**赖旭芝** 中南大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为智能控制, 机器人控制和非线性系统. 本文通信作者.

E-mail: xuzhi@csu.edu.cn  
(LAI Xu-Zhi Professor at the School of Information Science and Engineering, Central South University. Her research interest covers intelligent control, robot control, and nonlinear systems. Corresponding author of this paper.)



**余锦华** 东京工业大学计算机科学学部教授. 主要研究方向为重复控制, 过程控制和机器人. E-mail: she@cs.teu.ac.jp

(SHE Jin-Hua Professor at the School of Computer Science, Tokyo University of Technology, Japan. His research interest covers repetitive control, process control, and robot.)



**吴敏** 中南大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为鲁棒控制, 智能控制和过程控制.

E-mail: min@csu.edu.cn  
(WU Min Professor at the School of Information Science and Engineering, Central South University. His research interest covers robust control, intelligent control, and process control.)