

基于极大似然准则和最大期望算法的自适应 UKF 算法

王璐^{1,2} 李光春¹ 乔相伟^{1,3} 王兆龙¹ 马涛¹

摘要 针对噪声先验统计特性未知情况下的非线性系统状态估计问题,提出了基于极大似然准则和最大期望算法的自适应无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman filter, UKF)算法.利用极大似然准则构造含有噪声统计特性的对数似然函数,通过最大期望算法将噪声估计问题转化为对数似然函数数学期望极大化问题,最终得到带次优递推噪声统计估计器的自适应 UKF 算法.仿真分析表明,与传统 UKF 算法相比,提出的自适应 UKF 算法有效克服了传统 UKF 算法在系统噪声统计特性未知情况下滤波精度下降的问题,并实现了系统噪声统计特性的在线估计.

关键词 非线性滤波, 自适应 UKF 算法, 噪声统计估计器, 极大似然准则, 最大期望算法

引用格式 王璐, 李光春, 乔相伟, 王兆龙, 马涛. 基于极大似然准则和最大期望算法的自适应 UKF 算法. 自动化学报, 2012, 38(7): 1200–1210

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.01200

An Adaptive UKF Algorithm Based on Maximum Likelihood Principle and Expectation Maximization Algorithm

WANG Lu^{1,2} LI Guang-Chun¹ QIAO Xiang-Wei^{1,3} WANG Zhao-Long¹ MA Tao¹

Abstract In order to solve the state estimation problem of nonlinear systems without knowing prior noise statistical characteristics, an adaptive unscented Kalman filter (UKF) based on the maximum likelihood principle and expectation maximization algorithm is proposed in this paper. In our algorithm, the maximum likelihood principle is used to find a log likelihood function with noise statistical characteristics. Then, the problem of noise estimation turns out to be maximizing the mean of the log likelihood function, which can be achieved by using the expectation maximization algorithm. Finally, the adaptive UKF algorithm with a suboptimal and recurred noise statistical estimator can be obtained. The simulation analysis shows that the proposed adaptive UKF algorithm can overcome the problem of filtering accuracy declination of traditional UKF used in nonlinear filtering without knowing prior noise statistical characteristics and that the algorithm can estimate the noise statistical parameters online.

Key words Nonlinear filtering, adaptive unscented Kalman filter (UKF) algorithm, noise statistical estimator, maximum likelihood principle, expectation maximization (EM) algorithm

Citation Wang Lu, Li Guang-Chun, Qiao Xiang-Wei, Wang Zhao-Long, Ma Tao. An adaptive UKF algorithm based on the maximum likelihood principle and expectation maximization algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(7): 1200–1210

非线性系统滤波问题广泛存在于实际应用中.非线性滤波的关键是计算随机向量沿非线性函数传递的后验概率分布,为此,各国学者提出了大量解

决方法^[1-3].扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman filter, EKF)是一种常用的非线性高斯滤波方法,通过对系统进行一阶线性化截断,将非线性系统近似为线性系统,进而利用传统卡尔曼滤波算法进行滤波.然而, EKF 算法存在线性化精度较低和需要计算复杂的雅可比矩阵等问题,且无法应用于不存在雅可比矩阵的非线性系统,这些都限制了 EKF 算法的应用^[1].粒子滤波(Particle filter, PF)是一种基于贝叶斯估计的贯序重要性采样算法,该方法适用于非线性非高斯系统的状态估计,尤其对强非线性系统的滤波问题有独特的优势.但是,由于 PF 需要大量粒子样本近似概率密度函数,粒子数会随着系统状态量维数的增加而增长,使用 PF 解决高阶系统滤波问题时,大量的粒子导致重采样

收稿日期 2011-09-29 录用日期 2012-02-27
Manuscript received September 29, 2011; accepted February 27, 2012

国际合作项目(2010DFR80140)资助
Supported by International Cooperation of China (2010DFR80140)

本文责任编辑 方海涛
Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao
1. 哈尔滨工程大学自动化学院 哈尔滨 150001 2. 上海交通大学电子信息与电气工程学院 上海 200240 3. 西安航天精密机电研究所 西安 710100
1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001 2. Electronic Information and Electric Engineering School, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240 3. Xi'an Aerospace Precision Electromechanical Institute, Xi'an 710100

过程过于复杂, 使粒子滤波很难应用于实际系统^[2]. Julier 等提出了基于 Unscented 变换的无迹卡尔曼滤波 (Unscented Kalman filter, UKF) 算法, Unscented 变换能够以至少二阶泰勒精度逼近非线性系统状态的后验分布, 且无需计算复杂的雅可比矩阵, 其精度高于 EKF 算法且计算量又明显小于 PF 算法^[3].

困扰 UKF 算法广泛应用于实际系统的一个主要问题是噪声统计特性未知时, UKF 滤波精度下降甚至发散, 这是因为 UKF 算法以最小方差估计原理为理论基础, 其前提是必须精确已知系统噪声的先验统计特性^[4-6]. 为了解决噪声统计特性未知情况下的滤波问题, 各国学者提出了各种自适应滤波算法. 这些自适应滤波算法主要分为两大类: 1) 滤波器在线调整算法; 2) 噪声统计特性在线估计算法. 第一类算法主要有强跟踪滤波^[7]、渐消因子滤波^[8]等, 其主要手段是通过引入相应因子来抑制滤波器发散, 使得滤波器稳定, 然而此类方法很难提高滤波精度. 第二类算法主要包括: 贝叶斯法^[9-11]、极大似然估计法^[12-18]、相关法^[19-20]和协方差匹配法^[21-22]. 其中, 贝叶斯法由于涉及到多重积分运算, 计算量大且未必能得到最优封闭解, 多只限于理论研究; 协方差匹配法则因为存在稳态估计误差而限制了滤波精度的进一步提升; 相关法目前也只应用于线性系统中; 极大似然法由于能够较为直观地构造含有参数估计值的概率密度函数, 且计算量适中而得到较为广泛的研究. 文献 [12] 利用极大后验 (Maximum a posterior, MAP) 准则, 得到了带噪声统计估计器的自适应卡尔曼滤波算法. 文献 [13] 和文献 [14-16] 分别将基于 MAP 准则的噪声统计估计器推广到 EKF 和 UKF 算法中, 使传统非线性滤波方法适用于含有未知噪声统计特性的非线性系统. 文献 [17] 利用极大似然法对系统噪声均值、方差、自回归系数等参数进行估计. 然而, 在通常情况下, 直接通过极大化由极大似然准则或极大后验准则构造的概率密度函数得到系统未知参数的点估计是十分困难和繁琐的, 最大期望 (Expectation maximum, EM) 算法是在概率模型中寻找参数极大似然或极大后验估计的算法^[23]. 通过使用 EM 算法, 可以使噪声二阶矩的计算更加简便, 推导过程更加直观, 从而简化噪声参数的估计过程. 针对以上分析, 本文在非扩维 UKF 算法基础上, 利用极大似然准则, 构造含有噪声统计参数的对数似然函数, 并通过最大期望算法, 将噪声估计问题转化为对数似然函数数学期望极大化问题, 最终得到带次优递推噪声估计器的自适应 UKF 算

法.

1 噪声均值非零时的 UKF 算法

考虑如下含有加性高斯噪声的离散非线性系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (1)$$

其中, $k \geq 0$ 为离散时间变量, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$ 为输出向量. 非线性函数 $f \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $h \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. 过程噪声 \mathbf{w}_{k-1} 和量测噪声 \mathbf{v}_k 分别为 n 维和 m 维的高斯白噪声, 并具有以下统计特性:

$$\begin{cases} E[\mathbf{w}_k] = \mathbf{q}, \quad \text{cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j) = Q \cdot \delta_{k,j} \\ E[\mathbf{v}_k] = \mathbf{r}, \quad \text{cov}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j) = R \cdot \delta_{k,j} \\ \text{cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

在很多情况下, 系统噪声都是非零均值的, 因此, 给出噪声均值非零情况下的 UKF 算法.

由于系统过程噪声和量测噪声为非零均值的高斯噪声且其均值分别为 \mathbf{q} 和 \mathbf{r} . 则系统噪声可写为如下形式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_k = \mathbf{w}_k - \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{r} \end{cases} \quad (3)$$

显然, $\boldsymbol{\mu}_k$ 和 $\boldsymbol{\eta}_k$ 为互不相关的零均值高斯白噪声, 且其方差分别为 Q 和 R .

此时, 离散非线性系统 (1) 可以被等价表述为以下形式:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q} + \boldsymbol{\mu}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}_k \end{cases} \quad (4)$$

则 UKF 算法的计算步骤如下:

步骤 1. 初始化系统变量

步骤 2. 时间更新

根据确定的采样策略, 得到服从均值为 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 、方差为 P_{k-1} 的 Sigma 点 $\{\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}\}$, $i = 0, \dots, 2n$, 为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{0,k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{\chi}_{i,k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + (\sqrt{(n+\lambda)P_{k-1}})_i, \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \boldsymbol{\chi}_{i,k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - (\sqrt{(n+\lambda)P_{k-1}})_i, \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad i = n+1, n+2, \dots, 2n \end{cases} \quad (5)$$

Sigma 点的对应权值为

$$\begin{cases} \omega_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} \\ \omega_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta \\ \omega_i^{(m)} = \omega_i^{(c)} = \frac{0.5}{n + \lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \end{cases} \quad (6)$$

其中, 算子 $\sqrt{\cdot}$ 表示对称阵的 Cholesky 分解; α 描述了 Sigma 点在均值周围的延伸程度; β 为调整参数, $\lambda = \alpha^2(n + k) - n$, k 描述了系统分布信息. 本文中取 $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $k = 2$.

计算 Sigma 点 $\{\chi_{i,k|k-1}\}$, $i = 0, \dots, 2n$ 沿非线性函数 $f(\cdot)$ 的传播结果, 并考虑非零均值噪声的作用.

$$\chi_{i,k|k-1} = f(\chi_{i,k-1}) + \mathbf{q}, \quad i = 0, \dots, 2n \quad (7)$$

从而得到随机向量沿非线性函数 $f(\cdot)$ 传播的后验均值和协方差:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot \chi_{i,k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot f(\chi_{i,k-1}) + \mathbf{q} \quad (8)$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(c)} \cdot (\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \times (\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + Q \quad (9)$$

步骤 3. 量测更新

根据确定的采样策略, 得到服从均值为 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 、方差为 $P_{k|k-1}$ 的 Sigma 点 $\{\chi_{i,k|k-1}\}$, $i = 0, \dots, 2n$.

$$\begin{cases} \chi_{0,k|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \chi_{i,k|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + (\sqrt{(n + \lambda)P_{k|k-1}})_i, \\ \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \chi_{i,k|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - (\sqrt{(n + \lambda)P_{k|k-1}})_i, \\ \quad i = n + 1, n + 2, \dots, 2n \end{cases} \quad (10)$$

其对应权值与式 (6) 的权值相同.

计算 Sigma 点 $\{\chi_{i,k|k-1}\}$, $i = 0, \dots, 2n$ 沿非线性函数 $h(\cdot)$ 的传播结果, 并考虑非零均值噪声的作用.

$$\zeta_{i,k|k-1} = h(\chi_{i,k|k-1}) + \mathbf{r}, \quad i = 0, \dots, 2n \quad (11)$$

得到随机向量沿非线性函数 $h(\cdot)$ 传播的后验均值、自协方差和互协方差:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot \zeta_{i,k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot h(\chi_{i,k|k-1}) + \mathbf{r} \quad (12)$$

$$P_{\tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}} = \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(c)} (\zeta_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \cdot (\zeta_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T + R \quad (13)$$

$$P_{\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}} = \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \times (\zeta_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \quad (14)$$

步骤 4. 滤波更新

根据量测数据 \mathbf{z}_k 得到最小方差估计结果为

$$K = P_{\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}} P_{\tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}}^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K \cdot (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \quad (16)$$

$$P_k = P_{k|k-1} - K P_{\tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}} K^T \quad (17)$$

步骤 4 完成后, 则返回步骤 2, 开始下一时刻的滤波过程.

2 基于极大似然准则和 EM 算法的自适应 UKF 算法

噪声均值非零时的 UKF 算法能够解决噪声均值非零情况下含有加性噪声的非线性系统状态估计问题, 然而, 仅在噪声协方差矩阵已知情况下, 此方法才能够得到系统状态较好的估计结果. 当噪声协方差矩阵未知时, 滤波精度将会降低甚至导致滤波器发散. 针对这一问题, 本文利用极大似然准则构造噪声统计特性参数的似然函数, 进而通过 EM 算法, 得到使对数似然函数期望最大化的系统参数的在线点估计, 从而增强滤波器的鲁棒性, 提高滤波精度.

对于复杂的非线性系统, 直接通过极大化似然函数得到参数的极大似然估计是很困难的, EM 算法是在概率模型中寻找极大似然估计的迭代算法, 通过应用 EM 算法, 能够使计算极大似然估计的过程更加直观和简便. EM 算法分为两步, 即求期望 (Expectation step, E step) 和最大化 (Maximum step, M step). 第一步是计算期望, 即利用对隐藏变量的现有估计值, 计算极大似然估计结果; 第二步是最大化, 即最大化在 E step 求得的极大似然值来计算参数的点估计. 最后, M step 中得到的参数的估计值将被用于下一个 E step 中, 实现迭代运算.

下面, 根据极大似然准则和 EM 算法对系统噪声的统计特性进行估计.

定理 1. 考虑含有非零均值加性高斯噪声的离散非线性系统 (1), 噪声的统计特性服从式 (2), 根据极大似然准则和 EM 算法, 得到系统的最优噪声估计器为

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\hat{\mathbf{x}}_{j|k} - \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot f(\chi_{i,j-1}) \right] \quad (18)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \text{diag} \left\{ (\hat{\mathbf{x}}_{j|k} \hat{\mathbf{x}}_{j|k}^T + P_j - \mathbf{q}\mathbf{q}^T) - \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(c)} \cdot f(\mathbf{x}_{i,j-1}) \cdot \mathbf{x}_{i,j}^T - \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(c)} \cdot \mathbf{x}_{i,j} \cdot f(\mathbf{x}_{i,j-1})^T + \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(c)} \cdot f(\mathbf{x}_{i,j-1}) \cdot f(\mathbf{x}_{i,j-1})^T \right\} \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\mathbf{z}_j - \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot h(\mathbf{x}_{i,j}) \right] \quad (20)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \text{diag} \left\{ \mathbf{z}_j \mathbf{z}_j^T - \mathbf{r}\mathbf{r}^T - \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot h(\mathbf{x}_{i,j}) \cdot \mathbf{z}_j^T - \mathbf{z}_j \cdot \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot h(\mathbf{x}_{i,j})^T + \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(c)} \cdot h(\mathbf{x}_{i,j}) \cdot h(\mathbf{x}_{i,j})^T \right\} \quad (21)$$

其中, Sigma 点集 $\{\mathbf{x}_{i,j}\}$ 服从均值为 $\hat{\mathbf{x}}_{j|k}$ 、方差为 $P_{j|k}$ 的高斯分布, Sigma 点集 $\{\mathbf{x}_{i,j-1}\}$ 服从均值为 $\hat{\mathbf{x}}_{j-1|k}$ 、方差为 $P_{j-1|k}$ 的高斯分布, $\text{diag}\{\cdot\}$ 算子表示矩阵的对角线形式. $\hat{\mathbf{x}}_{j|k}$, $\hat{\mathbf{x}}_{j-1|k}$ 分别为 j , $j-1$ 时刻系统状态的平滑估计结果, $P_{j|k}$, $P_{j-1|k}$ 分别为 j , $j-1$ 时刻系统状态平滑估计的误差协方差矩阵.

证明. 假设 $\Theta = \{\mathbf{r}, R, \mathbf{q}, Q\}$ 为待估计的系统噪声统计特性, 则基于极大似然准则和 EM 算法的系统参数点估计为

$$\hat{\Theta}_{\text{EM}} = \arg \max_{\Theta} E\{\ln[L(\Theta|\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{1:k})]\} \quad (22)$$

其中, $\ln[L(\Theta|\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{1:k})]$ 为参数 Θ 的对数似然函数. 根据似然函数的定义, 有:

$$L(\Theta|\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{1:k}) = p(\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{1:k}|\Theta) \quad (23)$$

由于系统方程为一个马尔科夫过程, 则根据极大似然准则和条件概率的性质, 系统状态向量和观测向量的联合概率密度函数为

$$p(\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{1:k}|\Theta) = p(\mathbf{x}_0|\Theta) \prod_{j=1}^k p(\mathbf{x}_j|\mathbf{x}_{j-1}, \Theta) \times \prod_{j=1}^k p(\mathbf{z}_j|\mathbf{x}_j, \Theta) \quad (24)$$

假设系统的初始状态、系统状态向量沿非线性函数的传播过程和观测数据的似然函数均服从高斯

分布, 则得到系统初始状态的条件概率为

$$p(\mathbf{x}_0|\Theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |P_0|^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T P_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)]}{2} \right\} \quad (25)$$

状态一步预测的条件概率为

$$p(\mathbf{x}_j|\mathbf{x}_{j-1}, \Theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |Q|^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{[\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}]^T Q^{-1} [\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}]}{2} \right\} \quad (26)$$

观测数据的条件概率为

$$p(\mathbf{z}_j|\mathbf{x}_j, \Theta) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |R|^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{[\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}]^T R^{-1} [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}]}{2} \right\} \quad (27)$$

其中, $|\cdot|$ 算子表示矩阵的行列式.

根据以上结论, 得到系统状态向量和观测向量的对数似然函数为

$$\begin{aligned} \ln[L(\Theta|\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{1:k})] = & -\frac{k(n+m)+n}{2} \ln(2\pi) - \\ & \frac{1}{2} \ln |P_0| - \frac{1}{2} [(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T P_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)] - \\ & \frac{k}{2} \ln |Q| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \{[\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}]^T Q^{-1} [\mathbf{x}_j - \\ & f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}]\} - \frac{k}{2} \ln |R| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \{[\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \\ & \mathbf{r}]^T R^{-1} [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}]\} \end{aligned} \quad (28)$$

根据系统状态向量和观测向量的对数似然函数, 通过 EM 算法对系统噪声的统计特性进行估计.

E step. 首先计算对数似然函数 $\ln[L(\Theta|\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{1:k})]$ 的数学期望, 得到

$$\begin{aligned} E \ln[L(\Theta|\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{1:k})] = & -\frac{k(n+m)+n}{2} \ln(2\pi) - \\ & \frac{1}{2} \ln |P_0| - \frac{1}{2} E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T P_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)] - \\ & \frac{k}{2} \ln |Q| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k E\{[\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}]^T Q^{-1} [\mathbf{x}_j - \\ & f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}]\} - \frac{k}{2} \ln |R| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k E\{[\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \\ & \mathbf{r}]^T R^{-1} [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}]\} \end{aligned} \quad (29)$$

由于 $E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T P_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)]$ 仅与滤波器初

值有关, 定义常数 c 为

$$c \triangleq -\frac{k(n+m)+n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |P_0| - \frac{1}{2} \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T P_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)] \quad (30)$$

定义性能指标函数 J 为对数似然函数的数学期望, 考虑到过程噪声和量测噪声为互不相关的高斯噪声, 因此 Q 和 R 均为正定对角阵, 则:

$$J = c - \frac{k}{2} \ln |Q| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \mathbb{E} \text{tr} \{ Q^{-1} [\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}] [\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}]^T \} - \frac{k}{2} \ln |R| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \mathbb{E} \{ \text{tr} \{ R^{-1} [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}] [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}]^T \} \} \quad (31)$$

M-step. 寻找使目标函数 J 极大化的参数估计. 根据梯度下降算法, 当系统参数估计满足式 (32) 时, 该参数是使目标函数极小化的点估计.

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial Q} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial R} = 0 \quad (32)$$

分别计算目标函数 J 对于 $\mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R$ 的偏导数, 得到

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{q}} = \text{tr}(Q^{-1}) \sum_{j=1}^k [\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}] \quad (33)$$

$$\frac{\partial J}{\partial Q} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \mathbb{E} \{ \text{tr} \{ Q^{-2} [\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}] [\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}]^T \} \} - \frac{k}{2} |Q|^{-1} \quad (34)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} = \text{tr}(R^{-1}) \sum_{j=1}^k [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}] \quad (35)$$

$$\frac{\partial J}{\partial R} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \mathbb{E} \{ \text{tr} \{ R^{-2} [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}] [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}]^T \} \} - \frac{k}{2} |R|^{-1} \quad (36)$$

由于 Q 和 R 是正定对角阵, 因此有:

$$\begin{cases} |Q| = \text{tr}(Q) \\ |R| = \text{tr}(R) \end{cases} \quad (37)$$

考虑式 (37) 并令目标函数 J 对于 $\mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R$

的偏导数等于 0, 得到噪声统计特性的点估计为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1})] \\ \hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{ [\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}] [\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}]^T \} \\ \hat{\mathbf{r}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j)] \\ \hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{ [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}] [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}]^T \} \end{cases} \quad (38)$$

其中, 考虑到:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1})] = \mathbf{q} \\ \mathbb{E}[\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j)] = \mathbf{r} \end{cases} \quad (39)$$

将式 (38) 中 \hat{Q}_k 和 \hat{R}_k 的表达式展开, 得到:

$$\begin{cases} \hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{ [\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}] [\mathbf{x}_j - f(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}]^T \} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T - \mathbf{q} \mathbf{q}^T - f(\mathbf{x}_{j-1}) \mathbf{x}_j^T - \mathbf{x}_j f(\mathbf{x}_{j-1})^T + f(\mathbf{x}_{j-1}) f(\mathbf{x}_{j-1})^T] \\ \hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{ [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}] [\mathbf{z}_j - h(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}]^T \} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\mathbf{z}_j \mathbf{z}_j^T - \mathbf{r} \mathbf{r}^T - h(\mathbf{x}_j) \mathbf{z}_j^T - \mathbf{z}_j h(\mathbf{x}_j)^T + h(\mathbf{x}_j) h(\mathbf{x}_j)^T] \end{cases} \quad (40)$$

系统状态向量 \mathbf{x}_j 是不可观测的, 而考虑到滤波器平滑估计值的条件概率密度函数服从以下分布^[24]

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 \sim N(\hat{\mathbf{x}}_0, P_0) \\ p(\mathbf{x}_j | \mathbf{z}_{1:k}) \sim N(\hat{\mathbf{x}}_{j|k}, P_{j|k}), \quad j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (41)$$

分别以 $j, j-1$ 时刻系统状态的平滑估计值及其误差协方差矩阵进行 Sigma 点采样, 得到 j 时刻 Sigma 点集 $\{\chi_{i,j}\}$ 和 $j-1$ 时刻 Sigma 点集 $\{\chi_{i,j-1}\}$, 并利用生成的 Sigma 点集代替式 (38) 中 $\hat{\mathbf{q}}_k, \hat{\mathbf{r}}_k$ 的表达式及式 (40) 中的随机向量进行计算, 可以得到 k 时刻系统噪声估计器表达式 (18)~(21) 成立. \square

注 1. 由于自然对数 $\ln(\cdot)$ 是一个连续且在似然函数值域内严格递增的上凸函数, 因此, 极大化似然函数的数学期望和极大化对数似然函数的数学期望得到的噪声统计参数估计的结果是等价的. 由于对数似然函数包含指数运算, 因此, 对似然函数求对数能够简化运算过程.

推论 1. 在定理 1 的基础上, 以滤波估计值代替

滤波平滑值, 并以噪声均值估计值 $\hat{\mathbf{q}}_k$, $\hat{\mathbf{r}}_k$ 代替噪声真实均值 \mathbf{q} , \mathbf{r} , 得到次优的系统噪声估计器的递推表达式为

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} \left\{ (k-1)\hat{\mathbf{q}}_{k-1} + [\hat{\mathbf{x}}_k - \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot f(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1})] \right\} \quad (42)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \frac{1}{k} \left\{ (k-1)\hat{\mathbf{Q}}_{k-1} + \text{diag} \left\{ (\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{x}}_k^T + P_k - \hat{\mathbf{q}}_k \hat{\mathbf{q}}_k^T) - \left[\sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(c)} \cdot f(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i,k}^T \right] - \left[\sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(c)} \cdot \boldsymbol{\chi}_{i,k} \cdot f(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1})^T \right] + \left[\sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(c)} \cdot f(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}) \cdot f(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1})^T \right] \right\} \right\} \quad (43)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_k = \frac{1}{k} \left\{ (k-1)\hat{\mathbf{r}}_{k-1} + [\mathbf{z}_k - \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot h(\boldsymbol{\chi}_{i,k})] \right\} \quad (44)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{k} \left\{ (k-1)\hat{\mathbf{R}}_{k-1} + \text{diag} \left\{ (\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T - \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_k^T) - \left[\sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot h(\boldsymbol{\chi}_{i,k}) \cdot \mathbf{z}_k^T \right] - \left[\mathbf{z}_k \cdot \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot h(\boldsymbol{\chi}_{i,k})^T \right] + \left[\sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(c)} \cdot h(\boldsymbol{\chi}_{i,k}) \cdot h(\boldsymbol{\chi}_{i,k})^T \right] \right\} \right\} \quad (45)$$

其中, Sigma 点集 $\{\boldsymbol{\chi}_{i,k}\}$ 服从均值为 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 、方差为 P_k 的高斯分布, Sigma 点集 $\{\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}\}$ 服从均值为 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 、方差为 P_{k-1} 的高斯分布, $\text{diag}\{\cdot\}$ 算子表示矩阵的对角线形式. $\hat{\mathbf{x}}_k$, $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 分别为 k , $k-1$ 时刻的状态估计结果, P_k , P_{k-1} 分别为 k , $k-1$ 时刻状态估计的误差协方差矩阵.

证明. 以滤波估计值的分布进行采样后得到的 Sigma 点代替式 (18)~(21) 中由平滑估计值的分布采样后得到的 Sigma 点. 此时噪声估计器为次优的噪声估计器.

考虑式 (18) 中 $\hat{\mathbf{q}}_k$ 的估计表达式, 并以滤波估计值的分布进行采样后得到的 Sigma 点代替由平滑估计值的分布采样后得到的 Sigma 点, 得到:

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{\mathbf{x}}_j - \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot f(\boldsymbol{\chi}_{i,j-1})] = \frac{k-1}{k} \left\{ \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} [\hat{\mathbf{x}}_j - \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot f(\boldsymbol{\chi}_{i,j-1})] \right\} + \frac{1}{k} [\hat{\mathbf{x}}_k - \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot f(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1})] \quad (46)$$

显然 $\frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (\hat{\mathbf{x}}_j - \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^{(m)} \cdot f(\boldsymbol{\chi}_{i,j-1})) =$

$\hat{\mathbf{q}}_{k-1}$, 因此可以得到式 (42) 成立, 同理可得式 (43)~(45) 成立. \square

注 2. 定理 1 以滤波器平滑估计值代替系统真实状态的分布进行计算, 且需要保存滤波器开始工作时所有的平滑估计值、估计的误差协方差矩阵和观测信息, 噪声估计器的计算量将随时间的推移而增大, 无法实现参数的在线估计. 因此, 在推论 1 中, 以滤波估计值代替滤波平滑值, 并利用定理 1 中噪声估计器的表达式, 得到系统的次优递推噪声估计器.

注 3. 定理 1 中以滤波平滑值进行噪声统计特性的估计, 此时将会得到系统噪声统计特性的最优无偏估计. 推论 1 中, 以滤波估计值代替滤波平滑值进行噪声估计, 因此该算法是一种次优算法, 当滤波器状态估计结果最优时, 噪声统计特性的估计值是渐近无偏的.

注 4. UKF 算法以 Unscented 变换逼近非线性函数的后验分布, 虽然能达到二阶以上的精度, 但不能以任意阶精度对系统的后验分布进行近似. 因此, UKF 算法是一种次优滤波算法, 其估计结果一定是有偏且非最小方差的, 且随着系统非线性程度的增强, 系统估计精度将会下降, 这会随之影响噪声估计器的估计精度. 故推论 1 所述的噪声统计估计器只能给出系统噪声统计特性的有偏估计, 且偏差随着系统非线性程度的增强而增大.

根据非扩维 UKF 算法和推论 1 中给出的递推噪声估计器表达式, 能够得到带次优递推噪声估计器的自适应 UKF 算法. 下面以 k 时刻滤波过程为例, 说明自适应 UKF 算法的滤波过程.

首先, 根据 $k-1$ 时刻系统噪声统计特性的估计值 $\hat{\Theta}_{k-1} = \{\hat{\mathbf{r}}_{k-1}, \hat{\mathbf{R}}_{k-1}, \hat{\mathbf{q}}_{k-1}, \hat{\mathbf{Q}}_{k-1}\}$, 使用式 (5)~(17), 得到 k 时刻系统状态的估计值和误差协方差矩阵. 其中, 式 (8)~(13) 中使用的系统噪声统计特性分别以 $k-1$ 时刻估计的系统噪声统计特性代替.

进而, 根据滤波更新后得到的系统状态估计值、估计误差协方差矩阵和 $k-1$ 时刻系统噪声统计特性的估计值 $\hat{\Theta}_{k-1}$, 利用递推式 (42)~(45), 对 k 时刻噪声统计特性进行估计.

3 仿真分析

为了验证噪声统计估计器的有效性, 分别设计了过程噪声统计特性未知、量测噪声统计特性未知的两个仿真实验对算法进行验证, 并通过自适应 UKF 算法和自适应 EKF 算法的对比, 分析了二者的性能. 其中, 仿真实验的均方根误差 (Root mean

square error, RMSE) 定义为

$$E = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i\|_2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

3.1 过程噪声统计特性未知

考虑如下一阶非线性高斯系统模型:

$$\begin{cases} x_k = 0.5x_{k-1} + \frac{0.2x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} + w_{k-1} \\ z_k = 10x_k + \frac{x_k^2}{20} + v_k \end{cases} \quad (48)$$

假设 w 和 v 均为高斯噪声且服从如下分布:

$$\begin{cases} w \sim N(1.2, 0.6) \\ v \sim N(1.0, 0.8) \end{cases} \quad (49)$$

假设非线性系统的理论初值为

$$x_0 = 1 \quad (50)$$

滤波器的初值选取为

$$\begin{cases} \hat{x}_0 = 1.1 \\ P_0 = 0.01 \end{cases} \quad (51)$$

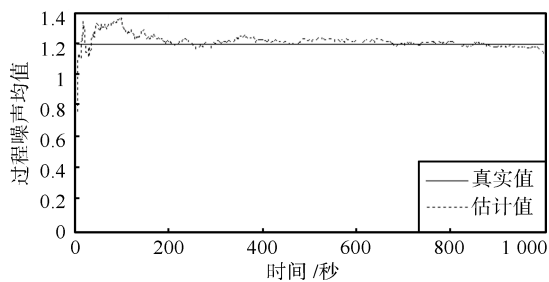
假设系统量测噪声的统计特性精确已知, 而系统过程噪声的统计特性不准确, 选取两组过程噪声的初始均值和协方差, 两组噪声统计特性的初始值分别接近和远离真实值, 其中, 情况 1 为

$$\hat{q}_0 = 0.2, \quad \hat{Q}_0 = 0.5 \quad (52)$$

情况 2 为

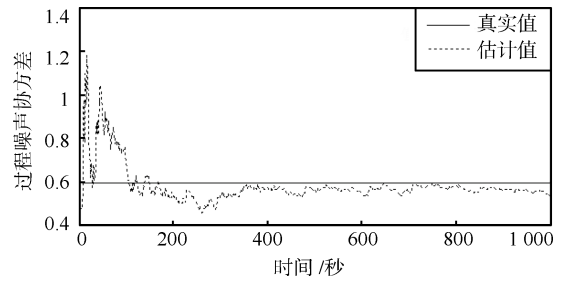
$$\hat{q}_0 = 4.0, \quad \hat{Q}_0 = 16.0 \quad (53)$$

分别采用 UKF 算法和本文提出的自适应 UKF 算法进行仿真, 检验本文提出算法的滤波效果, 并检验当噪声统计特性初始值分别接近和远离真实值情况下, 噪声统计特性估计器的收敛效果. 两种情况下自适应 UKF 算法得到的噪声统计特性估计结果如图 1 和图 2 所示, 传统 UKF 算法和自适应 UKF 算法的均方根误差对比如图 3 所示. 表 1 为使用不同算法所得到的估计误差均值和协方差.



(a) 过程噪声均值

(a) Mean of process noise statistics

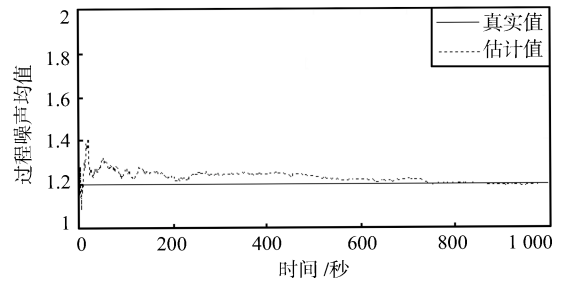


(b) 过程噪声协方差

(b) Covariance of process noise statistics

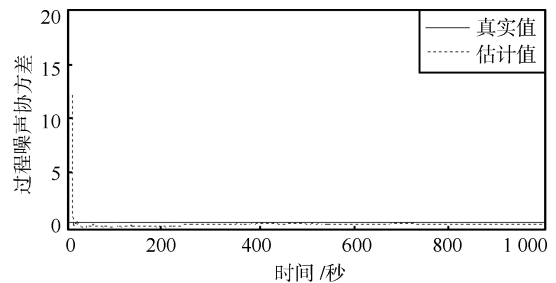
图 1 过程噪声统计特性的估计结果 (情况 1)

Fig. 1 Estimation of process noise statistics (Case 1)



(a) 过程噪声均值

(a) Mean of process noise statistics



(b) 过程噪声协方差

(b) Covariance of process noise statistics

图 2 过程噪声统计特性的估计结果 (情况 2)

Fig. 2 Estimation of process noise statistics (Case 2)

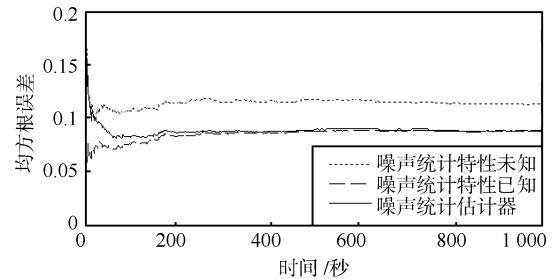


图 3 均方根误差

Fig. 3 Root mean square error

由图 1 可以看出, 过程噪声均值的估计值 \hat{q} 和协方差的估计值 \hat{Q} 均能够在 100 个滤波周期内收

敛, 证明了式 (42) 和式 (43) 所描述的过程噪声统计估计器的有效性. 通过图 3 可以看出, 过程噪声统计特性未知情况下, 使用本文提出的自适应 UKF 算法时, 状态估计的均方根误差小于 UKF 算法, 且能够达到噪声统计特性精确已知情况下 UKF 算法的精度. 在仿真开始时, 由于噪声统计特性的估计值还未收敛, 自适应 UKF 算法的估计精度与 UKF 算法的估计精度相当, 然而随着滤波过程的进行, 自适应 UKF 算法的精度逐渐提高. 由图 2 可以看出, 当系统过程噪声初值与真实值相差较多时, 噪声统计特性估计器仍能够在较短时间内收敛. 通过表 1 可以看出, 自适应 UKF 算法在噪声统计特性未知时, 估计误差的均值和方差与噪声统计特性已知情况下 UKF 算法估计误差相比, 没有明显增大. 而噪声统计特性未知时, 传统 UKF 算法得到的滤波误差有明显增大, 其估计误差的均值和方差与自适应 UKF 算法相比均有明显增大.

表 1 自适应 UKF 和传统 UKF 算法估计精度对比

Table 1 Estimation accuracy contrast of adaptive UKF and traditional UKF algorithm

	估计误差均值	估计误差协方差
UKF 算法 (噪声统计特性已知)	0.0001	0.0822
UKF 算法 (噪声统计特性未知)	0.1137	0.1006
自适应 UKF 算法	0.0006	0.0825

3.2 系统量测噪声统计特性未知

仍考虑式 (48) 所述的一阶非线性高斯系统模型并假设此时系统噪声 w 和 v 均为高斯噪声且服从如下分布

$$\begin{cases} w \sim N(1.2, 10) \\ v \sim N(1.0, 16) \end{cases} \quad (54)$$

假设非线性系统的理论初值和滤波器的初值选取满足式 (50) 和式 (51).

假设系统量测噪声的统计特性精确已知而系统过程噪声的统计特性不准确, 与第 3.1 节类似, 取两组噪声统计特性初始值进行仿真分析, 其中情况 1 为

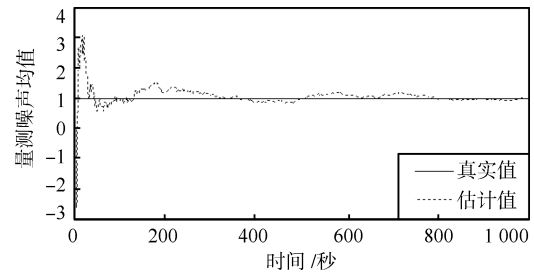
$$\hat{r}_0 = 0.2, \quad \hat{R}_0 = 12 \quad (55)$$

情况 2 为

$$\hat{r}_0 = 1.8, \quad \hat{R}_0 = 100 \quad (56)$$

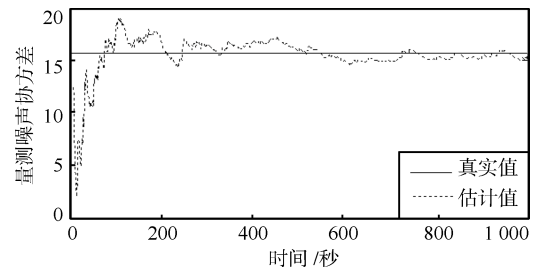
分别采用 UKF 算法和本文提出的自适应 UKF 算法进行仿真. 两种情况下自适应 UKF 算法得到的噪声统计特性估计结果如图 4 和图 5 所示, 传统 UKF 算法和自适应 UKF 算法的均方根误差对比如

图 6 所示. 表 2 为使用不同算法所得到的估计误差均值和协方差.



(a) 量测噪声均值

(a) Mean of measurement noise statistics



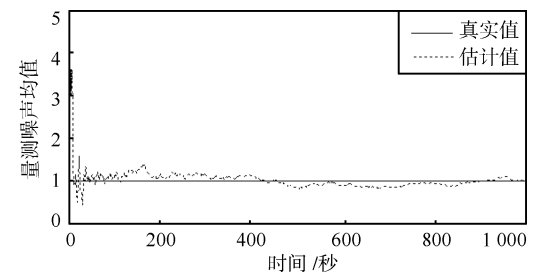
(b) 量测噪声协方差

(b) Covariance of measurement noise statistics

图 4 量测噪声统计特性的估计结果 (情况 1)

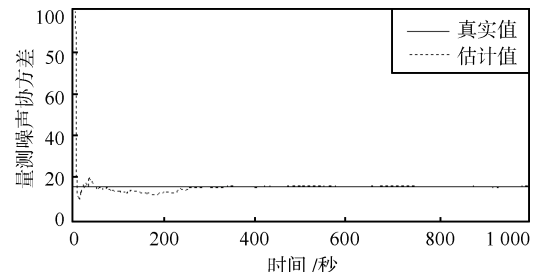
Fig. 4 Estimation of measurement noise statistics

(Case 1)



(a) 量测噪声均值

(a) Mean of measurement noise statistics



(b) 量测噪声协方差

(b) Covariance of measurement noise statistics

图 5 量测噪声统计特性的估计结果 (情况 2)

Fig. 5 Estimation of measurement noise statistics

(Case 2)

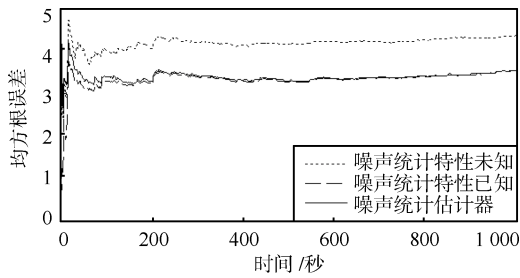


图 6 均方根误差

Fig.6 Root mean square error

表 2 自适应 UKF 和传统 UKF 算法估计精度对比

Table 2 Estimation accuracy contrast of adaptive UKF and traditional UKF algorithm

	估计误差均值	估计误差协方差
UKF 算法 (噪声统计特性已知)	0.057	3.595
UKF 算法 (噪声统计特性未知)	1.022	4.379
自适应 UKF 算法	0.066	3.608

图 4 表明, 式 (44) 和式 (45) 所描述的量测噪声统计估计器能够在较短时间内收敛并估计出系统量测噪声的均值和方差. 图 6 表明, 量测噪声统计特性未知时, 本文提出的自适应 UKF 算法状态估计的均方根误差小于 UKF 算法, 且能够达到量测噪声统计特性精确已知情况下传统 UKF 算法的精度. 与第 3.1 节类似, 在仿真开始时, 由于噪声统计特性的估计值还未收敛, 自适应 UKF 算法的估计精度与 UKF 算法的估计精度相当, 然而随着滤波过程的进行, 自适应 UKF 算法的精度逐渐提高. 图 5 表明, 当观测噪声统计特性初始值与真实值相差较多时, 噪声统计特性估计器能够在较短时间内收敛, 并最终获得良好的估计效果. 通过表 2 可以看出, 自适应 UKF 算法能够保证噪声统计特性未知情况下状态估计的精度.

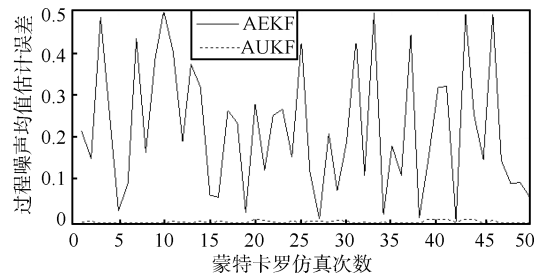
仿真结果表明, 本文提出的自适应 UKF 算法克服了传统 UKF 算法要求系统噪声统计特性精确已知的局限性, 在系统噪声未知和不精确时, 仍然具有较高的滤波精度, 并能够给出系统噪声统计特性的估计值.

3.3 自适应 EKF 算法和自适应 UKF 算法的噪声统计特性估计精度对比

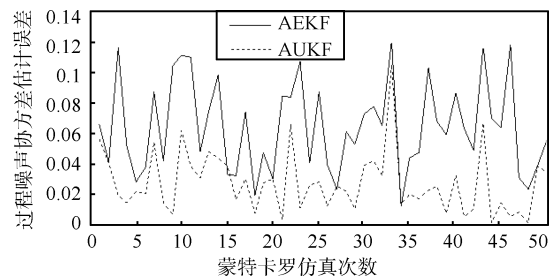
对本文提出的基于 UKF 算法和基于 EKF 算法的噪声统计特性估计方法的估计精度进行对比. 仍考虑式 (48) 所述的非线性系统, 假设系统噪声统计特性服从式 (49), 过程噪声的初值服从式 (52). 不

失一般性, 通过 50 次蒙特卡罗仿真实验, 取噪声统计特性估计器收敛后的估计误差进行对比, 检验两种方法对于过程噪声统计特性的估计精度.

图 7 为自适应 UKF 和自适应 EKF 算法的过程噪声统计特性估计精度对比效果. 由图 7(a) 可以看出, 自适应 UKF 算法对于过程噪声均值的估计精度要远高于自适应 EKF 算法. 由图 7(b) 可以看出, 大部分情况下, 自适应 UKF 算法对于过程噪声协方差的估计精度都要高于自适应 EKF 算法, 只有在极少数情况下, 自适应 EKF 算法的过程噪声协方差的估计精度能够接近自适应 UKF 算法.



(a) 过程噪声均值估计精度对比
(a) Mean estimation accuracy comparison of process noise



(b) 过程噪声协方差估计精度对比
(b) Covariance estimation accuracy comparison of process noise

图 7 过程噪声统计特性估计精度对比

Fig.7 Comparison of process noise statistics estimation accuracy

由于 EKF 算法与 UKF 算法一样, 同为次优滤波算法, 其估计结果均为有偏且非最小方差的, 按照注 4 的分析, 这将会影响噪声统计特性的估计效果, 而 EKF 算法对随机向量沿非线性函数传播的后验分布的逼近精度低于 UKF 算法, 因此, 基于 UKF 算法的噪声统计特性估计精度要高于基于 EKF 算法的估计精度.

综上所述, 仿真实验结果表明, 本文提出的自适应 UKF 算法能够在噪声统计特性未知时, 抑制滤波器发散并在线估计出噪声统计特性, 使 UKF 算法适用于噪声统计特性未知的非线性系统. 并且, 自适应

UKF 算法的噪声统计特性估计精度要明显高于自适应 EKF 算法。

4 结论

针对噪声先验统计特性未知情况下的非线性系统状态估计问题, 本文提出了一种基于极大似然准则和 EM 算法的自适应 UKF 算法。首先, 利用极大似然准则, 构造含有系统噪声统计特性的对数似然函数, 进而, 利用 EM 算法, 将噪声估计问题转化为对数似然函数数学期望极大化问题, 最终, 得到带次优递推噪声估计器的自适应 UKF 算法。仿真结果表明, 本文提出的自适应 UKF 算法能够在噪声统计特性未知时抑制滤波器发散, 提高滤波精度, 并在线估计出噪声统计特性, 使 UKF 算法适用于噪声统计特性未知的非线性系统。

References

- Nørgaard M, Poulsen N K, Ravn O. New developments in state estimation for nonlinear systems. *Automatica*, 2000, **36**(11): 1627–1638
- Bølviken E, Acklam P J, Christophersen N, Størdal J M. Monte Carlo filters for non-linear state estimation. *Automatica*, 2001, **37**(2): 177–183
- Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new approach for filtering nonlinear systems. In: Proceedings of the American Control Conference. Washington, USA: IEEE, 1995. 1628–1632
- Karasalo M, Hu X M. An optimization approach to adaptive Kalman filtering. *Automatica*, 2011, **47**(8): 1785–1793
- Han X J, Li X. An evaluation of the nonlinear/non-Gaussian filters for the sequential data assimilation. *Remote Sensing of Environment*, 2008, **112**(4): 1434–1449
- Xiong K, Zhang H Y, Chan C W. Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering. *Automatica*, 2006, **42**(2): 261–270
- Zhou Dong-Hua, Xi Yu-Geng, Zhang Zhong-Jun. A sub-optimal multiple fading extended Kalman filter. *Acta Automatica Sinica*, 1991, **17**(6): 689–695
(周东华, 席裕庚, 张钟俊. 一种带多重次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器. 自动化学报, 1991, **17**(6): 689–695)
- Xia Qi-Jun, Sun You-Xian, Zhou Chun-Hui. An optimal adaptive algorithm for fading Kalman filter and its application. *Acta Automatica Sinica*, 1990, **16**(3): 210–216
(夏启军, 孙优贤, 周春晖. 渐消卡尔曼滤波器的最佳自适应算法及其应用. 自动化学报, 1990, **16**(3): 210–216)
- Lesmes L A, Jeon S T, Lu Z L, Doshier B A. Bayesian adaptive estimation of threshold versus contrast external noise functions: the quick TvC method. *Vision Research*, 2006, **46**(19): 3160–3176
- Parthasarathy S, Balaji C. Estimation of parameters in multi-mode heat transfer problems using Bayesian inference — effect of noise and a priori. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, **51**(9–10): 2313–2334
- Yoon M, Ivrišimtzis I, Lee S Y. Variational Bayesian noise estimation of point sets. *Computers and Graphics*, 2009, **33**(3): 226–234
- Sage A P, Husa G W. Adaptive filtering with unknown prior statistics. In: Proceedings of Joint Automatic Control Conference. Boulder, USA: ASME, 1969. 760–769
- Deng Zi-Li, Wang Jian-Guo. Adaptive extended Kalman filtering for nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 1987, **13**(5): 375–379
(邓自立, 王建国. 非线性系统的自适应推广的 Kalman 滤波. 自动化学报, 1987, **13**(5): 375–379)
- Zhao Lin, Wang Xiao-Xu, Sun Ming, Ding Ji-Cheng, Yan Chao. Adaptive UKF filtering algorithm based on maximum a posteriori estimation and exponential weighting. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 1007–1019
(赵琳, 王小旭, 孙明, 丁继承, 闫超. 基于极大后验估计和指数加权的自适应 UKF 滤波算法. 自动化学报, 2010, **36**(7): 1007–1019)
- Sun Yao, Zhang Qiang, Wan Lei. Small autonomous underwater vehicle navigation system based on adaptive UKF algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **37**(3): 342–353
(孙尧, 张强, 万磊. 基于自适应 UKF 算法的小型水下机器人导航系统. 自动化学报, 2010, **37**(3): 342–353)
- Shi Yong, Han Chong-Zhao. Adaptive UKF method with applications to target tracking. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(6): 755–759
(石勇, 韩崇昭. 自适应 UKF 算法在目标跟踪中的应用. 自动化学报, 2011, **37**(6): 755–759)
- Costa M, Alpuim T. Parameter estimation of state space models for univariate observations. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2010, **140**(7): 1889–1902
- Saatci E, Akan A. Respiratory parameter estimation in non-invasive ventilation based on generalized Gaussian noise models. *Signal Processing*, 2010, **90**(2): 480–489
- Åkesson B M, Jørgensen J B, Poulsen N K, Jørgensen S B. A generalized autocovariance least-squares method for Kalman filter tuning. *Journal of Process Control*, 2008, **18**(7–8): 769–779
- Odelson B J, Rajamani M R, Rawlings J B. A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances. *Automatica*, 2006, **42**(2): 303–308
- Mehra R. Approaches to adaptive filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, **17**(5): 693–698
- Myers K, Tapley B. Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, **21**(4): 520–523

- 23 Dencoux T. Maximum likelihood estimation from fuzzy data using the EM algorithm. *Fuzzy Sets and Systems*, 2011, **183**(1): 72–91
- 24 Bavdekar V A, Deshpande A P, Patwardhan S C. Identification of process and measurement noise covariance for state and parameter estimation using extended Kalman filter. *Journal of Process Control*, 2011, **21**(4): 585–601



王 璐 上海交通大学电子信息与电气工程学院博士研究生. 主要研究方向为非线性滤波与非线性控制技术. 本文通信作者.

E-mail: wanglu1987xy@126.com

(**WANG Lu** Ph.D. candidate at the Electronic Information and Electric Engineering School, Shanghai Jiao Tong

University. His research interest covers nonlinear filtering and nonlinear control. Corresponding author of this paper.)



李光春 哈尔滨工程大学自动化学院研究员. 主要研究方向为初始对准技术.

E-mail: liguangchun@hrbeu.edu.cn

(**LI Guang-Chun** Professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. His main research interest is technology of initial alignment.)



乔相伟 哈尔滨工程大学自动化学院博士. 主要研究方向为组合导航及信息融合技术.

E-mail: qiaoxiangwei@126.com

(**QIAO Xiang-Wei** Ph.D. at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers integrated navigation system and information fusion.)



王兆龙 哈尔滨工程大学自动化学院硕士研究生. 主要研究方向为卫星导航算法.

E-mail: wangzhaolong@hrbeu.edu.cn

(**WANG Zhao-Long** Master student at the College of Automation, Harbin Engineering University. Her main research interest is satellite navigation algorithm.)



马 涛 哈尔滨工程大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为组合导航技术. E-mail: matao@hrbeu.edu.cn

(**MA Tao** Ph.D. candidate at the College of Automation, Harbin Engineering University. His main research interest is integrated navigation system.)