

# 基于 Kane 方法的机器海豚动力学建模及速度优化方法

沈飞<sup>1</sup> 曹志强<sup>1</sup> 徐德<sup>2</sup> 周超<sup>1</sup>

**摘要** 在利用 Kane 方法对机器海豚进行动力学建模的基础上, 提出了一种对豚体波拟合推进进行速度优化的方法. 首先, 选取各连杆的关节角和机器海豚头部质心的坐标作为广义坐标, 对具有三个推进关节的机器海豚进行运动学分析, 进而得到广义惯性力; 然后, 结合对各连杆受力分析得到的广义主动力, 建立机器海豚的动力学方程. 其中, 根据尾鳍攻角所处的不同范围, 分别利用升力线理论和阻力模型将尾鳍建模为有限翼展机翼或平板来计算水动力. 在此基础上, 结合豚体波拟合推进, 提出一种通过调节尾鳍关节角规律的幅度和相位来优化平均推进速度的方法. 仿真结果表明了所建模型及优化方法的有效性.

**关键词** 机器海豚, 动力学建模, Kane 方法, 豚体波拟合推进, 速度优化

**引用格式** 沈飞, 曹志强, 徐德, 周超. 基于 Kane 方法的机器海豚动力学建模及速度优化方法. 自动化学报, 2012, 38(8): 1247-1256

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2012.01247

## A Dynamic Model of Robotic Dolphin Based on Kane Method and Its Speed Optimization Method

SHEN Fei<sup>1</sup> CAO Zhi-Qiang<sup>1</sup> XU De<sup>2</sup> ZHOU Chao<sup>1</sup>

**Abstract** In this paper, a dynamic model of a robotic dolphin using Kane method is presented, and a speed optimization method based on this model is proposed to improve the propulsive speed by fitting the dolphin's wave. Firstly, the joint angle of each link and centroid's coordinate of robotic dolphin's head are selected as the generalized coordinates. Then, after analyzing the kinematic of robotic dolphin with three propulsive joints, the generalized inertia forces are given. In the meantime, the generalized active forces are obtained by analyzing the forces of each link. And thus the robotic dolphin's dynamic equations are determined. In addition, the fluke is modeled as a finite span hydrofoil or flat plate according to different ranges of its attack angle based on lifting-line theory and resistance model, respectively. Furthermore, combining the propulsion by fitting dolphin's wave, a speed optimization approach by adjusting the amplitude and phase of fluke's joint angle's profile is proposed. Finally, simulation results show that the dynamic model and optimization method are effective.

**Key words** Robotic dolphin, dynamic model, Kane method, propulsion by fitting dolphin's wave, speed optimization

**Citation** Shen Fei, Cao Zhi-Qiang, Xu De, Zhou Chao. The dynamic model of robotic dolphin based on Kane method and its speed optimization method. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(8): 1247-1256

仿生机器人的研究已经成为机器人学的热点之一. 在海洋生物中, 海豚具有比鱼类更为卓越的性能和减阻机制, 其瞬时游速可超过 11 m/s, 能以 11%~17% 体长进行转弯且速度高达 450°/s, 平均推进效率保持在 75%~90% 之间<sup>[1]</sup>, 这使得海豚更

适于成为仿生的对象. 目前, 机器海豚的研究受到关注.

海洋生物游动的水动力学模型为水下仿生机器人提供理论依据. 在鱼体游动的水动力学建模方面, Taylor<sup>[2]</sup> 基于“静态流体理论”建立了适用于低雷诺数的早期“抗力模型”. Lighthill<sup>[3]</sup> 首次基于“小振幅位势理论”建立了分析鳃科鱼类推进模式的数学模型. Wu<sup>[4]</sup> 提出了“二维波动板理论”, 将鱼体视为一薄板分析鳃科鱼类的水动力学特性. 随后 Lighthill<sup>[5-6]</sup> 提出“细长体理论”及“大摆幅细长体理论”, 考虑尾鳍为任意摆幅的情况. Cheng 等<sup>[7]</sup> 和童秉纲等<sup>[8]</sup> 采用半解析-半数值的方法, 提出了“三维波动板理论”. 针对海豚游动的水动力建模方面, Gray<sup>[9]</sup> 将游动的海豚建模为一个平板, Parry<sup>[10]</sup> 基于尾鳍的运动建立了近稳阻力模型, Kayan<sup>[11]</sup> 将尾鳍作为一个独立的部件来分析其升力和阻力特性, Lighthill<sup>[5, 12]</sup> 采用非稳的升力线理论来分析鲸类大

收稿日期 2011-11-10 录用日期 2012-02-02  
Manuscript received November 10, 2011; accepted February 2, 2012

国家自然科学基金 (60725309, 61105105) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60725309, 61105105)

本文责任编辑 葛树志

Recommended by Associate Editor GE Shu-Zhi

1. 中国科学院自动化研究所复杂系统管理与控制国家重点实验室 北京 100190 2. 中国科学院自动化研究所精密感知与控制研究中心 北京 100190

1. State Key Laboratory of Management and Control for Complex Systems, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190 2. The Research Center of Precision Sensing and Control, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190

展弦比尾鳍产生的升力推进, Bose 等<sup>[13]</sup> 基于线性二维小幅度非稳定机翼理论将鲸类尾鳍建模为翼型来计算水动性能, 并使用校正因子对计算结果进行修正. Chopra 等<sup>[14]</sup> 利用数值计算的方法, 将三维运动的尾鳍建模为刚体平板, Nakashima 等<sup>[15]</sup> 提出一种计算两关节机器海豚水动性能的方法.

在上述理论结果基础上, 众多学者对水下仿生机器人的动力学建模展开了研究. 近年来比较典型的有 Khalil 等<sup>[16]</sup> 采用递归牛顿-欧拉法对三维运动的机器鳗鱼进行动力学建模, 其中水动力的计算采用 Morison 模型, 根据动力学模型进行仿真得到了各关节的输出力矩曲线和三维游动曲线. Yu 等<sup>[17-18]</sup> 采用 Schiehlen 方法对三维游动的机器鱼、机器海豚进行了动力学建模. 夏丹等<sup>[19]</sup> 采用 Kane 方法建立了仿鱼机器人波状游动的动力学模型. 上述模型为研究仿生机器人提供了理论依据, 然而并没有进一步利用模型来指导和优化机器人的运动. Kane 方法由于引入了广义速度的定义, 不仅可以得到最少数目的微分方程, 同时避免了繁杂的求导运算, 使得对复杂的海豚波动运动的动力学建模问题得以简化. 故本文采用 Kane 方法对三关节机器海豚进行动力学建模, 根据尾鳍攻角所处的不同范围将尾鳍分别建模为有限翼展机翼或平板来进行水动力分析. 在动力学模型的基础上, 提出一种对拟合豚体波推进进行速度优化的方法, 以提高机器海豚的推进性能.

## 1 基于 Kane 方法的动力学建模

### 1.1 机器海豚坐标系及广义坐标的选取

将机器海豚视为串联四连杆的多刚体系统,  $l_1$  为机器海豚的头部,  $l_2$ ,  $l_3$  和  $l_4$  为机器海豚的三关节尾部,  $l_1$  与  $l_2$ ,  $l_2$  与  $l_3$ ,  $l_3$  与  $l_4$  之间通过由舵机驱动的旋转关节连结, 如图 1 所示建立坐标系, 其中  $O_0\hat{x}_0\hat{y}_0\hat{z}_0$  为惯性坐标系,  $O_i\hat{x}_i\hat{y}_i\hat{z}_i$  为连杆  $l_i$  的联体坐标系,  $O_i\hat{x}_i$  沿连杆  $l_i$  水平轴线,  $O_i\hat{y}_i$  沿连杆  $l_i$  垂直轴线,  $O_i\hat{z}_i$  按右手法则垂直于  $O_i\hat{x}_i\hat{y}_i$  平面,  $O_1$ ,  $O_2$  和  $O_3$  分别为连杆  $l_1$ ,  $l_2$  和  $l_3$  的质心,  $O_4$  为尾鳍机翼  $l_4$  的水动中心,  $\theta_i$  为  $l_i$  的关节角 (连杆轴间的夹角),  $i = 1, 2, 3, 4$ . 坐标系间的变换关系为

$${}^i T_{i+1} = \begin{bmatrix} C_{i+1} & S_{i+1} & 0 & -0.5(L_i + L_{i+1}C_{i+1}) \\ -S_{i+1} & C_{i+1} & 0 & 0.5L_{i+1}S_{i+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$${}^0 T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & x \\ -S_1 & C_1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中,  ${}^0 T_1$  为  $O_0\hat{x}_0\hat{y}_0\hat{z}_0$  到  $O_1\hat{x}_1\hat{y}_1\hat{z}_1$  的转换关系矩阵,  ${}^i T_{i+1}$  为  $O_i\hat{x}_i\hat{y}_i\hat{z}_i$  到  $O_{i+1}\hat{x}_{i+1}\hat{y}_{i+1}\hat{z}_{i+1}$  转换关系矩阵,  $C_i = \cos(\theta_i)$ ,  $S_i = \sin(\theta_i)$ . 选取  $O_1$  的坐标  $(x, y)$  和  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  为广义坐标  $(x, y, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ , 取广义速度为:  $u_1 = \dot{x}$ ,  $u_2 = \dot{y}$ ,  $u_3 = \dot{\theta}_1$ ,  $u_4 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$ ,  $u_5 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3$ ,  $u_6 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4$ .

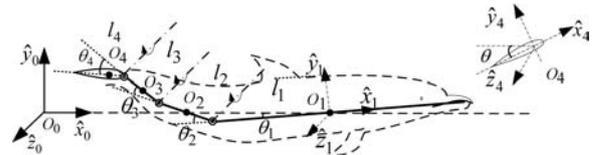


图 1 机器海豚坐标系

Fig. 1 The coordinate system of robotic dolphin

### 1.2 各杆的运动学分析

经过对各连杆进行运动学分析, 得到  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  和  $O_4$  在  $O_0\hat{x}_0\hat{y}_0\hat{z}_0$  中的位置、速度和加速度以及连杆  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  和  $l_4$  的角速度和角加速度:

$$\mathbf{r}_{O_i} = \begin{pmatrix} x - \sum_{j=1}^i R_{ij} L_j C_{1,2,\dots,j} \\ y + \sum_{j=1}^i R_{ij} L_j S_{1,2,\dots,j} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}_0 \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_{O_i} = \begin{pmatrix} u_1 + \sum_{j=1}^i R_{ij} L_j S_{1,2,\dots,j} u_{(j+2)} \\ u_2 + \sum_{j=1}^i R_{ij} L_j C_{1,2,\dots,j} u_{(j+2)} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}_0 \quad (4)$$

$$\mathbf{a}_{O_i} = \dot{u}_1 \hat{\mathbf{x}}_0 + \dot{u}_2 \hat{\mathbf{y}}_0 + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^i R_{ij} L_j (C_{1,2,\dots,j} u_{(j+2)}^2 + S_{1,2,\dots,j} \dot{u}_{(j+2)}) \\ \sum_{j=1}^i R_{ij} L_j (S_{1,2,\dots,j} u_{(j+2)}^2 - C_{1,2,\dots,j} \dot{u}_{(j+2)}) \end{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}_0 \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{l_i} = u_{(i+2)} \hat{\mathbf{z}}_0 \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{l_i} = \dot{u}_{(i+2)} \hat{\mathbf{z}}_0 \quad (7)$$

其中,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $R$  为系数矩阵. 用已经得到的各连杆的质心速度和角速度对各广义速度  $u_1 - u_6$  投影, 得到各连杆的偏角速度和偏速度, 即一系列方向:

$$\boldsymbol{\omega}_{l_i}^{(j)} = \frac{\boldsymbol{\omega}_{l_i}}{u_j} = \mathbf{W}_{ij} \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_{O_i}^{(j)} = \frac{\mathbf{v}_{O_i}}{u_j} = \mathbf{V}_{ij} \quad (9)$$

其中,  $\boldsymbol{\omega}_{l_i}^{(j)}$  是连杆  $l_i$  的第  $j$  个偏角速度,  $\mathbf{v}_{O_i}^{(j)}$  为  $O_i$  的第  $j$  个偏速度,  $u_i/u_j$ ,  $W$  和  $V$  分别为

$$\frac{u_i}{u_j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{z}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{z}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{z}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{z}_0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \mathbf{p}_1 & 0.5\mathbf{p}_2 & 0 & 0 \\ \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & 0.5\mathbf{p}_3 & 0 \\ \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \end{bmatrix}$$

其中,  $\mathbf{p}_1 = z_1\hat{x}_0 + z_2\hat{y}_0$ ,  $\mathbf{p}_2 = z_3\hat{x}_0 + z_4\hat{y}_0$ ,  $\mathbf{p}_3 = z_5\hat{x}_0 + z_6\hat{y}_0$ ,  $\mathbf{p}_4 = z_7\hat{x}_0 + z_8\hat{y}_0$ ,  $z_1 = 0.5L_1S_{11}$ ,  $z_2 = 0.5L_1C_{11}$ ,  $z_3 = L_2S_{12}$ ,  $z_4 = L_2C_{12}$ ,  $z_5 = L_3S_{123}$ ,  $z_6 = L_3C_{123}$ ,  $z_7 = 0.25L_4S_{1234}$ ,  $z_8 = 0.25L_4C_{1234}$ .

### 1.3 广义惯性力

根据 Kane 方法知广义惯性力的表达式为<sup>[20]</sup>

$$(\mathbf{K}_j^*)_{l_i} = \boldsymbol{\omega}_{l_i}^{(j)} \cdot \mathbf{T}_{l_i}^* + \mathbf{v}_{O_i}^{(j)} \cdot \mathbf{R}_i^* \quad (10)$$

其中,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $j = 1, \dots, 6$ ,  $(\mathbf{K}_j^*)_{l_i}$  为  $l_i$  的第  $j$  个广义惯性力,  $\boldsymbol{\omega}_{l_i}^{(j)}$  是连杆  $l_i$  的第  $j$  个偏角速度,  $\mathbf{v}_{O_i}^{(j)}$  为  $O_i$  的第  $j$  个偏速度,  $\mathbf{R}_i^*$  和  $\mathbf{T}_{l_i}^*$  分别为作用在连杆  $l_i$  上的惯性力系向质心或者水动中心简化的惯性力主矢和主矩, 分别表达为

$$\mathbf{R}_i^* = -m_i\mathbf{a}_{O_i} \quad (11)$$

$$\mathbf{T}_{l_i}^* = -\boldsymbol{\alpha}_{l_i} \cdot \mathbf{I}_{l_i} - \boldsymbol{\omega}_{l_i} \times \mathbf{I}_{l_i} \cdot \boldsymbol{\omega}_{l_i} \quad (12)$$

其中,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $m_i$  为  $l_i$  的质量,  $\mathbf{a}_{O_i}$  为  $O_i$  的加速度,  $\boldsymbol{\alpha}_{l_i}$  为  $l_i$  的角加速度,  $\boldsymbol{\omega}_{l_i}$  为  $l_i$  的角速度,  $\mathbf{I}_{l_i}$  为  $l_i$  相对质心 (或水动中心) 的惯量张量, 由于

$O_i\hat{x}_i\hat{y}_i\hat{z}_i$  的坐标轴与  $O_i$  的惯量主轴重合, 故  $\mathbf{I}_{l_i}$  可表达为

$$\mathbf{I}_{l_i} = I_{3(i-1)+1}\hat{x}_i\hat{x}_i + I_{3(i-1)+2}\hat{y}_i\hat{y}_i + I_{3(i-1)+3}\hat{z}_i\hat{z}_i \quad (13)$$

其中,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $I_{3(i-1)+1}$ ,  $I_{3(i-1)+2}$  和  $I_{3(i-1)+3}$  分别为连杆  $l_i$  相对于  $O_i\hat{x}_i$ ,  $O_i\hat{y}_i$  和  $O_i\hat{z}_i$  的主转动惯量. 则第  $j$  个广义惯性力计算如下:

$$K_j^* = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{K}_j^*)_{l_i} \quad (14)$$

其中,  $j = 1, \dots, 6$ .

## 1.4 机器海豚尾鳍的水动力学建模

由于大展弦比的尾鳍是海豚产生推进力的主要部件, 所以在求取 Kane 方程的广义主动力之前先对海豚尾鳍进行水动力学建模.

研究表明生物海豚尾鳍的纵切面具有翼型形状特点, 使其具有产生升力和减小阻力的特点<sup>[1]</sup>. 海豚尾鳍产生升力的原理与飞机机翼产生升力的原理相同, 即由于通过翼型上下表面的流体速度不同产生的压力差形成了升力. 可以借助研究飞机机翼的方法来研究机器海豚的水动力. 但是与飞机固定的机翼不同的是海豚的尾鳍机翼是通过周期性的摆动来产生升力的, 这使得尾鳍的攻角会在一个很大的范围内变化. 据此, 本文根据机器海豚尾鳍的攻角所处的不同范围将尾鳍分别建模为有限翼展机翼和平板.

### 1.4.1 有限翼展机翼模型

当尾鳍的攻角在  $(-\alpha_{\text{stall}}, \alpha_{\text{stall}})$  范围内, 采用升力线理论对尾鳍进行受力分析, 此时尾鳍受到升力  $L$ , 诱导阻力  $D_i$  和型阻  $D_x$  ( $\alpha_{\text{stall}}$  为失速攻角), 其大小为

$$L = 0.5\rho A_4 U_4^2 C_L \quad (15)$$

$$D_i = 0.5\rho A_4 U_4^2 C_{D,i} \quad (16)$$

$$D_x = 0.5\rho A_4 U_4^2 C_{D,x} \quad (17)$$

其中,  $\rho$  为流体密度,  $A_4$  为尾鳍面积,  $U_4$  为尾鳍的速度大小,  $C_L$ ,  $C_{D,i}$  和  $C_{D,x}$  分别为升力系数、诱导阻力系数和型阻系数<sup>[21]</sup>.

### 1.4.2 平板模型

当尾鳍的攻角在  $(-\alpha_{\text{stall}}, \alpha_{\text{stall}})$  范围外, 尾鳍所受升力急剧减小而阻力迅速增大, 采用平板阻力模型来进行受力分析, 此时尾鳍受到截面阻力  $N_4$ , 其大小为

$$N_4 = 0.5\rho A_4 U_4^2 C_{N4} \quad (18)$$

其中,  $\rho$  为流体密度,  $A_4$  为尾鳍面积,  $U_4$  为尾鳍的速度大小,  $C_{N4}$  为平板型的截面阻力系数<sup>[22]</sup>. 其中

失速攻角是根据采用的翼型来确定. 至此, 得到尾鳍的水动力  $\mathbf{R}_4$  的表达式:

$$\mathbf{R}_4 = \begin{cases} \mathbf{L} + \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_x, & \alpha_4 \in (-\alpha_{\text{stall}}, \alpha_{\text{stall}}) \\ \mathbf{N}_4, & \alpha_4 \notin (-\alpha_{\text{stall}}, \alpha_{\text{stall}}) \end{cases} \quad (19)$$

其中,  $\alpha_4$  为尾鳍的攻角即尾鳍的速度  $\mathbf{v}_{O_4}$  与尾鳍轴的夹角, 尾鳍速度  $\mathbf{v}_{O_4}$  的大小和方向由式 (4) 计算得到, 尾鳍轴的方向由各时刻的关节角  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  和  $\theta_4$  来确定. 当尾鳍速度  $\mathbf{v}_{O_4}$  的方向位于尾鳍轴的上方, 攻角为负, 相反攻角为正.

### 1.5 广义主动力

如图 2 所示, 首先对机器海豚各连杆进行受力分析,  $\mathbf{v}_{O_i}$  为连杆  $O_i$  的速度. 对各连杆作用的力可以分为三大类: 各连杆自身重力与浮力、流体对连杆的作用力 (为便于分析将浮力归为第一类) 以及由驱动电机驱动产生的各连杆间的相互作用力.

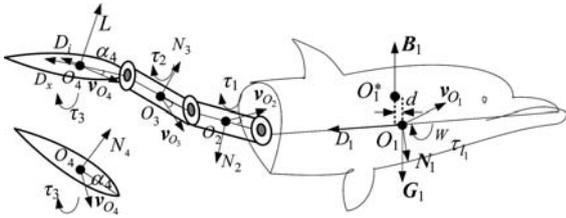


图 2 机器海豚的受力及力矩分析

Fig. 2 Forces and moments on the robotic dolphin

连杆  $l_1, l_2$  和  $l_3$  的重心与浮心重合, 它们所受的重力和浮力作为一对平衡力对广义主动力没有贡献而不予考虑. 而机器海豚头部的重心和浮心考虑到整个机器海豚的静稳定性和动稳定性, 在对机器海豚配平时, 会将机器海豚头部  $l_1$  的重心配平在浮心的正下方. 当尾部摆动使得机器海豚头部  $O_1\hat{x}_1$  与  $O_0\hat{x}_0$  产生夹角时, 重心  $O_1$  与浮心  $O_1^*$  在同一条直线上, 浮力  $\mathbf{B}_1$  绕  $O_1$  产生力矩使得海豚可以回到平稳状态,  $d$  为力臂,  $\mathbf{G}_1$  为重力.

流体对海豚头部的作用力主要有正面截面阻力  $\mathbf{D}_1$  和侧面截面阻力  $\mathbf{N}_1$ , 阻力系数分别采用 Bullet 模型和 Sphere 模型<sup>[22]</sup>. 流体对连杆  $l_2$  和  $l_3$  的作用主要有侧面截面阻力  $\mathbf{N}_2$  和  $\mathbf{N}_3$ , 阻力系数采用 Flat plate 型<sup>[22]</sup>. 流体对尾鳍  $l_4$  的作用已在上一小节介绍.

由驱动电机驱动产生的各连杆间的相互作用力可以等效为一对力矩和作用力. 如  $l_i$  对  $l_{i+1}$  的作用可以等效为力  ${}^i\mathbf{R}_{l_{i+1}}$  和力矩  ${}^i\mathbf{T}_{l_{i+1}}$ , 同样根据作用力与反作用力原理,  $l_{i+1}$  对  $l_i$  的作用可以等效为力  $-{}^i\mathbf{R}_{l_{i+1}}$  和力矩  $-{}^i\mathbf{T}_{l_{i+1}}$ . 在计算广义主动力的第  $j$  个分量  $K_j$  时, 所有  ${}^i\mathbf{R}_{l_{i+1}}$  和  $-{}^i\mathbf{R}_{l_{i+1}}$  将会被抵

消<sup>[22]</sup>. 记  $\tau_1 = \hat{\mathbf{z}}_0 \cdot {}^{l_1}\mathbf{T}_{l_2}$ ,  $\tau_2 = \hat{\mathbf{z}}_0 \cdot {}^{l_2}\mathbf{T}_{l_3}$ ,  $\tau_3 = \hat{\mathbf{z}}_0 \cdot {}^{l_3}\mathbf{T}_{l_4}$  为驱动电机的输出力矩大小. 根据 Kane 方法, 广义主动力的计算公式为

$$(K_j)_{l_i} = \boldsymbol{\omega}_{l_i}^{(j)} \cdot \mathbf{T}_{l_i} + \mathbf{v}_{O_i}^{(j)} \cdot \mathbf{R}_i \quad (20)$$

其中,  $i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 6$ ,  $(K_j)_{l_i}$  为连杆  $l_i$  的第  $j$  个广义主动力,  $\boldsymbol{\omega}_{l_i}^{(j)}$  和  $\mathbf{v}_{O_i}^{(j)}$  分别为连杆  $l_i$  的第  $j$  个偏角速度和偏速度,  $\mathbf{R}_i$  和  $\mathbf{T}_{l_i}$  分别为作用在连杆  $l_i$  上的所有力等效为质心或者水动中心上的合力 and 力矩. 将得到的  $(K_j)_{l_i}$  代入下式得到第  $j$  个广义主动力  $K_j$ :

$$K_j = \sum_{i=1}^4 (K_j)_{l_i} \quad (21)$$

其中,  $j = 1, \dots, 6$ .

### 1.6 Kane 方程

根据 Kane 方程广义惯性力与广义主动力相平衡的原理, 即:

$$K_j^* + K_j = 0 \quad (22)$$

其中,  $j = 1, \dots, 6$ . 将式 (14) 和式 (21) 得到的  $K_j^*$  和  $K_j$  代入上式得到三关节机器海豚的动力学方程, 用于完整的描述机器海豚的运动:

$$\sum_{j=1}^6 X_{rj} \dot{u}_j = Y_r, \quad r = 1, \dots, 6 \quad (23)$$

其中,  $r = 1, \dots, 6$ ,  $\dot{u}_j$  为广义速度  $u_j$  的一阶导数,  $X_{rj}$  和  $Y_r$  分别为系数矩阵, 在附录 A 中给出.

## 2 基于动力学模型和豚体波拟合推进的速度优化方法

### 2.1 豚体波拟合推进方法

机器海豚的推进通过让组成机器海豚的各关节拟合生物海豚波动运动曲线来实现, 文献 [23] 给出了生物海豚的波动曲线表达式:

$$h(x, t) = h_t \left[ \frac{h_n}{h_t} - 1 + \left( 2 - \frac{h_n}{h_t} \right)^{\left( \frac{x}{L} \right)^{\gamma}} \right] \sin[\omega t - k(x)x] \quad (24)$$

其中,  $h(x, t)$  是海豚体位于  $x$  处的点在  $t$  时刻的纵向位置, 取值范围为  $(-h_t, h_t)$ ,  $x$  的取值范围为从海豚喙部到尾鳍,  $L$  为海豚的体长.  $h_t$  是海豚尾鳍的波动幅度,  $h_n$  是海豚喙部的波动幅度,  $\omega = 2\pi f$  是波动角频率,  $f$  是波动频率,  $\gamma$  是与海豚游动速度、波

动曲线的相位速度等量有关的量,  $k(x)$  是波动曲线相位速度与  $x$  关系式:  $k(x) = C(x) = C_n(1 + b_0x)$ , 其中  $C_n$  为海豚喙部的相速度,  $b_0$  的单位为  $\text{m}^{-1}$ .

经过确定波形参数、离散化、关节坐标计算和关节角计算等步骤得到机器海豚的各个关节角在各时刻的控制值:  $\theta_2(i)$ ,  $\theta_3(i)$  和  $\theta_4(i)$ ,  $i$  指第  $i$  时刻, 详细步骤与文献 [24] 的方法类似.

## 2.2 速度优化方法

推进模式属于鲭行式海豚产生推进力的主要部件是大展弦比尾鳍, 提高海豚游动性能的一个重要方法就是对海豚尾鳍的运动进行优化<sup>[23]</sup>. 基于此, 本文在拟合豚体波推进方法的基础上, 提出在保持  $\theta_2(i)$  和  $\theta_3(i)$  不变的情况下, 通过调节尾鳍关节角规律的幅度和相位用来提高机器海豚的平均推进速度. 首先通过拟合豚体波得到关节角的控制规律即  $\theta_2(i)$ ,  $\theta_3(i)$  和  $\theta_4(i)$ , 其中  $\theta_4(i)$  可以表示为

$$\theta_4(i) = bf \left( \frac{2\pi i}{TM} \right), \quad 0 \leq b \leq \frac{\pi}{2} \quad (25)$$

其中,  $b$  为尾鳍关节角规律的幅度,  $T$  为波动周期,  $i$  为时刻,  $M$  为一个波动周期内的离散点个数, 此值不能超过驱动电机的极限驱动频率.

速度优化的问题可转化为以优化机器海豚平均推进速度  $\bar{u}_1$  为目标, 在保持尾鳍关节角规律波形轮廓不变的情况下寻求最优的幅度和相位的优化问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \bar{u}_1 = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} u_1(t) dt \\ \text{s. t. } 0 \leq \psi \leq \pi \\ 0 \leq k_{\text{amp}} \leq k_s \\ \theta_4'(i) = k_{\text{amp}} \theta_4(i + \psi) \\ \sum_{j=1}^6 X_{rj} \dot{u}_j = Y_r \end{array} \right. \quad (26)$$

其中,  $r = 1, \dots, 6$ ,  $k_{\text{amp}}$  为尾鳍关节角的幅度调节因子, 通过调节因子的作用使得  $\theta_4(i)$  的幅度可以在 0 到  $k_s \times b$  之间调整;  $k_s$  为常数, 根据幅度调节的尺度决定, 例如, 当要求在幅度不增加的情况下进行调节,  $k_s$  取 1; 当要求  $\theta_4(i)$  的幅度在  $[0, 0.5\pi]$  之间调节,  $k_s$  取  $0.5\pi/b$ .  $\psi$  为  $\theta_4(i)$  的相位, 通过  $\psi$  可以使得  $\theta_4(i)$  的相位在 0 到  $\pi$  之间调整.  $\theta_4'(i)$  是调整后的尾鳍关节角控制规律, 连同  $\theta_2(i)$  和  $\theta_3(i)$  作为已知量代入动力学方程求解, 得到各时刻机器海豚游动速度  $u_1(i)$ , 经过叠加、平均得到  $n$  个波动周期的平均速度  $\bar{u}_1$ .

经过优化计算, 得到一组使得机器海豚平均推进速度最快的幅度-相位对  $(k_{\text{amp}}^*, \psi^*)$ , 优化后的尾

鳍关节角规律为

$$\theta_4^*(i) = k_{\text{amp}}^* b \theta_4(i + \psi^*) \quad (27)$$

至此, 将  $\theta_2(i)$ ,  $\theta_3(i)$  和  $\theta_4^*(i)$  作为控制数据实现机器海豚的速度优化.

## 3 仿真实验

表 1 给出了机器海豚动力学模型的参数, 其中  $m_i$ ,  $L_i$  和  $A_i$  分别为连杆  $l_i$  的质量、长度和横向截面积,  $I_{3i}$  为连杆  $l_i$  沿着  $O_i \hat{z}_i$  的主转动惯量.  $A_{11} = 0.0155 \text{ m}^2$  为海豚正面截面积, 尾鳍的展长  $s = 0.24 \text{ m}$ , 展弦比  $AR = 2$ . 水动力系数  $C_{D1} = 0.295$ ,  $C_{N1} = 0.5$ ,  $C_{N2} = 1.28$ ,  $C_{N3} = 1.28$ ,  $C_{N4} = 1.28$ .

表 1 机器海豚的参数

Table 1 Parameters of the robotic dolphin

$i$	$m_i$ (kg)	$L_i$ (m)	$A_i$ ( $\text{m}^2$ )	$I_{3i}$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )
1	7.23	0.36	$6.72 \times 10^{-2}$	$8.9652 \times 10^{-2}$
2	$8.45 \times 10^{-2}$	0.10	$4.255 \times 10^{-3}$	$3.26 \times 10^{-5}$
3	$8.45 \times 10^{-2}$	0.10	$4.255 \times 10^{-3}$	$3.26 \times 10^{-5}$
4	0.4845	0.12	$3.24 \times 10^{-2}$	$1.45 \times 10^{-3}$

本文拟合的豚体波参数采用文献 [23] 中提供的 *Tursiops truncatus* 海豚的实验数据:  $U = 4.3 \text{ m/s}$ ,  $h_n/h_t = 0.21$ ,  $b_0 = 0.23 \text{ m}^{-1}$ ,  $\gamma = 4.2$ ,  $h_t/L = 0.112$ ,  $C_n/U = 0.97$ ,  $f = 2.22 \text{ Hz}$ ,  $L = 2.2 \text{ m}$ .

为了验证所建动力学模型的有效性, 按照拟合豚体波方法得到机器海豚关节角的规律  $\theta_2(i)$ ,  $\theta_3(i)$  和  $\theta_4(i)$ , 进而将其作为输入代入动力学方程组 (23) 中, 求解机器海豚的运动情况及作用力矩. 在此基础上, 利用速度优化方法在保持尾鳍关节角规律的波形轮廓不变和幅度不增加 (即  $k_s = 1$ ) 的情况下, 通过调节尾鳍关节角规律的幅度和相位来实现机器海豚平均推进速度的优化.

图 3 是当尾鳍关节角规律在不同的幅度和相位下, 机器海豚平均推进速度的分布图, 图中上部分的黑色区域显示的是机器海豚平均推进速度大于优化前平均推进速度 ( $0.543 \text{ m/s}$ ) 的区域, 可以看出区域中存在许多幅度小于  $b$  的情况, 这说明在幅度减小的情况下, 通过调节相位仍然可以实现平均推进速度的提高, 当  $K_{\text{amp}}^* = 1$ ,  $\psi^* = 25^\circ$ , 平均推进速度达到最大值  $0.62 \text{ m/s}$ . 另外, 当相位  $\psi$  在  $(35^\circ, 103^\circ)$  之间, 平均推进速度会存在负数的情况如图中下部分的黑色区域所示, 此时机器海豚处于倒游的情形.

图 4~图 7 分别给出了优化前后各连杆关节角变化规律,  $u_1$  和  $u_2$  变化规律,  $O_1$  和  $O_4$  的轨迹以及三个关节的输出力矩曲线的对比图. 图 4(a) 是经过

拟合得到的机器海豚关节角的变化规律, 图 4(b) 是优化后得到的机器海豚关节角的变化规律, 优化后的尾鳍关节角规律的相位提前到与  $\theta_3(i)$  几乎同相位.

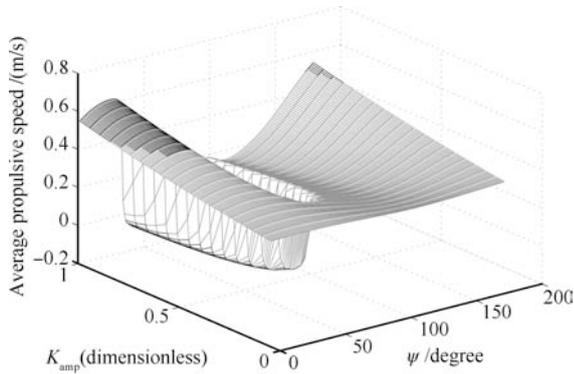
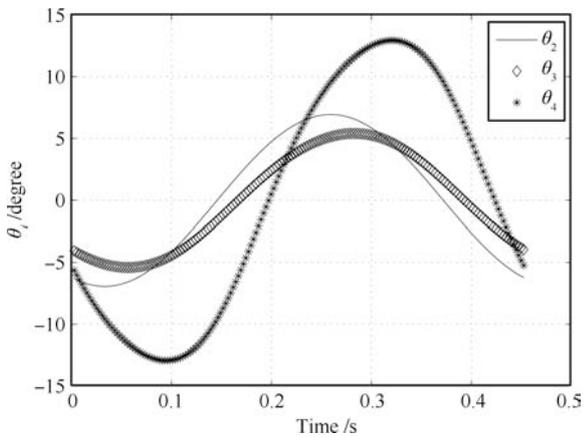


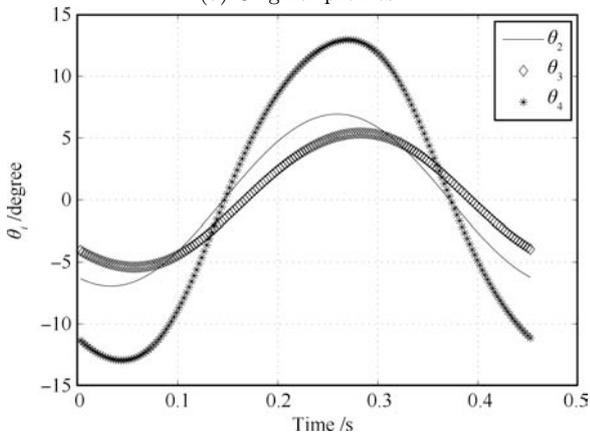
图 3 机器海豚平均推进速度分布曲线 ( $k_s = 1$ )

Fig. 3 The distribution curves of robotic dolphin's average propulsive speed ( $k_s = 1$ )



(a) 优化前曲线

(a) Original profiles



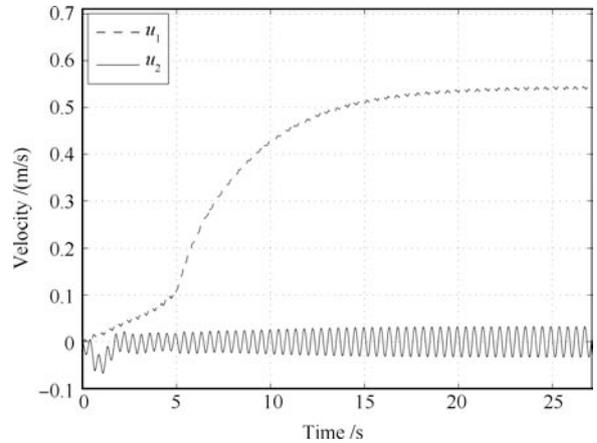
(b) 优化后曲线

(b) Optimized profiles

图 4 关节角变化规律

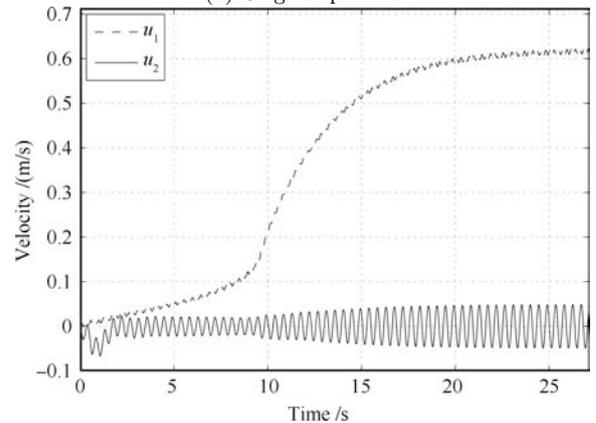
Fig. 4 The profiles of joint angles

图 5 给出了优化前后速度  $u_1$  和  $u_2$  在 60 个波动周期内的变化情况. 图 5(a) 中机器海豚经过约 20s 后运动达到稳定状态, 稳定后平均推进速度为 0.543 m/s. 速度优化后机器海豚经过 25s 达到稳定状态, 平均推进速度较优化前提高约 0.077 m/s, 如图 5(b) 所示. 经过对比还发现, 在运动未达到稳定之前, 优化前机器海豚的平均速度为 0.3406 m/s, 优化后机器海豚的平均速度为 0.3896 m/s, 优化后机器海豚的启动性能有所下降.



(a) 优化前曲线

(a) Original profiles



(b) 优化后曲线

(b) Optimized profiles

图 5  $u_1$  和  $u_2$  的变化曲线

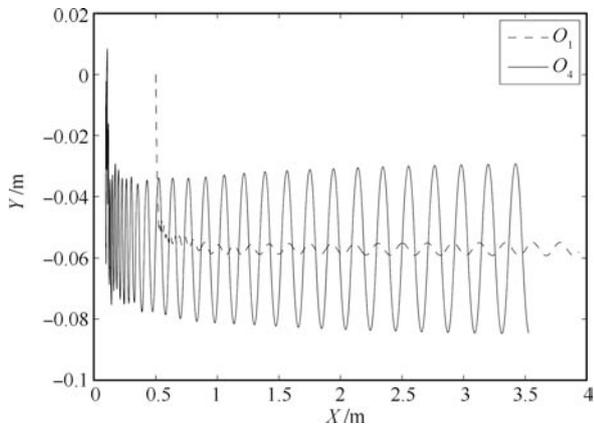
Fig. 5 The profiles of  $u_1$  and  $u_2$

图 6 是优化前后机器海豚头部质心  $O_1$  和尾鳍水动中心  $O_4$  在启动后的 30 个波动周期内的轨迹, 可以看出  $O_1$  和  $O_4$  的轨迹均在水平线以下, 这是由  $\theta_2(i)$ ,  $\theta_3(i)$  和  $\theta_4(i)$  的初值决定. 对比图 6(a) 与图 6(b) 发现, 优化后机器海豚的游动距离比优化前要小, 这是由于优化后机器海豚启动性能有所下降导致, 但随着机器海豚运动达到稳定后会很快弥补这一劣势.

图 7(a) 中的三条曲线分别是机器海豚在达

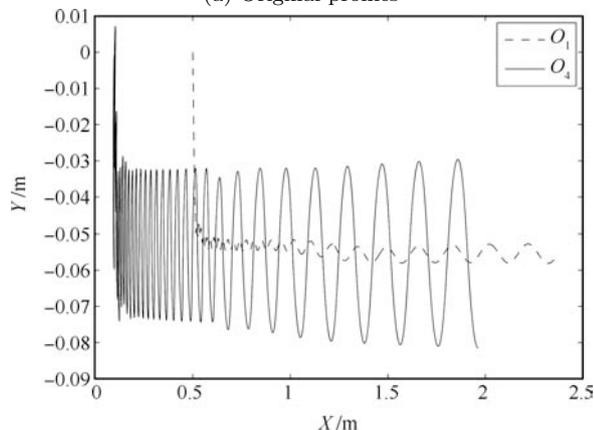
到稳定状态后三个关节的输出力矩  $\tau_1(i)$ ,  $\tau_2(i)$  和  $\tau_3(i)$  在一个波动周期内的变化规律, 其幅值分别为  $0.943 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $0.579 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $0.199 \text{ N}\cdot\text{m}$ , 优化后其幅值如图 7(b) 所示, 分别为  $1.372 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $0.819 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $0.253 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

图 5~ 图 7 优化前后的仿真结果均说明了所建模型是合理的. 从图 5 可以看出启动后机器海豚头部质心  $O_1$  沿  $O_0\hat{x}_0$  方向的速度  $u_1$ , 在每个周期内进行局部微小波动的同时, 逐步在增大直至稳定,  $O_1$  沿  $O_0\hat{y}_0$  方向的速度  $u_2$ , 在经过前 4 个波动周期后, 其在每个波动周期内的平均速度均为零, 这符合机器海豚波动推进的特点. 从图 6 可以看出在拟合豚体波推进下, 机器海豚的运动轨迹是类正弦的, 且尾鳍水动中心  $O_4$  波动轨迹幅度显然比头部质心  $O_1$  的大, 这符合机器海豚拟合豚体波推进方法的原理. 图 7 中各关节的输出力矩在一个周期内呈现波峰-波谷式的变化, 且第一关节输出力矩  $\tau_1(i)$  至第三关节输出力矩  $\tau_3(i)$  的幅度是逐渐减小的, 这也合理地反映了机器海豚不同关节的受力特点.



(a) 优化前曲线

(a) Original profiles

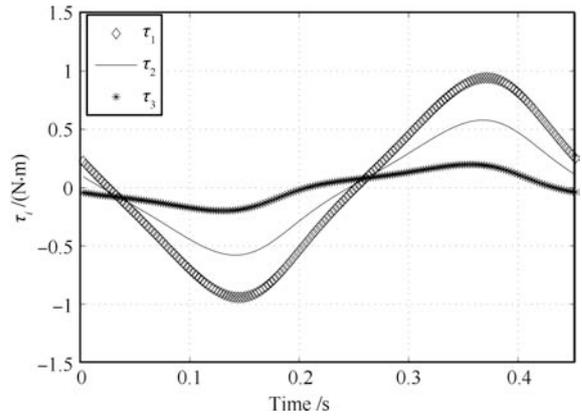


(b) 优化后曲线

(b) Optimized profiles

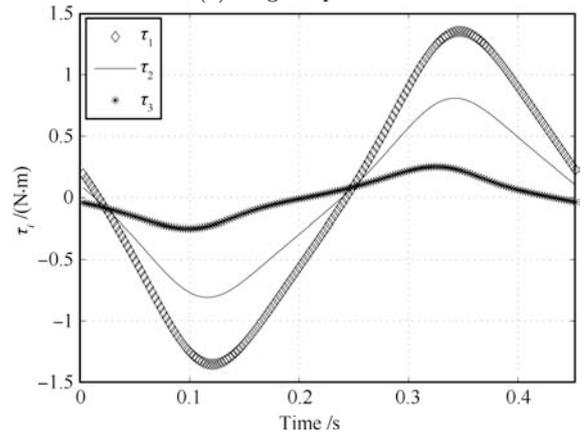
图 6  $O_1$  和  $O_4$  运动轨迹

Fig. 6 The tracks of  $O_1$  and  $O_4$



(a) 优化前曲线

(a) Original profiles



(b) 优化后曲线

(b) Optimized profiles

图 7 各关节输出力矩变化规律

Fig. 7 The profiles of joints' output torque

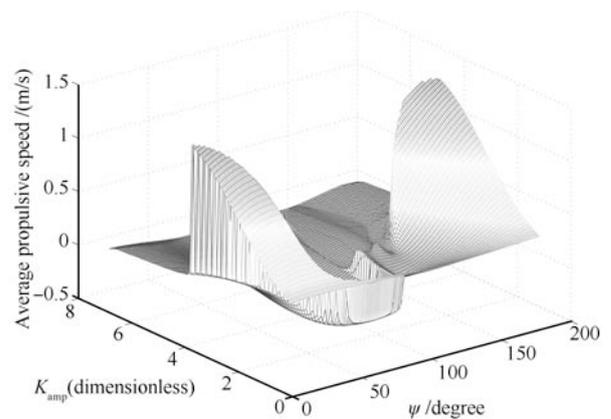


图 8 机器海豚平均推进速度分布曲线 ( $k_s = 0.5\pi/b$ )

Fig. 8 The distribution curves of robotic dolphin's average propulsive speed ( $k_s = 0.5\pi/b$ )

上述仿真结果及分析验证了本文所建模型及速度优化方法的合理性. 进一步, 图 8 给出了当尾鳍关节角的幅度在  $[0, 0.5\pi]$  之间调节时 (即  $k_s =$

$0.5\pi/b$ ), 平均推进速度的分布图, 当  $K_{\text{amp}}^* = 3.8$ ,  $\psi^* = 2^\circ$  时平均推进速度达到最大.

另外, 本文还对不同  $k_s$  ( $k_s = [1, 0.5\pi/b]$ ) 下的速度优化进行了分析, 其中, 优化前的平均推进速度是仅将尾鳍关节角规律的幅度增大  $k_s$  倍的情况下计算得到的, 如图 9 所示. 可以看出, 优化前平均推进速度变化规律表明单纯增大尾鳍关节角规律的幅度, 无法使得平均推进速度一直得到相应的增加, 当幅值达到一定数值后, 其平均推进速度反而会较大降低, 该问题可通过本文提出的速度优化方法加以解决, 从优化后平均推进速度变化规律可以看出, 随着  $k_s$  的增加, 平均推进速度趋于稳定, 且优化后的平均推进速度整体高于优化前的平均推进速度.

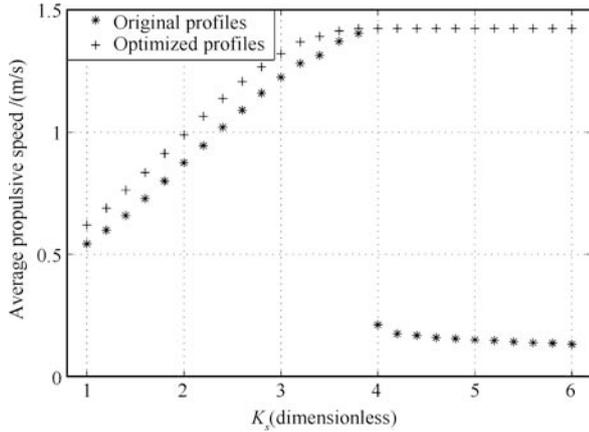


图 9 不同  $k_s$  下的平均推进速度分析图

Fig. 9 The analysis chart of average propulsive speed with different  $k_s$

## 4 结论

本文利用 Kane 方法建立了三关节机器海豚的动力学模型, 并基于该模型对豚体波拟合推进进行速度优化, 从而获取了尾鳍关节角规律的优化幅度和相位. 仿真实验结果验证了模型及优化方法的有效性. 另外, 本文是在保持尾鳍关节角规律波形轮廓不变的情况下, 对平均推进速度进行优化的, 未考虑其推进效率. 寻求在平均推进速度提高的同时, 保证较高推进效率的尾鳍关节角规律优化方法是下一步研究的方向.

## 附录 A

本节将给出 Kane 方程的详细推导过程, 首先介绍广义惯性力的推导过程: 首先, 将在运动学分析中得到的各连杆的角速度  $\omega_{l_i}$ 、角加速度  $\alpha_{l_i}$  和连杆质心或水动中心的速度  $\mathbf{v}_{O_i}$ 、加速度  $\mathbf{a}_{O_i}$  代入式 (11) 和式 (12) 得到惯性力主矢  $\mathbf{R}_i^*$  和主矩  $\mathbf{T}_i^*$ . 然后, 依据广义惯性力定义式 (10), 将偏角速度  $\omega_{l_i}^{(j)}$  和偏速度  $\mathbf{v}_{O_i}^{(j)}$  以及上一步得到的惯性力主矢  $\mathbf{R}_i^*$  和主矩  $\mathbf{T}_i^*$  代入得到连杆  $l_i$  的第  $j$  个广义惯性力 ( $K_j^*$ ) $_{l_i}$ . 最后, 根

据式 (14) 得到第  $j$  个广义惯性力:

$$K_1^* = -(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\dot{u}_1 - m_2 z_9 - m_3 z_{11} - m_4 z_{13} \quad (\text{A1})$$

$$K_2^* = -(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\dot{u}_2 - m_2 z_{10} - m_3 z_{12} - m_4 z_{14} \quad (\text{A2})$$

$$K_3^* = -m_2[z_1(z_9 + \dot{u}_1) + z_2(z_{10} + \dot{u}_2)] - \dot{u}_3 I_3 - m_3[z_1(z_{11} + \dot{u}_1) + z_2(z_{12} + \dot{u}_2)] - m_4[z_1(z_{13} + \dot{u}_1) + z_2(z_{14} + \dot{u}_2)] \quad (\text{A3})$$

$$K_4^* = -0.5m_2[z_3(z_9 + \dot{u}_1) + z_4(z_{10} + \dot{u}_2)] - \dot{u}_4 I_6 - m_3[z_3(z_{11} + \dot{u}_1) + z_4(z_{12} + \dot{u}_2)] - m_4[z_3(z_{13} + \dot{u}_1) + z_4(z_{14} + \dot{u}_2)] \quad (\text{A4})$$

$$K_5^* = -0.5m_3[z_5(z_{11} + \dot{u}_1) + z_6(z_{12} + \dot{u}_2)] - \dot{u}_5 I_9 - m_4[z_5(z_{13} + \dot{u}_1) + z_6(z_{14} + \dot{u}_2)] \quad (\text{A5})$$

$$K_6^* = -\dot{u}_6 I_{12} - m_4[z_7(z_{13} + \dot{u}_1) + z_8(z_{14} + \dot{u}_2)] \quad (\text{A6})$$

其中

$$z_9 = z_2 u_3^2 + z_1 \dot{u}_3 + 0.5z_4 u_4^2 + 0.5z_3 \dot{u}_4$$

$$z_{10} = -z_1 u_3^2 + z_2 \dot{u}_3 - 0.5z_3 u_4^2 + 0.5z_4 \dot{u}_4$$

$$z_{11} = z_2 u_3^2 + z_1 \dot{u}_3 + z_4 u_4^2 + z_3 \dot{u}_4 + 0.5z_6 u_5^2 + 0.5z_5 \dot{u}_5$$

$$z_{12} = -z_1 u_3^2 + z_2 \dot{u}_3 - z_3 u_4^2 + z_4 \dot{u}_4 - 0.5z_5 u_5^2 + 0.5z_6 \dot{u}_5$$

$$z_{13} = z_2 u_3^2 + z_1 \dot{u}_3 + z_4 u_4^2 + z_3 \dot{u}_4 + z_6 u_5^2 + z_5 \dot{u}_5 + z_8 u_6^2 + z_7 \dot{u}_6$$

$$z_{14} = -z_1 u_3^2 + z_2 \dot{u}_3 - z_3 u_4^2 + z_4 \dot{u}_4 - z_5 u_5^2 + z_6 \dot{u}_5 - z_7 u_6^2 + z_8 \dot{u}_6$$

广义主动力的计算首先根据图 2 的受力分析得到各连杆的受力情况, 海豚头部  $l_1$  受到平行于  $O_1 \hat{x}_1$  的截面阻力  $\mathbf{D}_1$ , 其方向与  $\mathbf{v}_{O_1}$  在  $O_1 \hat{x}_1$  方向的分量的方向相反, 受到垂直于  $O_1 \hat{x}_1$  的截面阻力  $\mathbf{N}_1$ , 其方向与  $\mathbf{v}_{O_1}$  在  $O_1 \hat{y}_1$  方向的分量的方向相反, 受到重力  $\mathbf{G}_1$  和浮力  $\mathbf{B}_1$ , 浮力对  $O_1$  的力矩  ${}^W \tau_{l_1}$ ,  $l_2$  对  $l_1$  的作用为力  ${}^{-1} \mathbf{R}_{l_2}$  和力矩  ${}^{-1} \mathbf{T}_{l_2}$ ,  ${}^{-1} \mathbf{R}_{l_2}$  在后来求取  $K_j$  时会与  ${}^1 \mathbf{R}_{l_2}$  抵消. 海豚头部  $l_1$  在  $O_1$  的合力和力矩分别为

$$\mathbf{R}_1 = R_{1X} \hat{x}_0 + R_{1Y} \hat{y}_0 \quad (\text{A7})$$

$$\mathbf{T}_{l_1} = ({}^W \tau_{l_1} - {}^1 T_{l_2}) \hat{z}_0 \quad (\text{A8})$$

其中,  $R_{1X}$  和  $R_{1Y}$  分别为  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{G}_1$  和  $\mathbf{B}_1$  的合力在  $O_0 \hat{x}_0$  和  $O_0 \hat{y}_0$  方向的分量. 同样可以得到连杆  $l_2$ ,  $l_3$ ,  $l_4$  在  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  处的合力和力矩:

$$\mathbf{R}_2 = R_{2X} \hat{x}_0 + R_{2Y} \hat{y}_0 \quad (\text{A9})$$

$$\mathbf{T}_{l_2} = ({}^1 T_{l_2} - {}^2 T_{l_3}) \hat{z}_0 \quad (\text{A10})$$

$$\mathbf{R}_3 = R_{3X} \hat{x}_0 + R_{3Y} \hat{y}_0 \quad (\text{A11})$$

$$\mathbf{T}_{l_3} = ({}^2 T_{l_3} - {}^3 T_{l_4}) \hat{z}_0 \quad (\text{A12})$$

$$\mathbf{R}_4 = R_{4X} \hat{x}_0 + R_{4Y} \hat{y}_0 \quad (\text{A13})$$

$$\mathbf{T}_{l_4} = ({}^3 T_{l_4}) \hat{z}_0 \quad (\text{A14})$$

其中,  $R_{2X}$  和  $R_{2Y}$  分别为  $\mathbf{N}_2$  在  $O_0 \hat{x}_0$  和  $O_0 \hat{y}_0$  方向的分量,  $R_{3X}$  和  $R_{3Y}$  分别为  $\mathbf{N}_3$  在  $O_0 \hat{x}_0$  和  $O_0 \hat{y}_0$  方向的分量,  $R_{4X}$

和  $R_{4Y}$  分别为升力  $L$ , 诱导阻力  $D_i$  和型阻  $D_x$  (或截面阻力  $N_4$ ) 的合力在  $O_0\hat{x}_0$  和  $O_0\hat{y}_0$  方向的分量. 于是, 根据式 (20) 和式 (21) 得到第  $j$  个广义主动力:

$$K_1 = R_{1X} + R_{2X} + R_{3X} + R_{4X} \quad (\text{A15})$$

$$K_2 = R_{1Y} + R_{2Y} + R_{3Y} + R_{4Y} \quad (\text{A16})$$

$$K_3 = \tau_1 + z_1 R_{2X} + z_2 R_{2Y} + z_1 R_{3X} + \\ {}^W \tau_{11} + z_2 R_{3Y} + z_1 R_{4X} + z_2 R_{4Y} \quad (\text{A17})$$

$$K_4 = -\tau_1 + 0.5z_3 R_{2X} + 0.5z_4 R_{2Y} + z_3 R_{3X} + \\ \tau_2 + z_4 R_{3Y} + z_3 R_{4X} + z_4 R_{4Y} \quad (\text{A18})$$

$$K_5 = -\tau_2 + 0.5z_5 R_{3X} + 0.5z_6 R_{3Y} + \\ \tau_3 + z_5 R_{4X} + z_6 R_{4Y} \quad (\text{A19})$$

$$K_6 = -\tau_3 + z_7 R_{4X} + z_8 R_{4Y} \quad (\text{A20})$$

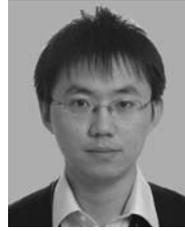
最后根据式 (22) 得到 Kane 方程并整理得到式 (23), 其中:

$$\begin{aligned} X_{11} &= -z_{15}, X_{12} = 0, X_{13} = -z_{16}z_1, X_{14} = -z_{17}z_3, \\ X_{15} &= -z_{18}z_5, X_{16} = -m_4z_7, X_{21} = 0, X_{22} = -z_{15}, \\ X_{23} &= -z_{16}z_2, X_{24} = -z_{17}z_4, X_{25} = -z_{18}z_6, \\ X_{26} &= -m_4z_8, X_{31} = -z_{16}z_1, X_{32} = -z_{16}z_2, \\ X_{33} &= -I_3 - z_{16}(z_1^2 + z_2^2), X_{34} = -z_{17}(z_1z_3 + z_2z_4), \\ X_{35} &= -z_{18}(z_1z_5 + z_2z_6), X_{36} = -m_4(z_1z_7 + z_2z_8), \\ X_{41} &= -z_{17}z_3, X_{42} = -z_{17}z_4, X_{43} = -z_{17}(z_1z_3 + z_2z_4), \\ X_{44} &= -I_6 - z_{17}(z_3^2 + z_4^2), X_{45} = -z_{18}(z_3z_5 + z_4z_6), \\ X_{46} &= -m_4(z_3z_7 + z_4z_8), X_{51} = -z_{18}z_5, X_{52} = -z_{18}z_6, \\ X_{53} &= -z_{18}(z_1z_5 + z_2z_6), X_{54} = -z_{18}(z_3z_5 + z_4z_6), \\ X_{55} &= -I_9 - (0.25m_3 + m_4)(z_5^2 + z_6^2), \\ X_{56} &= -m_4(z_5z_7 + z_6z_8), X_{61} = -m_4z_7, X_{62} = -m_4z_8, \\ X_{63} &= -m_4(z_1z_7 + z_2z_8), X_{64} = -m_4(z_3z_7 + z_4z_8), \\ X_{65} &= -m_4(z_5z_7 + z_6z_8), X_{66} = -m_4(I_{12} + z_7^2 + z_8^2), \\ z_{15} &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4, \\ z_{16} &= m_2 + m_3 + m_4, \\ z_{17} &= 0.5m_2 + m_3 + m_4, \\ z_{18} &= 0.5m_3 + m_4, \\ Y_1 &= m_2(z_2u_3^2 + 0.5z_4u_4^2) + m_3(z_2u_3^2 + z_4u_4^2 + 0.5z_6u_5^2) + \\ & m_4(z_2u_3^2 + z_4u_4^2 + z_6u_5^2 + z_8u_6^2) - R_{1X} - R_{2X} - R_{3X} - R_{4X}, \\ Y_2 &= m_2(-z_1u_3^2 - 0.5z_3u_4^2) + m_3(-z_1u_3^2 - z_3u_4^2 - 0.5z_5u_5^2) + \\ & m_4(-z_1u_3^2 - z_3u_4^2 - z_5u_5^2 - z_7u_6^2) - R_{1Y} - R_{2Y} - R_{3Y} - R_{4Y}, \\ Y_3 &= m_2[z_1(z_2u_3^2 + 0.5z_4u_4^2) + z_2(-z_1u_3^2 - 0.5z_3u_4^2)] + \\ & m_3[z_1(z_2u_3^2 + z_4u_4^2 + 0.5z_6u_5^2) + z_2(-z_1u_3^2 - z_3u_4^2)] + \\ & m_4[z_1(z_2u_3^2 + z_4u_4^2 + z_6u_5^2 + z_8u_6^2) + z_2(-z_1u_3^2 - z_3u_4^2)] - \\ & 0.5m_3z_2z_5u_5^2 - m_4z_2(z_5u_5^2 + z_7u_6^2) - \tau_1 - {}^W \tau_{11} - z_1R_{2X} - \\ & z_2R_{2Y} - z_1R_{3X} - z_2R_{3Y} - z_1R_{4X} - z_2R_{4Y}, \\ Y_4 &= 0.5m_2[z_3(z_2u_3^2 + 0.5z_4u_4^2) + z_4(-z_1u_3^2 - 0.5z_3u_4^2)] + \\ & m_3[z_3(z_2u_3^2 + z_4u_4^2 + 0.5z_6u_5^2) + z_4(-z_1u_3^2 - z_3u_4^2)] + \\ & m_4[z_3(z_2u_3^2 + z_4u_4^2 + z_6u_5^2 + z_8u_6^2) + z_4(-z_1u_3^2 - z_3u_4^2)] - \\ & 0.5m_3z_4z_5u_5^2 - m_4z_4(z_5u_5^2 + z_7u_6^2) + \tau_1 - \tau_2 - 0.5z_3R_{2X} - \\ & (0.5z_4R_{2Y} + z_3R_{3X} + z_4R_{3Y} + z_3R_{4X} + z_4R_{4Y}), \\ Y_5 &= 0.5m_3[z_5(z_2u_3^2 + z_4u_4^2 + 0.5z_6u_5^2) - z_6z_1u_3^2] + \\ & m_4[z_5(z_2u_3^2 + z_4u_4^2 + z_6u_5^2 + z_8u_6^2) - z_6(z_1u_3^2 + z_3u_4^2)] - \\ & 0.5m_3z_6(z_3u_4^2 + 0.5z_5u_5^2) - m_4z_6(z_5u_5^2 + z_7u_6^2) + (\tau_2 - \tau_3 - \\ & 0.5z_5R_{3X} - 0.5z_6R_{3Y} - z_5R_{4X} - z_6R_{4Y}), \\ Y_6 &= m_4[z_7(z_2u_3^2 + z_4u_4^2 + z_6u_5^2 + z_8u_6^2) + z_8(-z_1u_3^2)] - \\ & m_4z_8(z_3u_4^2 + z_5u_5^2 + z_7u_6^2) + (\tau_3 - z_7R_{4X} - z_8R_{4Y}). \end{aligned}$$

## References

- 1 Fish F E, Rohr J J. Review of Dolphin Hydrodynamics and Swimming Performance. United State Navy Technical Report 1801, United State Navy, USA, 1999
- 2 Taylor G. Analysis of the swimming of long and narrow animals. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 1952, **214**(1117): 158–183
- 3 Lighthill M J. Note on the swimming of slender fish. *Journal of Fluid Mechanics*, 1960, **9**(2): 305–317
- 4 Wu T Y T. Swimming of a waving plate. *Journal of Fluid Mechanics*, 1961, **10**(3): 321–344
- 5 Lighthill M J. Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency. *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, **44**(2): 265–301
- 6 Lighthill M J. Large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion. *Proceedings of the Royal Society of London Series B*, 1971, **179**(1055): 125–138
- 7 Cheng J Y, Zhuang L X, Tong B G. Analysis of swimming three-dimensional waving plates. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, **232**: 341–355
- 8 Tong Bing-Gang, Zhuang Li-Xian. Hydrodynamic model for fish's undulatory motion and its applications. *Chinese Journal of Nature*, 1998, **20**(1): 1–7  
(童秉纲, 庄礼贤. 描述鱼类波状游动的流体力学模型及其应用. 自然杂志, 1998, **20**(1): 1–7)
- 9 Gray J. Studies in animal locomotion VI. The propulsive powers of the dolphin. *Journal of Experimental Biology*, 1936, **13**: 192–199
- 10 Parry D A. The swimming of whales and a discussion of Gray's paradox. *Journal of Experimental Biology*, 1949, **26**(1): 24–34
- 11 Kayan V P. The hydrodynamic characteristics of the caudal fin of the dolphin. *Bionika*, 1979, 13: 9–15 (translated from Russian)
- 12 Lighthill M J. Hydromechanics of aquatic animal propulsion. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1969, **1**(1): 413–446
- 13 Bose N, Lien J. Propulsion of a fin whale (Balaenoptera physalus): why the fin whale is a fast swimmer. *Proceedings of the Royal Society of London Series B*, 1989, **237**(1287): 175–200
- 14 Chopra M G, Kambe T. Hydromechanics of lunata-tail swimming propulsion (Part 2). *Journal of Fluid Mechanics*, 1977, **79**(1): 49–69
- 15 Nakashima M, Tsuchiya D, Ono K. Dynamics of a two-joint dolphinlike propulsion mechanism: 4th report, analysis of a lunata caudal fin model. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers B*, 1999, **65**(629): 100–107

- 16 Khalil W, Gallot G, Boyer F. Dynamic modeling and simulation of a 3-D serial eel-like robot. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, 2007, **37**(6): 1259–1268
- 17 Yu J Z, Liu L Z, Tan M. Three-dimensional dynamic modelling of robotic fish: simulations and experiments. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2008, **30**(3–4): 239–258
- 18 Yu J Z, Li Y F, Hu Y H, Wang L. Modeling and control of a link-based dolphin-like robot capable of 3D movements. In: *Proceeding ICIRA 2008 Proceedings of the First International Conference on Intelligent Robotics and Applications (Part I)*. Berlin: Springer-Verlag, 2008. **5314**: 982–991
- 19 Xia Dan, Chen Wei-Shan, Liu Jun-Kao, Han Lu-Hui. Dynamic modeling of a fishlike robot with undulatory motion based on Kane's method. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, **45**(6): 41–49  
(夏丹, 陈维山, 刘军考, 韩路辉. 基于 Kane 方法的仿鱼机器人波状游动的动力学建模. *机械工程学报*, 2009, **45**(6): 41–49)
- 20 Kane T R, Levinson D A. The use of Kane's dynamical equations in robotics. *International Journal of Robotics Research*, 1983, **2**(3): 3–21
- 21 Li Feng-Wei. *The Introduction of the Air and Aerodynamics*. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2007  
(李凤蔚. 空气与气体动力学引论. 西安: 西北工业大学出版社, 2007)
- 22 Shape Effects on Drag. The shape of an object has a very great effect on the amount of drag [Online], available: <http://wright.nasa.gov/airplane/shaped.html>, February 10, 2012
- 23 Romanenko E V. *Fish and Dolphin Swimming*. Moscow: Pensoft, 2002. 128, 296–298
- 24 Shen F, Wei C M, Cao Z Q, Xu D, Yu J Z, Zhou C. Implementation of a multi-link robotic dolphin with two 3-DOF flippers. *Journal of Computational Information Systems*, 2011, **7**(7): 2601–2607



沈 飞 中国科学院自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为机器人动力学建模与运动控制.

E-mail: fei.shen@ia.ac.cn

(SHEN Fei Ph.D. candidate at the Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers dynamic model and motion control of robot.)



曹志强 中国科学院自动化研究所副研究员. 主要研究方向为多机器人系统和仿生机器人. 本文通信作者.

E-mail: zhiqiang.cao@ia.ac.cn

(CAO Zhi-Qiang Associate professor at the Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers multi-robot system and biomimetic robot. Corresponding author of this paper.)



徐 德 中国科学院自动化研究所研究员. 主要研究方向为机器人学及自动化, 机器人的视觉控制和智能控制.

E-mail: de.xu@ia.ac.cn

(XU De Professor at the Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers robotics and automation, visual control and intelligent control of robots.)



周 超 中国科学院自动化研究所助理研究员. 主要研究方向为仿生机器鱼设计与运动控制.

E-mail: chao.zhou@ia.ac.cn

(ZHOU Chao Assistant professor at the Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers design and motion control of biomimetic robot fish.)