第 38 卷 第 6 期 自 动 化 学 报 Vol. 38, No. 6
2012 年 6 月 ACTA AUTOMATICA SINICA June, 2012

# 具有多项式型非线性项的大规模随机非线性系统的分散输出反馈镇定

井元伟 [1] 李武全 [2] 张嗣瀛 [1]

**摘 要** 基于齐次占优方法研究具有多项式型非线性项的大规模随机非线性系统的分散输出反馈镇定问题. 本文的主要贡献在于利用高增益齐次占优方法来解决大规模随机非线性系统的分散控制问题. 这种方法能彻底地去掉传统结果中所要求的线性增长条件, 不仅推广了以前的结果还得到了一些新的结果. 仿真验证了输出反馈控制器的有效性.

**关键词** 大规模随机非线性系统, 输出反馈镇定, 分散, 齐次占优

**引用格式** 井元伟, 李武全, 张嗣瀛. 具有多项式型非线性项的大规模随机非线性系统的分散输出反馈镇定. 自动化学报, 2012, **38**(6): 951−958

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2012.00951

# Decentralized Output-feedback Stabilization of Large-scale Stochastic Nonlinear Systems with Polynomial Nonlinearity

JING Yuan-Wei[1] LI Wu-Quan[2] ZHANG Si-Ying[1]

**Abstract** This paper employs homogeneous domination approach to deal with the problem of decentralized output-feedback stabilization for a class of large-scale stochastic nonlinear systems with polynomial nonlinearity. The main contribution of this paper is the development of a high gain homogeneous domination approach for the decentralized control of large-scale stochastic nonlinear systems. This methodology enables us to completely remove the linear growth condition which is the common assumption for global output feedback stabilization, and leads to a new result combining and generalizing the previous work. The efficiency of the output-feedback controller is demonstrated by a simulation example.

**Key words** Large-scale stochastic nonlinear systems, output-feedback stabilization, decentralized, homogeneous domination

**Citation** Jing Yuan-Wei, Li Wu-Quan, Zhang Si-Ying. Decentralized output-feedback stabilization of large-scale stochastic nonlinear systems with polynomial nonlinearity. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(6): 951−958

考虑到现实生活中的许多控制问题不能用单个系统来解决, 大规模系统的概念应运而生. 常见的大系统有很多, 如具有很强关联项的能量系统、在空间中广泛分布的水利系统、具有外部干扰或者结构复杂的交通系统. 由于需要控制的系统复杂并且需要解决的问题困难, 运行速度快、内存大的计算机也不能解决这些问题. 因此, 研究大规模系统的控制问题, 具有很强的现实意义. 最近, 大规模系统的分散控制问题受到广泛关注[1].

收稿日期 2010-03-19 录用日期 2011-03-02
Manuscript received March 19, 2010; accepted March 2, 2011
国家自然科学基金 (61104128, 10971256) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61104128, 10971256)
本文责任编委 霍伟
Recommended by Associate Editor HUO Wei
1. 东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110819 2. 鲁东大学数学与信息学院 烟台 264025
1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819 2. School of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai 264025

随机非线性系统的稳定控制器设计问题是近年来的研究热点之一[2−7]. 自从文献 [8] 首次给出了输出反馈镇定的结果后, 随机系统的输出反馈控制问题受到越来越多的关注[9−12]. 然而, 大部分结果都是关于集中控制的, 关于大规模随机非线性系统的结果不多[13−15]. 研究大规模随机非线性系统的分散控制问题, 不仅具有重要的理论意义, 而且具有很强的工程意义. 在系统的扩散项和漂移项只能依赖于可测的输出条件下, 利用李雅普诺夫迭代方法, 文献 [13] 为大规模随机系统设计了状态反馈和输出反馈控制器. 在文献 [14] 中, 对于严格反馈系统, 分散风险灵敏度状态反馈控制问题得到了研究. 这类系统的子系统通过输出耦合在一起, 并且漂移项还含有未知参数, 但要求扩散项已知. 最近, 文献 [15] 研究了具有不确定性的大规模随机非线性系统的分散自适应控制问题, 系统的系数可以依赖于输出和逆动态, 但不能依赖于不可测的状态.

受文献 [1, 16] 的启发, 利用齐次占优方法, 本文

考虑具有多项式型非线性项的大规模随机非线性系统的分散输出反馈镇定问题.

本文的主要创新点如下:

1) 即使对于集中的单输入单输出系统, 本文的结果也是最新的, 因为本文系统的漂移项和扩散项满足多项式型增长条件, 它是线性增长条件[10] 的推广;

2) 为大规模随机非线性系统的分散输出反馈控制问题的研究提供了一种新的思路;

3) 漂移项和扩散项不仅依赖输出还可依赖于不可测的状态;

4) 将确定大规模系统的控制思想推广到了随机系统.

## 1 预备知识与齐次占优定理

### 1.1 预备知识

用 $\mathbf{R}_+$ 表示全体非负实数, $\mathbf{R}^+_{\rm odd}=\{q\in\mathbf{R}$: $q>0$ 且 $q$ 是两个奇整数之比 $\}$, $\mathbf{R}^n$ 表示 $n$ 维空间. $X^{\rm T}$ 表示 $X$ 的转置, ${\rm tr}\{X\}$ 表示方阵 $X$ 的迹, $|\cdot|$ 表示欧氏空间中向量的 2 范数, $\mathcal{C}^i$ 表示相应定义域上的 $i$ 阶连续可微函数. 对于 $n\times m$ 的矩阵 $A$, 定义两种范数 $|A|=(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m A_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$ 和 $|A|_\infty=\max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^m|A_{ij}|\}$. $\mathcal{C}^i$ 表示具有 $i$ 阶连续偏导数的函数. $\mathcal{K}$ 表示连续、严格单调、零点等于 0 的 $\mathbf{R}_+$ 到 $\mathbf{R}_+$ 的函数全体; $\mathcal{K}_\infty$ 表示 $\mathcal{K}$ 中无界函数全体; $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+$ 到 $\mathbf{R}_+$ 的函数 $\beta(s,t)\in\mathcal{KL}$ 表示对给定的 $t$, $\beta(\cdot,t)\in\mathcal{K}$, 而给定 $s$, $\beta(s,\cdot)$ 是单调递减的且 $\lim_{t\to\infty}\beta(s,t)=0$.

考虑如下随机非线性系统:

$$
{\rm d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}){\rm d}t+g^{\rm T}(\boldsymbol{x}){\rm d}\boldsymbol{\omega},\quad \forall\, \boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n \tag{1}
$$

其中, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 为可测的状态, $\boldsymbol{\omega}$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上独立标准 Wiener 过程向量. $\boldsymbol{x}_0$ 是初始状态. 对任意 $t\ge 0$, 当 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 时, $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 和 $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times r}$ 是局部 Lipschitz 函数.

下面给出本文要用到的定义与引理.

**定义 1**[8]. 对于随机系统 (1), 给定 $V(\boldsymbol{x})\in\mathcal{C}^2$, 定义微分算子 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{L}V(\boldsymbol{x})=\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}{\rm tr}\{g(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2V}{\partial x^2}g^{\rm T}(\boldsymbol{x})\}$.

**定义 2**[8]. 对于满足 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 和 $g(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 的随机系统 (1), 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathcal{KL}$ 函数 $\beta(\cdot,\cdot)$ 使得 $P\big\{|\boldsymbol{x}(t)|<\beta(|\boldsymbol{x}_0|,t)\big\}\ge 1-\varepsilon$, $\forall t\ge 0$, $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, 系统 (1) 的平衡点 $\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{0}$ 是以概率全局渐近稳定的.

**定义 3**[16]. 对于坐标 $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 和实数 $r_i>0$, $i=1,\cdots,n$,

定义扩张 $\triangle_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ 为 $\triangle_\varepsilon(\boldsymbol{x})=(\varepsilon^{r_1}x_1,\cdots,\varepsilon^{r_n}x_n)$, $\forall\varepsilon>0$, 其中 $r_i$ 称为坐标的权 (扩张权简写为 $\triangle=(r_1,\cdots,r_n)$);

函数 $V\in\mathcal{C}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ 是 $\tau$ 阶齐次的, 如果存在实数 $\tau\in\mathbf{R}$ 使得 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$, $\varepsilon>0$, $V(\triangle_\varepsilon(\boldsymbol{x}))=\varepsilon^\tau V(x_1,\cdots,x_n)$;

矢量函数 $\boldsymbol{f}\in\mathcal{C}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ 称为 $\tau$ 阶齐次的, 如果存在实数 $\tau\in\mathbf{R}$ 使得对 $i=1,\cdots,n$, $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$, $\varepsilon>0$, $f_i(\triangle_\varepsilon(\boldsymbol{x}))=\varepsilon^{\tau+r_i}f_i(\boldsymbol{x})$;

对于 $p\ge 1$, 定义齐次 $p$ 范数为 $\|\boldsymbol{x}\|_{\triangle,p}=(\sum_{i=1}^n|x_i|^{\frac{p}{r_i}})^{\frac{1}{p}}$, $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$. 若 $p=2$, 有 $\|\boldsymbol{x}\|_\triangle$ for $\|\boldsymbol{x}\|_{\triangle,2}$.

**引理 1**[8]. 考虑随机系统 (1), 如果存在 $\mathcal{C}^2$ 函数 $V(\boldsymbol{x})$, $\mathcal{K}_\infty$ 函数 $\beta_1$ 和 $\beta_2$, 常数 $c>0$, 非负函数 $W(\boldsymbol{x})$ 使得:

$$
\beta_1(|\boldsymbol{x}|)\le V(\boldsymbol{x})\le\beta_2(|\boldsymbol{x}|),\quad \mathcal{L}V\le -cW(\boldsymbol{x})
$$

则

1) 对于任意的 $\boldsymbol{x}_0$, 系统 (1) 在 $[0,\infty)$ 几乎处处存在唯一解;

2) 当 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, $g(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, 且 $W(\boldsymbol{x})=\beta_3(|\boldsymbol{x}|)$ 连续, 平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是以概率全局渐近稳定的, 并且 $P\{\lim_{t\to\infty}W(\boldsymbol{x}(t))=0\}=1$, 其中 $\beta_3(\cdot)$ 是 $\mathcal{K}$ 函数.

**引理 2**[16]. 给定权 $\triangle=(r_1,\cdots,r_n)$, 假定 $V_1(\boldsymbol{x})$ 和 $V_2(\boldsymbol{x})$ 是 $\tau_1$ 阶和 $\tau_2$ 阶齐次的. 则 $V_1(\boldsymbol{x})V_2(\boldsymbol{x})$ 关于 $\triangle$ 也是齐次的, 且 $V_1\cdot V_2$ 是 $\tau_1+\tau_2$ 阶齐次的.

**引理 3**[16]. 假定 $V:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 关于权 $\triangle$ 是 $\tau$ 阶齐次的. 那么有:

1) $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ 是 $\tau-r_i$ 阶齐次的, $r_i$ 是 $x_i$ 的权重;

2) 存在正数 $\bar{c}$ 使得:

$$
V(\boldsymbol{x})\le\bar{c}\|\boldsymbol{x}\|_\triangle^\tau
$$

进而, 如果 $V(x)$ 正定, 则:

$$
\underline{c}\|\boldsymbol{x}\|_\triangle^\tau\le V(\boldsymbol{x})
$$

其中 $\underline{c}>0$.

**引理 4**[5]. 设 $x,y$ 是实变量, 对于任意的正数 $a$, $b$, $m$ 和 $n$, 下面的不等式成立:

$$
\begin{aligned}
ax^my^n\ \ \le\ \ & b|x|^{m+n}+\frac{n}{m+n}\left(\frac{m+n}{m}\right)^{-\frac{m}{n}}\times\\
& a^{\frac{m+n}{n}}b^{-\frac{m}{n}}|y|^{m+n}
\end{aligned}
$$

### 1.2 齐次占优定理

考虑如下的随机非线性系统

$$
\begin{aligned}
{\rm d}\boldsymbol{X}_i=(\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{X}_i)+\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{X})){\rm d}t+G_i^{\rm T}(\boldsymbol{X}){\rm d}\boldsymbol{\omega},\\
i=1,\cdots,m
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中, $\boldsymbol{X}_i=(X_{i1},\cdots,X_{in})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 为状态, $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{X}_m^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{mn}$, $\boldsymbol{\omega}$ 的定义见式 (1). $\boldsymbol{E}_i:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{F}_i:\mathbf{R}^{mn}\rightarrow\mathbf{R}^n$, $G_i:\mathbf{R}^{mn}\rightarrow\mathbf{R}^{r\times n}$ 是满足局部 Lipschitz 条件的波雷尔函数, 并且 $\boldsymbol{E}_i(0)=0$, $\boldsymbol{F}_i(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, $G_i(\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

利用引理 1～3, 下面证明本文的主要结果.

**定理 1.** 考虑系统 (2) 且满足如下两个条件:

1) 存在 $\mathcal{C}^2$ 的 $\lambda-\tau_i$ $(\lambda-\tau_i>0)$ 阶齐次李雅普诺夫函数 $V_i(\boldsymbol{X}_i)$ 使得 $\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{X}_i}\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{X}_i)$ 负定, 其中 $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{X}_i)$ 是 $\tau_i$ 阶齐次的, 它们都是相对于同一个权 $\triangle=(r_{i1},\cdots,r_{in})$;

2) 对于任意的 $j=1,\cdots,n$, 存在正数 $c_{ij}$, $\bar{c}_{ij}$, $k_{ij}$, $\bar{k}_{ij}$ 使得:

$$
\begin{aligned}
&|F_{ij}(\boldsymbol{X})|\le c_{ij}L^{1-k_{ij}}\|\boldsymbol{X}\|_{\triangle}^{\tau_i+r_{ij}}\\
&|G_{ij}(\boldsymbol{X})|\le \bar{c}_{ij}L^{\frac{1}{2}-\bar{k}_{ij}}\|\boldsymbol{X}\|_{\triangle}^{\frac{\tau_i}{2}+r_{ij}}
\end{aligned}\tag{3}
$$

其中, $F_{ij}(\boldsymbol{X})$ 是 $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{X})$ 的第 $j$ 个元素, $G_{ij}(\boldsymbol{X})$ 代表 $G_i(X)$ 的第 $j$ 列.

那么, 存在足够大的常数 $L>1$ 使得下述系统

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{X}=(L\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}))\mathrm{d}t+G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\tag{4}
$$

是以概率全局渐近稳定的, 其中 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_1),\cdots,\boldsymbol{E}_m^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_m))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{mn}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}),\cdots,\boldsymbol{F}_m^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{mn}$, $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(X)=(\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{X}),\cdots,\boldsymbol{G}_m(\boldsymbol{X}))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{(mn)\times r}$.

**证明.** 由 $\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{X}_i}\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{X}_i)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{X}_{ij}}\boldsymbol{E}_{ij}(\boldsymbol{X}_i)$ 和条件 1), 考虑到 $\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{X}_{ij}}$ 和 $E_{ij}(\boldsymbol{X}_i)$ 分别是 $\lambda-\tau_i-r_{ij}$ 阶和 $r_{ij}+\tau_i$ 阶齐次的, 由引理 2 和引理 3 可得:

$$
\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{X}_i}\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{X}_i)\quad\le\quad -\underline{\boldsymbol{c}}_{i0}\|\boldsymbol{X}_i\|_{\triangle}^{\lambda}\tag{5}
$$

其中, $\underline{\boldsymbol{c}}_{i0}>0$ 是常数. 类似的, 利用条件 2) 和引理 2 和引理 3, 有:

$$
\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{X}_i}\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{X})=\sum_{j=1}^n\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{X}_{ij}}F_{ij}(\boldsymbol{X})\le c_{i0}L^{1-k_{i0}}\|\boldsymbol{X}\|_{\triangle}^{\lambda}\tag{6}
$$

其中, $k_{i0}=\min\{k_{ij}\}_{1\le j\le n}$, $c_{i0}>0$ 是常数.

由引理 3, 可知 $\frac{\partial^2 V_i}{\partial X_{ij}\partial X_{is}}$ 是 $\lambda-r_{ij}-r_{is}$ 阶齐次的. 利用 $|A|$ 和 $|A|_\infty$ 的定义, 注意到 $G_i(\boldsymbol{X})\in\mathbf{R}^{r\times n}$, 利用条件 2)、引理 2 和引理 3, 有:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{G_i(\boldsymbol{X})\frac{\partial^2 V_i}{\partial \boldsymbol{X}_i^2}G_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\right\}\le\\
&\frac{1}{2}r\left|G_i(\boldsymbol{X})\frac{\partial^2 V_i}{\partial \boldsymbol{X}_i^2}G_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\right|_\infty\le\\
&\frac{1}{2}r\sqrt{r}\left|G_i(\boldsymbol{X})\frac{\partial^2 V_i}{\partial \boldsymbol{X}_i^2}G_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\right|\le\\
&\frac{1}{2}r\sqrt{r}\left|\sum_{j,s=1}^n G_{ij}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\frac{\partial^2 V_i}{\partial X_{ij}\partial X_{is}}G_{is}(\boldsymbol{X})\right|\le\\
&\frac{1}{2}r\sqrt{r}\sum_{j,s=1}^n\left|G_{ij}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\frac{\partial^2 V_i}{\partial X_{ij}\partial X_{is}}G_{is}(\boldsymbol{X})\right|\le\\
&\frac{1}{2}r\sqrt{r}\sum_{j,s=1}^n\left|\frac{\partial^2 V_i}{\partial X_{ij}\partial X_{is}}\right|\left|G_{ij}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\right||G_{is}(\boldsymbol{X})|\le\\
&\tilde{c}_{i0}L^{1-\tilde{k}_{i0}}\|\boldsymbol{X}\|_{\triangle}^{\lambda}
\end{aligned}\tag{7}
$$

其中, $\tilde{k}_{i0}=\min\{\bar{k}_{ij}+\bar{k}_{is}\}_{1\le j,s\le n}$, $\tilde{c}_{i0}>0$ 是常数, 第 2 个不等式利用了 $|A|_\infty\le\sqrt{r}|A|$ ($A$ 是 $r$ 维方阵).

选取 $V(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^m V_i(\boldsymbol{X}_i)$, 对于系统 (4), 利用式 (5)～(7), 可得:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V|_{(4)}=\;&L\sum_{i=1}^m\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{X}_i}\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{X}_i)+\sum_{i=1}^m\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{X}_i}\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{X})+\\
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\mathrm{tr}\{G_i(\boldsymbol{X})\frac{\partial^2 V_i}{\partial \boldsymbol{X}_i^2}G_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\}\le\\
&-L\sum_{i=1}^m\underline{\boldsymbol{c}}_{i0}\|\boldsymbol{X}_i\|_{\triangle}^{\lambda}+c_0L^{1-k}\|\boldsymbol{X}\|_{\triangle}^{\lambda}\le\\
&-L\tilde{c}_0\|\boldsymbol{X}\|_{\triangle}^{\lambda}+c_0L^{1-k}\|\boldsymbol{X}\|_{\triangle}^{\lambda}\le\\
&-L(\tilde{c}_0-c_0L^{-k})\|\boldsymbol{X}\|_{\triangle}^{\lambda}
\end{aligned}\tag{8}
$$

其中, $c_0>0$, $\tilde{c}_0>0$, 和 $k=\min_{1\le i\le m}\{k_{i0},\tilde{k}_{i0}\}>0$ 是常数. 显然, 如果常数 $L$ 足够大, 式 (8) 的右侧是负定的. 故存在足够大的 $L$ 使得:

$$
\mathcal{L}V|_{(4)}\le-\bar{c}_0\|\boldsymbol{X}\|_{\triangle}^{\lambda}\tag{9}
$$

其中, $\bar{c}_0>0$ 是常数. 由引理 1, 系统 (4) 以概率全局渐近稳定的. □

**注 1.** 对于大规模随机非线性系统的分散输出反馈控制问题, 定理 1 提供了一种系统化的方法, 它有以下优势:

对于随机系统进行控制器设计, 难点在于 *Itô* 微分不仅包含梯度还包含高阶海森项. 传统的设计方法, 如文献 [8−12], 要求每一步都要对扩散项和漂移项进行上界估计. 然而, 所估计的上界应该能被负项阻尼掉. 因此, 在海森项的作用下, 如何对扩散项和漂移项进行恰当的估计, 是一个难度很大的问题.

然而, 利用定理 1 中的设计方法, 不必每一步都对扩散项和漂移项进行上界估计. 定理 1 提供了一种占优的方法, 使得设计过程非常方便和有效. 基于这种方法, 先对标称系统设计状态反馈控制器, 通过

构造齐次降阶观测器和设计可调增益的输出反馈控制器, 通过调节控制器增益, 使得整个系统稳定.

## 2 问题描述

考虑如下由 $m$ 个子系统组成的大规模关联随机非线性系统:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_{i1} &= \big(x_{i2} + f_{i1}(\boldsymbol{x})\big)\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}_{i1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \\
\mathrm{d}x_{i2} &= \big(x_{i3} + f_{i2}(\boldsymbol{x})\big)\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}_{i2}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \\
&\ \ \vdots \\
\mathrm{d}x_{in} &= \big(u_i + f_{in}(\boldsymbol{x})\big)\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}_{in}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \\
y_i &= x_{i1}
\end{aligned} \tag{10}$$

其中, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{x}_m^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{mn}$, $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \cdots, x_{in})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, $u_i \in \mathbf{R}$ 和 $y_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \cdots, m$, 分别是系统的状态、子系统的状态、输入和输出. $\boldsymbol{\omega}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 空间上的 $r$ 维标准维纳过程. 对于 $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, $\mathcal{C}^1$ 函数 $f_{ij}: \mathbf{R}^{mn} \to \mathbf{R}$ 和 $\boldsymbol{g}_{ij}: \mathbf{R}^{mn} \to \mathbf{R}^r$ 在零点处等于零.

本文需要下面的假设条件:

**假设 1.** 对 $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, 存在常数 $\tau_i \geq 0$ 和 $b > 0$, 使得

$$\begin{aligned}
|f_{ij}(\boldsymbol{x})| &\leq b \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=1}^{j} |x_{sk}|^{\frac{r_{ij}+\tau_i}{r_{sk}}} \\
|\boldsymbol{g}_{ij}(\boldsymbol{x})| &\leq b \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=1}^{j} |x_{sk}|^{\frac{2r_{ij}+\tau_i}{2r_{sk}}}
\end{aligned} \tag{11}$$

其中, $r_{i1} = 1$, $r_{ij} + \tau_i = r_{i,j+1}$, $\tau_i - \tau_s < \frac{1}{(n-1)(2n-1)}$, $1 \leq i, s \leq m$.

**注 2.** 据作者所知, 关于大规模随机系统的输出反馈控制的所有结果[13−15] 都不能处理扩散项和漂移项依赖于不可量测状态的情形. 然而, 从假设 1 可知, 系统 (10) 的扩散项和漂移项可依赖不可量测状态. 因此, 本文推广了以前的结果.

**注 3.** 即使对于单输入单输出的集中系统, 本文的结果也是新的, 因为本文的扩散项与漂移项满足多项式增长条件, 它是线性增长条件[10] 的推广. 考虑如下的随机系统:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_1 &= \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 \sin x_1\right)\mathrm{d}t + \ln(1 + x_1^2)\mathrm{d}\omega \\
\mathrm{d}x_2 &= u\mathrm{d}t + \left(\frac{1}{2}x_1^3 \sin x_1 + x_2^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}\omega \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{12}$$

显然, 系统 (12) 的扩散项不满足文献 [10] 中的线性增长条件. 但是, 取 $\tau = 2$, 系统 (12) 满足本文的条件.

本文的控制目标是, 在假设 1 的条件下, 对式 (10) 设计镇定的分散输出反馈控制器. 设计过程分为两部分: 1) 为标称系统设计稳定的输出反馈控制器; 2) 利用定理 1 中的齐次占优方法, 为系统 (10) 设计稳定的分散输出反馈控制器.

## 3 标称线性系统的齐次输出反馈控制

在本节中, 对 $i = 1, \cdots, m$, 研究如下标称线性系统的输出反馈控制问题:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z_{ij} &= z_{i,j+1}\mathrm{d}t, \qquad j = 1, \cdots, n-1 \\
\mathrm{d}z_{in} &= \upsilon_i \mathrm{d}t \\
y_i &= z_{i1}
\end{aligned} \tag{13}$$

设计过程分为两部分: 1) 对于式 (13), 首先设计状态反馈控制器; 2) 利用齐次占优技术, 对于系统 (13), 设计稳定的输出反馈控制器.

假定 $\tau_i = q_i/d_i$, $q_i$ 是偶数且 $d_i$ 是奇数. 因而 $r_{ij} \in \mathbf{R}_{\mathrm{odd}}^{+}$. 利用文献 [16] 中的方法可以对更一般的 $r_{ij}$ 进行处理.

选取 $r = \max_{1 \leq i \leq m}\{r_{in}\}$, 下面开始设计过程.

### 3.1 标称线性系统 (13) 的齐次状态反馈控制

**步骤 1.** 定义 $\xi_{i1} = z_{i1}$ 和 $V_{i1}(z_{i1}) = \frac{r_{i1}}{4r-\tau_i} z_{i1}^{(4r-\tau_i)/r_{i1}}$, 由式 (13) 可得:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V_{i1}(z_{i1}) \leq\ & z_{i1}^{\frac{4r-\tau_i-r_{i1}}{r_{i1}}}(z_{i2} - z_{i2}^{*}) + \\
& z_{i1}^{\frac{4r-\tau_i-r_{i1}}{r_{i1}}} z_{i2}^{*}
\end{aligned} \tag{14}$$

显然, 虚拟控制器

$$z_{i2}^{*} = -n z_{i1}^{\frac{\tau_i+r_{i1}}{r_{i1}}} = -\xi_{i1}^{\frac{r_{i2}}{r_{i1}}} \alpha_{i1} \tag{15}$$

使得

$$\mathcal{L}V_{i1}(z_{i1}) \leq -n\xi_{i1}^{\frac{4r}{r_{i1}}} + z_{i1}^{\frac{4r-\tau_i-r_{i1}}{r_{i1}}}(z_{i2} - z_{i2}^{*}) \tag{16}$$

**归纳步.** 在第 $k-1$ 步, 假定存在 $\mathcal{C}^2$ 正定的李雅普诺夫函数 $V_{i,k-1}(\bar{z}_{i,k-1})$ 和定义如下的虚拟控制器 $z_{i1}^{*}, z_{i2}^{*}, \cdots, z_{ik}^{*}$.

$$\begin{aligned}
z_{i1}^{*} &= 0, & \xi_{i1} &= z_{i1} - z_{i1}^{*} \\
z_{i2}^{*} &= -\xi_{i1}^{\frac{r_{i2}}{r_{i1}}} \alpha_{i1}, & \xi_{i2} &= z_{i2} - z_{i2}^{*} \\
&\ \ \vdots & &\ \ \vdots \\
z_{ik}^{*} &= -\xi_{i,k-1}^{\frac{r_{ik}}{r_{i,k-1}}} \alpha_{i,k-1}, & \xi_{ik} &= z_{ik} - z_{ik}^{*}
\end{aligned} \tag{17}$$

使得

$$\mathcal{L}V_{i,k-1} \le -(n-k+2)\sum_{j=1}^{k-1}\xi_{ij}^{\frac{4r}{r_{ij}}} + \xi_{i,k-1}^{\frac{4r-\tau_i-r_{i,k-1}}{r_{i,k-1}}}(z_{ik}-z_{ik}^*) \tag{18}$$

其中, $\alpha_{ij}$ $(1\le j\le k-1)$ 是正数. 在第 $k$ 步, 选取李雅普诺夫函数:

$$V_{ik} = V_{i,k-1} + \frac{r_{ik}}{4r-\tau_i}\xi_{ik}^{\frac{4r-\tau_i}{r_{ik}}} \tag{19}$$

其中, $\bar{z}_{ik}=(z_{i1},\cdots,z_{ik})^{\mathrm{T}}$. 利用式 (13)、式 (17) 和式 (18) 可得:

$$\mathcal{L}V_{ik}(\bar{z}_{ik}) \le -(n-k+2)\sum_{j=1}^{k-1}\xi_{ij}^{\frac{4r}{r_{ij}}} + \xi_{ik}^{\frac{4r-\tau_i-r_{ik}}{r_{ik}}}\times \left(z_{i,k+1}-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\partial z_{ik}^*}{\partial z_{ij}}z_{i,j+1}\right) + \xi_{i,k-1}^{\frac{4r-\tau_i-r_{i,k-1}}{r_{i,k-1}}}\xi_{ik} \tag{20}$$

利用引理 4, 有:

$$\xi_{i,k-1}^{\frac{4r-\tau_i-r_{i,k-1}}{r_{i,k-1}}}\xi_{ik} = (\xi_{i,k-1}^{\frac{1}{r_{i,k-1}}})^{4r-\tau_i-r_{i,k-1}}(\xi_{ik}^{\frac{1}{r_{ik}}})^{r_{ik}} \le \frac{1}{2}\xi_{i,k-1}^{\frac{4r}{r_{i,k-1}}} + c_{ik}\xi_{ik}^{\frac{4r}{r_{ik}}} \tag{21}$$

其中, $c_{ik}>0$ 是常数. 由于 $r_{i,j+1}+(k-j)\tau_i = r_{ik}+\tau_i = r_{i,k+1}$, 结合式 (17) 和引理 4, 可得:

$$\begin{aligned}
&-\xi_{ik}^{\frac{4r-\tau_i-r_{ik}}{r_{ik}}}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\partial z_{ik}^*}{\partial z_{ij}}z_{i,j+1} \le \\
&c_{ij1}|\xi_{ik}|^{\frac{4r-\tau_i-r_{ik}}{r_{ik}}}\sum_{j=1}^{k-1}\xi_{i,k-1}^{\frac{\tau_i}{r_{i,k-1}}}\cdots\xi_{ij}^{\frac{\tau_i}{r_{ij}}}|z_{i,j+1}| \le \\
&c_{ij1}|\xi_{ik}|^{\frac{4r-\tau_i-r_{ik}}{r_{ik}}}\sum_{j=1}^{k-1}\xi_{i,k-1}^{\frac{\tau_i}{r_{i,k-1}}}\cdots\xi_{ij}^{\frac{\tau_i}{r_{ij}}}|\xi_{i,j+1} - \\
&\xi_{ij}^{\frac{r_{i,j+1}}{r_{ij}}}\alpha_{ij}| \le c_{ij2}|\xi_{ik}|^{\frac{4r-\tau_i-r_{ik}}{r_{ik}}}\sum_{j=1}^{k-1}|\xi_{ij}|^{\frac{r_{ik}+\tau_i}{r_{ij}}} \le \\
&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}\xi_{ij}^{\frac{4r}{r_{ij}}} + \hat{c}_{ik}\xi_{ik}^{\frac{4r}{r_{ik}}}
\end{aligned} \tag{22}$$

其中, $c_{ij1}$, $c_{ij2}$ 和 $\hat{c}_{ik}$ 是正数. 将式 (21) 和式 (22) 代入式 (20), 可得:

$$\mathcal{L}V_{ik}(\bar{z}_{ik}) \le -(n-k+1)\sum_{j=1}^{k-1}\xi_{ij}^{\frac{4r}{r_{ij}}} + \xi_{ik}^{\frac{4r-\tau_i-r_{ik}}{r_{ik}}}z_{i,k+1}^* + \xi_{ik}^{\frac{4r-\tau_i-r_{ik}}{r_{ik}}}(z_{i,k+1}-z_{i,k+1}^*) + (c_{ik}+\hat{c}_{ik})\xi_{ik}^{\frac{4r}{r_{ik}}} \tag{23}$$

选取虚拟控制

$$z_{i,k+1}^* = -(n-k+1+c_{ik}+\hat{c}_{ik})\xi_{ik}^{\frac{\tau_i+r_{ik}}{r_{ik}}} = -\xi_{ik}^{\frac{r_{i,k+1}}{r_{ik}}}\alpha_{ik} \tag{24}$$

代入式 (23) 得:

$$\mathcal{L}V_{ik}(\bar{z}_{ik}) \le -(n-k+1)\sum_{j=1}^{k}\xi_{ij}^{\frac{4r}{r_{ij}}} + \xi_{ik}^{\frac{4r-\tau_i-r_{ik}}{r_{ik}}}(z_{i,k+1}-z_{i,k+1}^*)$$

**步骤 $n$.** 对于系统 (13), 考虑如下的李雅普诺夫函数:

$$V_{in}(\bar{z}_{in}) = V_{i,n-1}(\bar{z}_{i,n-1}) + \frac{r_{in}}{4r-\tau_i}\xi_{in}^{\frac{4r-\tau_i}{r_{in}}} \tag{25}$$

由式 (23) 可得:

$$\mathcal{L}V_{in}(\bar{z}_{in}) \le -\sum_{j=1}^{n-1}\xi_{ij}^{\frac{4r}{r_{ij}}} + \xi_{in}^{\frac{4r-\tau_i-r_{in}}{r_{in}}}(\upsilon_i - z_{i,n+1}^*) + \xi_{in}^{\frac{4r-\tau_i-r_{in}}{r_{in}}}z_{i,n+1}^* + (c_{in}+\hat{c}_{in})\xi_{in}^{\frac{4r}{r_n}} \tag{26}$$

其中, $c_{in}$, $\hat{c}_{in}$ 是正数, $\xi_{in}=z_{in}-z_{in}^*$. 显然, 状态反馈控制器

$$z_{i,n+1}^* = -(1+c_{in}+\hat{c}_{in})\xi_{in}^{\frac{\tau_i+r_{in}}{r_{in}}} = -\xi_{in}^{\frac{r_{i,n+1}}{r_{in}}}\alpha_{in} \tag{27}$$

使得:

$$\mathcal{L}V_{in}(\bar{z}_{in}) \le -\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}^{\frac{4r}{r_{ij}}} + \xi_{in}^{\frac{4r-\tau_i-r_{in}}{r_{in}}}(\upsilon_i - z_{i,n+1}^*) \tag{28}$$

### 3.2 标称线性系统 (13) 的齐次输出反馈控制

构造如下的齐次观测器:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_{ik} &= -l_{i,k-1}\hat{z}_{ik} \\
\hat{z}_{ik} &= (\eta_{ik}+l_{i,k-1}\hat{z}_{i,k-1})^{\frac{r_{ik}}{r_{i,k-1}}}
\end{aligned} \tag{29}$$

其中, $\hat{z}_{i1}=z_{i1}$ 和 $l_{i,k-1}$, $k=2,\cdots,n$, 是常数增益, 选取的方法见文献 [16]. 在式 (27) 中, 用 $\hat{z}_{ij}$ 替换 $z_{ij}$, 可以得到如下的输出反馈控制器:

$$\upsilon_i = -\alpha_{in}(\hat{z}_{in}+\alpha_{i,n-1}(\hat{z}_{i,n-1}+\cdots+\alpha_{i2}(\hat{z}_{i2}+\alpha_{i1}z_{i1}^{\frac{r_{i2}}{r_{i1}}})^{\frac{r_{i3}}{r_{i2}}}\cdots)^{\frac{r_{in}}{r_{i,n-1}}})^{\frac{r_{in}+\tau_i}{r_{in}}} \tag{30}$$

其中, $\hat{z}_i=(\hat{z}_{i1},\hat{z}_{i2},\cdots,\hat{z}_{in})^{\mathrm{T}}$. 选取

$$U_i(\eta_{i2},\cdots,\eta_{in}) = \sum_{j=2}^{n}\int_{\gamma_{ij}^{\frac{4r-r_{ij}}{r_{i,j-1}}}}^{z_{ij}^{\frac{4r-r_{ij}}{r_{ij}}}}(s^{\frac{r_{i,j-1}}{4r-r_{ij}}}-\gamma_{ij})\mathrm{d}s \tag{31}$$

其中, $\gamma_{ij}=\eta_{ij}+l_{i,j-1}z_{i,j-1}$.

类似于文献 [16] 中的推导过程, 经过运算可得:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}V_i(z_{i1},\cdots,z_{in},\eta_{i2},\cdots,\eta_{in})\le\\&-\frac{1}{4}\Big(\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}^{\frac{4r}{r_{ij}}}+\sum_{j=2}^{n}e_{ij}^{\frac{4r}{r_{ij}}}\Big)\end{aligned}\tag{32}$$

其中, $e_{ij}=z_{ij}-\hat{z}_{ij}$, $j=2,\cdots,n$, 且 $V_i(z_{i1},\cdots,z_{in},\eta_{i2},\cdots,\eta_{in})=V_{in}(z_{i1},\cdots,z_{in})+U_i(\eta_{i2},\cdots,\eta_{in})$.

可以证明 $V_i(z_{i1},\cdots,z_{in},\eta_{i2},\cdots,\eta_{in})$ 关于

$$\boldsymbol{Z}_i=(z_{i1},\cdots,z_{in},\eta_{i2},\cdots,\eta_{in})^{\mathrm{T}}$$

是正定正则的. 因而, 式 (32) 说明闭环系统

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{Z}_i=&E_i(\boldsymbol{Z}_i)\mathrm{d}t=(z_{i2},\cdots,z_{in},\upsilon_i(\hat{z}_i),\\&f_{i,n+1},\cdots,f_{i,2n-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{33}$$

是以概率全局渐近稳定的, 其中, $f_{ij}=-l_{i,j-n}\hat{z}_{i,j-n+1}$, $j=n+1,\cdots,2n-1$.

引入扩张权重

$$\triangle=(\underbrace{r_{i1},\ r_{i2},\ \cdots,\ r_{in}}_{\text{for } z_{i1},\ \cdots,\ z_{in}},\underbrace{r_{i1},\ r_{i2},\ \cdots,\ r_{i,n-1}}_{\text{for } \eta_{i2},\ \cdots,\ \eta_{in}})$$

可知式 (33) 是 $\tau_i$ 阶齐次的.

## 4 系统 (10) 的输出反馈镇定

基于上一节得到的控制器和观测器, 可以得到本文的主要结果.

**定理 2.** 在假设 1 的条件下, 系统 (10) 能够实现输出反馈以概率全局渐近稳定.

**证明.** 对每个子系统, 引入坐标变换

$$\begin{aligned}&z_{ij}=\frac{x_{ij}}{L^{j-1}},\quad \upsilon_i=\frac{u_i}{L^n},\\&i=1,\cdots,m,\quad j=1,\cdots,n\end{aligned}\tag{34}$$

其中, $L>1$ 是待设计的参数, 系统 (10) 转化为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z_{ij}=&\big(Lz_{i,j+1}+\frac{f_{ij}(\boldsymbol{x})}{L^{j-1}}\big)\mathrm{d}t+\frac{g_{ij}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})}{L^{j-1}}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega},\\&j=1,\cdots,n-1\\\mathrm{d}z_{in}=&\big(L\upsilon_i+\frac{f_{in}(\boldsymbol{x})}{L^{n-1}}\big)\mathrm{d}t+\frac{g_{in}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})}{L^{n-1}}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\\y_i=&z_{i1}\end{aligned}\tag{35}$$

构造具有可调增益的 $L$.

$$\begin{aligned}&\dot{\eta}_{ik}=-Ll_{i,k-1}\hat{z}_{ik}\\&\hat{z}_{ik}=(\eta_{ik}+l_{i,k-1}\hat{z}_{i,k-1})^{\frac{r_{ik}}{r_{i,k-1}}},\quad k=2,\cdots,n\end{aligned}\tag{36}$$

其中, $l_{ij}$ 的取值同式 (29) 中一样. 采用和式 (30) 具有相同形式的控制器, 有:

$$\begin{aligned}\upsilon_i=&-\alpha_{in}(\hat{z}_{in}+\alpha_{i,n-1}(\hat{z}_{i,n-1}+\cdots+\alpha_{i2}(\hat{z}_{i2}+\\&\alpha_{i1}z_{i1}^{\frac{r_{i2}}{r_{i1}}})^{\frac{r_{i3}}{r_{i2}}}\cdots)^{\frac{r_{in}}{r_{i,n-1}}})^{\frac{r_{in}+\tau_i}{r_{in}}}\end{aligned}\tag{37}$$

第 $i$ 个子闭环系统 (35)～(37) 整理成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Z}_i=L\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{Z}_i)\mathrm{d}t+\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{Z})\mathrm{d}t+G_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\tag{38}$$

其中, $\boldsymbol{Z}_i=(z_{i1},\cdots,z_{in},\eta_{i2},\cdots,\eta_{in})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{Z}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{Z}_m^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{Z})=(f_{i1}(\boldsymbol{x}),\frac{f_{i2}(\boldsymbol{x})}{L},\cdots,\frac{f_{in}(\boldsymbol{x})}{L^{n-1}},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $G_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z})=(g_{i1}(\boldsymbol{x}),\frac{g_{i2}(\boldsymbol{x})}{L},\cdots,\frac{g_{in}(\boldsymbol{x})}{L^{n-1}},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $i=1,\cdots,m$.

闭环系统 (10)、(34) 和 (38) 可整理成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Z}=(L\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Z}))\mathrm{d}t+G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\tag{39}$$

其中, $E(Z)=(E_1^{\mathrm{T}}(Z_1),\cdots,E_m^{\mathrm{T}}(Z_m))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Z})=(F_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}),\cdots,F_m^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}))^{\mathrm{T}}$, $G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z})=(G_1(\boldsymbol{Z}),\cdots,G_m(\boldsymbol{Z}))^{\mathrm{T}}$.

利用假设 1、式 (34) 和 $L>1$, 可得:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_{ij}(x)}{L^{j-1}}\right|\le&\, b\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{j}\frac{|x_{sk}|^{\frac{r_{ij}+\tau_i}{r_{sk}}}}{L^{j-1}}=\\&b\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{j}\frac{|L^{k-1}z_{sk}|^{\frac{r_{ij}+\tau_i}{r_{sk}}}}{L^{j-1}}\end{aligned}\tag{40}$$

下面对 $L$ 的次数进行整理

$$\begin{aligned}&\frac{(k-1)(r_{ij}+\tau_i)}{r_{sk}}-(j-1)=\\&\quad 1+\frac{(k-1)(j\tau_i+1)}{(k-1)\tau_s+1}-j=\\&\quad 1-\frac{j-j(k-1)(\tau_i-\tau_s)-(k-1)}{(k-1)\tau_s+1}\end{aligned}\tag{41}$$

令

$$b_{ijsk}=\frac{j-j(k-1)(\tau_i-\tau_s)-(k-1)}{(k-1)\tau_s+1}\tag{42}$$

注意到假设 1 中的 $\tau_i-\tau_s<\frac{1}{(n-1)(2n-1)}$, 对 $k\ge2$, 有:

$$\begin{aligned}&b_{ijsk}>\frac{j-\frac{j(k-1)}{(n-1)(2n-1)}-(k-1)}{(k-1)\tau_s+1}\ge\\&\quad\frac{1-\frac{j(j-1)}{(n-1)(2n-1)}}{(k-1)\tau_s+1}\ge\frac{1-\frac{j(j-1)}{n(n-1)}}{(k-1)\tau_s+1}\ge0\end{aligned}\tag{43}$$

另外, 当 $k=1$ 时, $b_{ijsk}=j>0$. 因而可知 $b_{ijsk}>0$. 选取 $b_0=\min_{i,j,s,k}\{b_{ijsk}\}$, 利用 $L>1$ 可得:

$$\left|\frac{f_{ij}(\boldsymbol{x})}{L^{j-1}}\right| \le bL^{1-b_0}\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{j}|z_{sk}|^{\frac{r_{ij}+\tau_i}{r_{sk}}} \le \hat{b}L^{1-b_0}\|\boldsymbol{Z}\|_{\triangle}^{r_{ij}+\tau_i} \tag{44}$$

其中, $\hat{b}>0$ 为常数. 类似地, 可得:

$$\left|\frac{g_{ij}(\boldsymbol{x})}{L^{j-1}}\right| \le \tilde{b}L^{\frac{1}{2}-\tilde{b}_0}\|\boldsymbol{Z}\|_{\triangle}^{r_{ij}+\frac{\tau_i}{2}} \tag{45}$$

其中, $\tilde{b}$ 和 $\tilde{b}_0$ 是正数. 由式 (25) 和式 (31) 知 $V_i(Z_i)=\sum_{j=2}^{n}\int_{\gamma_{ij}^{(4r-r_{ij})/r_{i,j-1}}}^{z_{ij}^{(4r-r_{ij})/r_{ij}}}(s^{r_{i,j-1}/(4r-r_{ij})}-\gamma_{ij})\mathrm{d}s+\sum_{s=1}^{n}\frac{r_{is}}{4r-\tau_i}\xi_{is}^{(4r-\tau_i)/r_{is}}$ 是 $\mathcal{C}^2$, 正定并且是 $4r-\tau_i$ 阶齐次的. 由式 (33) 可知, $E_i(Z_i)$ 是 $\tau_i$ 阶齐次的. 定理 1 的第 1 个条件得到满足.

由式 (44) 和式 (45), 定理 1 的第 2 个条件成立.

因此, 由定理 1 可知, 当 $L>1$ 充分大时, 系统 (39) 是以概率全局渐近稳定的. 由式 (34), 系统 (10) 能够实现输出反馈以概率全局渐近稳定. □

**注 4.** 接下来, 证明系统 (10)、系统 (34) ～ (37) 是满足局部 Lipschitz 条件的. 由于 $f_{ij}(x)$ 和 $g_{ij}(x)$ 是 $\mathcal{C}^1$ 函数, 函数 $f_{ij}(x)$ 和 $g_{ij}(x)$ 很显然满足该条件. 现在来证明式 (37) 中的 $\upsilon_i(\hat{z}_i)$ 是 $\mathcal{C}^1$ 的.

由式 (17) 和式 (37), 对于 $i=1,\cdots,m$, 可得

$$\frac{\partial\upsilon_i(\hat{z}_i)}{\partial\hat{z}_{ij}}=A_{ij}\hat{\xi}_{in}^{\frac{\tau_i}{r_{in}}}\cdots\hat{\xi}_{ij}^{\frac{\tau_i}{r_{ij}}} \tag{46}$$

其中, $\hat{\xi}_{ij}=\hat{z}_{ij}+\alpha_{i,j-1}(\hat{z}_{i,j-1}+\alpha_{i,j-2}(\hat{z}_{i,j-2}+\cdots+\alpha_{i2}(\hat{z}_{i2}+\alpha_{i1}z_{i1}^{r_{i2}/r_{i1}})^{r_{i3}/r_{i2}}\cdots)^{r_{i,j-1}/r_{i,j-2}})^{r_{ij}/r_{i,j-1}}$, $\hat{z}_{i1}=z_{i1}$, $A_{ij}$ 是常数. 结合 $r_{ij}=(j-1)\tau_i+1$ 和 $\tau_i\ge 0$, 由式 (46) 和 $\hat{\xi}_{ij}$ 的定义, 可得 $\frac{\partial\upsilon_i(\hat{z}_i)}{\partial\hat{z}_{ij}}$ 是连续的, 因而式 (37) 中的 $\upsilon_i(\hat{z}_i)$ 是 $\mathcal{C}^1$ 的.

因此, 闭环系统 (10)、系统 (34) ～ (37) 是满足局部 Lipschitz 条件的, 解的存在唯一性得到保证.

## 5　仿真例子

考虑系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_{11}=\left(x_{12}+\frac{1}{2}x_{21}\sin x_{11}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}x_{21}^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\\ \mathrm{d}x_{12}=\left(u_1+\frac{1}{3}x_{22}^{\frac{7}{5}}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}x_{22}\sin x_{22}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\\ y_1=x_{11}\\ \mathrm{d}x_{21}=\left(x_{22}+\frac{1}{2}x_{21}\sin x_{21}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}x_{11}\cos x_{11}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\\ \mathrm{d}x_{22}=u_2\mathrm{d}t+x_{12}^{\frac{6}{5}}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\\ y_2=x_{21}\end{cases} \tag{47}$$

选取 $r_{11}=1$, $\tau_1=2/3$, $r_{12}=5/3$, $r_{21}=1$, $\tau_2=2/3$, $r_{22}=5/3$, 显然, 假设 1 得到满足. 在设计过程中, 选取 $r=5/3$.

引入坐标变换:

$$\begin{aligned}&z_{11}=x_{11},\quad z_{12}=\frac{x_{12}}{L},\quad \upsilon_1=\frac{u_1}{L^2}\\ &z_{21}=x_{21},\quad z_{22}=\frac{x_{22}}{L},\quad \upsilon_2=\frac{u_2}{L^2}\end{aligned} \tag{48}$$

$L>1$ 是待定常数, 系统 (47) 转化为

$$\begin{cases}\mathrm{d}z_{11}=\left(Lz_{12}+\frac{1}{2}z_{21}\sin z_{11}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}z_{21}^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\\ \mathrm{d}z_{12}=\left(L\upsilon_1+\frac{1}{3}L^{\frac{2}{5}}z_{22}^{\frac{7}{5}}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}z_{22}\sin(Lz_{22})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\\ y_1=z_{11}\\ \mathrm{d}z_{21}=\left(Lz_{22}+\frac{1}{2}z_{21}\sin z_{21}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}z_{11}\cos z_{11}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\\ \mathrm{d}z_{22}=L\upsilon_2\mathrm{d}t+L^{\frac{1}{5}}z_{12}^{\frac{6}{5}}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\\ y_2=z_{21}\end{cases} \tag{49}$$

利用本文的算法, 可得如下结果:

$$\begin{cases}\dot{\eta}_{12}=-Ll_{11}\hat{z}_{12}\\ \hat{z}_{12}=(\eta_{12}+l_{11}z_{11})^{\frac{5}{3}}\\ \upsilon_1(z_{11},\hat{z}_{12})=-20.3(\hat{z}_{12}+2z_{11}^{\frac{5}{3}})^{\frac{7}{5}}\\ \dot{\eta}_{22}=-Ll_{21}\hat{z}_{22}\\ \hat{z}_{22}=(\eta_{22}+l_{21}z_{21})^{\frac{5}{3}}\\ \upsilon_2(z_{21},\hat{z}_{22})=-20.3(\hat{z}_{22}+2z_{21}^{\frac{5}{3}})^{\frac{7}{5}}\end{cases} \tag{50}$$

在仿真中, 取 $l_{11}=l_{21}=200$, $L=80$, 初始值 $x_{11}(0)=0.02$, $x_{12}(0)=0.8$, $\eta_{12}(0)=0.1$, $x_{21}(0)=-0.02$, $x_{22}(0)=0.8$, $\eta_{22}(0)=-0.3$. 图 1 给出了系统 (47) ～ (50) 的响应, 控制器的有效性得到了验证.

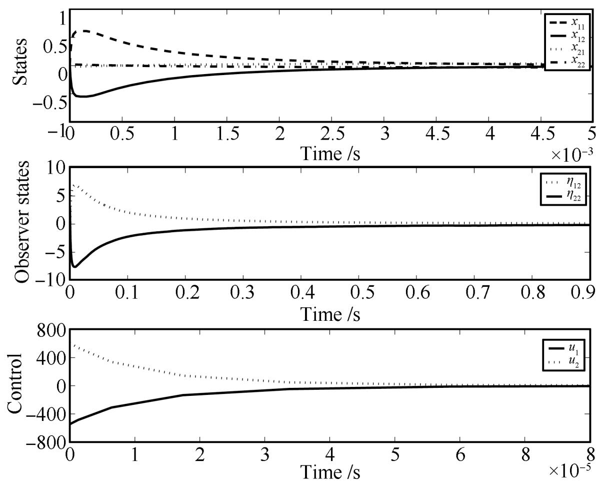


图 1　闭环系统 (47) ～ (50) 的响应

Fig. 1　The responses of closed-loop system (47) ～ (50)

## 6 结论

对一类具有多项式型非线性项的大规模随机非线性系统 (10), 本文研究其分散输出反馈控制问题. 本文将已有的结果推广到更一般的形式.

还有一些问题需要进一步解决, 比如, 如何为系统 (10) 设计分散输出反馈逆最优控制器, 如何将本文的结果推广到更一般的系统.

## References

1 Polendo J, Qian C J. Decentralized output feedback control of interconnected systems with high-order nonlinearities. In: Proceedings of the 2007 American Control Conference. New York, USA: IEEE, 2007. 1479−1484

2 Has′minskii R Z. *Stochastic Stability of Differential Equations*. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers, 1980

3 Liu L, Duan N, Xie X J. Output-feedback stabilization for stochastic high-order nonlinear systems with a ratio of odd integers power. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(6): 858−864

4 Ma L, Da F P, Wu L Y. Delayed-state-feedback exponential stabilization of stochastic Markovian jump systems with mode-dependent time-varying state delays. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(11): 1601−1610

5 Li W, Jing Y, Zhang S. Decentralised stabilisation of a class of large-scale high-order stochastic non-linear systems. *IET Control Theory and Applications*, 2010, **4**(11): 2441−2453

6 Li W Q, Xie X J. Inverse optimal stabilization for stochastic nonlinear systems whose linearizations are not stabilizable. *Automatica*, 2009, **45**(2): 498−503

7 Tian J, Xie X J. Adaptive state-feedback stabilization for high-order stochastic nonlinear systems with time-varying control coefficients. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(9): 1188−1191

8 Deng H, Krstic M. Output-feedback stochastic nonlinear stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(2): 328−333

9 Wu Z J, Xie X J, Zhang S Y. Adaptive backstepping controller design using stochastic small-gain theorem. *Automatica*, 2007, **43**(4): 608−620

10 Liu S J, Zhang J F. Output-feedback control of A class of stochastic nonlinear systems with linearly bounded unmeasurable states. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, **18**(6): 665−687

11 Xie X J, Li W Q. Output-feedback control of a class of high-order stochastic nonlinear systems. *International Journal of Control*, 2009, **82**(9): 1692−1705

12 Li W Q, Jing Y W, Zhang S Y. Output-feedback stabilization for stochastic nonlinear systems whose linearizations are not stabilizable. *Automatica*, 2010, **46**(4): 752−760

13 Xie S L, Xie L H. Decentralized stabilization of a class of interconnected stochastic nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(1): 132−137

14 Arslan G, Basar T. Decentralized risk-sensitive controller design for strict-feedback systems. *Systems and Control Letters*, 2003, **50**(5): 383−393

15 Liu S J, Zhang J F, Jiang Z P. Decentralized adaptive output-feedback stabilization for large-scale stochastic nonlinear systems. *Automatica*, 2007, **43**(2): 238−251

16 Qian C J. A homogeneous domination approach for global output-feedback stabilization of a class of nonlinear systems. In: Proceedings of the 2005 American Control Conference. Portland, OR, USA: IEEE, 2005. 4708−4715

**井元伟** 东北大学信息科学与工程学院教授. 1988 年获得博士学位. 主要研究方向为复杂控制系统和现代通讯网络控制. E-mail: ywjjing@mail.neu.edu.cn

(**JING Yuan-Wei** Professor at the School of Information Science and Engineering, Northeastern University. He received his Ph. D. degree in 1988. His research interest covers complex control systems and control problems in modern communication network systems.)

**李武全** 鲁东大学讲师. 2011 年获得东北大学信息科学与工程学院博士学位. 主要研究方向为随机控制. 本文通信作者. E-mail: sea81@126.com

(**LI Wu-Quan** Lecturer at Ludong University. He received his Ph. D. degree from the School of Information Science and Engineering, Northeastern University in 2011. His main research interest is stochastic control. Corresponding author of this paper.)

**张嗣瀛** 东北大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为复杂控制系统和生物网络控制.
E-mail: syzhang@mail.neu.edu.cn

(**ZHANG Si-Ying** Professor at the School of Information Science and Engineering, Northeastern University. His research interest covers complex control systems and control problems in biological network systems.)