

## 基于切换频度的马尔科夫网络控制系统均方指数镇定

宋 杨<sup>1,2</sup> 董 豪<sup>1</sup> 费敏锐<sup>1,2</sup>

**摘 要** 针对一类马尔科夫网络控制系统 (Networked control system, NCS), 研究了其均方指数镇定问题. 首先将网络控制系统建模为离散时间切换系统, 子系统间的切换过程由一个转移概率矩阵已知的马尔科夫链描述, 并给出了子系统间切换频度的范围; 进而基于随机过程理论和切换系统稳定性理论, 利用状态反馈实现了网络控制系统均方指数镇定, 状态反馈控制律可通过求解一组线性矩阵不等式获得. 最后通过数值仿真例子验证了本文方法的有效性.

**关键词** 网络控制系统, 均方指数镇定, 数据包丢失, 马尔科夫链

**引用格式** 宋杨, 董豪, 费敏锐. 基于切换频度的马尔科夫网络控制系统均方指数镇定. 自动化学报, 2012, 38(5): 876–881

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2012.00876

## Mean Square Exponential Stabilization of Markov Networked Control Systems Based on Switching Frequentness

SONG Yang<sup>1,2</sup> DONG Hao<sup>1</sup> FEI Min-Rui<sup>1,2</sup>

**Abstract** This paper considers the mean square exponential stabilization for networked control systems (NCSs) based on a class of Markov models. Firstly, networked control systems are modeled as a discrete-time switched system of which the switching sequence is governed by a Markov chain with known transition probability matrix, and then a method is proposed to calculate switching frequentness. By combining the stochastic process theory as well as the switched systems stability theory, a mean square exponential stabilization method is presented. The state feedback control law can be obtained by solving a set of linear matrix inequalities. Finally, a numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed result.

**Key words** Networked control systems (NCSs), mean square exponential stabilization, data packet dropout, Markov chain

**Citation** Song Yang, Dong Hao, Fei Min-Rui. Mean square exponential stabilization of Markov networked control systems based on switching frequentness. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(5): 876–881

在网络控制系统 (Networked control system, NCS) 中, 传感器、控制器和执行器等系统组件通过有线或无线通信网络进行信息交换. 通信网络的引入会导致数据传输出现延迟, 这种延迟一般称为网络诱导时延 (Networked induced time

收稿日期 2011-7-21 录用日期 2011-12-11

Manuscript received July 21, 2011; accepted December 11, 2011

国家自然科学基金 (60904016, 61074032, 60904097), 上海市青年科技启明星计划 (11QA1402500), 上海市优秀青年教师基金资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60904016, 61074032, 60904097), Shanghai Rising-Star Program (11QA1402500), and Excellent Youth Scholar of High Education of Shanghai

本文责任编辑 夏元清

Recommended by Associate Editor XIA Yuan-Qing

1. 上海大学机电工程与自动化学院 上海 200072 2. 上海市电站自动化技术重点实验室 上海 200072

1. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200072 2. Shanghai Key Laboratory of Power Station Automation Technology, Shanghai 200072

delay), 某些情况下还会出现数据包丢失. 特别地, 在一些高实时性能系统中, 若数据包在短时间内无法到达执行器, 则认为此数据包已不能反映系统当前的真实状态, 此系统不再利用此数据包计算控制量. 由于网络协议、网络拥塞程度负载、控制策略等诸多因素的复合影响, 网络诱导时延和丢包常常呈现出复杂随机特性. 因此网络环境下的控制系统分析与综合是一个极具挑战性的问题<sup>[1-3]</sup>.

NCS 中的时延和丢包现象显著影响闭环系统稳定性. 众多学者在多种时延和丢包假设下研究了 NCS 的建模和控制设计问题<sup>[1-3]</sup>. 基于切换系统模型展开 NCS 研究是重要途径之一, 其主要思想是将不同时延和丢包状态下的 NCS 视为切换系统的多个子系统, 继而利用已有切换系统理论结果如公共 Lyapunov 函数法、多 Lyapunov 函数法、平均驻留时间法等展开分析. 所谓平均驻留时间 (Average dwell time, ADT), 是指各子系统作用时间的平均值<sup>[4]</sup>, 其大小反映了子系统切换的频度 (切换频度与平均驻留时间互为倒数). 文献 [5-6] 在 NCS 研究中采用了 ADT 方法, 其优点是 Lyapunov 函数不必一定单调递减, 只需小于某个递减的指数函数即可, 增大了设计的灵活性; 其缺点在于需强制假设切换频度已处于某个范围. 而实际 NCS 中, 网络负载的轻重一般无法人为控制, 切换频度范围难以确定, 这直接影响了上述结果的实用性.

NCS 中时延和丢包的随机特性, 大多采用 Bernoulli 分布<sup>[7]</sup>、马尔科夫 (Markov) 链<sup>[8-10]</sup> 或更复杂的隐 Markov 模型<sup>[11]</sup> 来描述. 一般认为, 在实际 NCS 中, 下一时刻的网络时延长度与上一时刻时延关系密切, 因而将网络时延特性建模成 Markov 链是合理的. 文献 [8] 最早提出可根据网络时延长短的不同将网络负载按高低分为不同状态, 并采用 Markov 链来描述不同状态间的转移机制. 近年来, 文献 [9-10] 等研究了 Markov 网络控制系统的随机镇定问题, 其基本思想是通过证明 Lyapunov 函数的数学期望递减来判定系统随机稳定性.

本文研究了切换频度同 Markov 切换系统稳定性的关系, 基于状态反馈实现了 NCS 系统的随机指数镇定, 目前尚未见到类似研究. 与已有的 Markov 网络控制随机镇定结果<sup>[9-10]</sup> 相比, 本文方法具备 ADT 方法设计灵活的优点; 同时也给出两状态 Markov 链的切换频度范围, 解决了 ADT 方法的实用性问题. 本文结构如下: 第 1 节将 NCS 建模成具有两个模态的离散时间 Markov 切换系统, 结合马氏链在遍历性方面的特性, 确定了马尔科夫链转移概率的收敛速度, 并给出切换频度的计算方法. 第 2 节在状态反馈律下实现了 NCS 系统的均方指数镇定. 第 3 节通过数值仿真例子证实了结果的有效性.

### 1 NCS 的建模及预备知识

考虑图 1 所示的网络控制系统, 控制器和执行器位于同一节点.

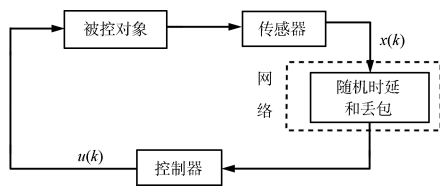


图 1 网络控制系统结构

Fig. 1 Structure of networked control system

其中, 传感器节点以固定周期对被控对象采样并通过网络发送数据包. 若采样数据可在一个采样周期内到达控制器, 则控制器收到数据后立即计算控制量并输出至执行器; 若在一个采样周期内控制器未收到数据包, 则认为丢包发生, 此时控制量保持前一时刻值, 即  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1)$ . 这种控制策略常见于一些实时网络控制系统中. 本文仅考虑通信网络存在于传感器和控制器之间情形, 若控制器和执行器、传感器和控制器之间均存在网络, 亦可采用本文方法类似分析.

被控对象为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  为系统状态;  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  和  $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^p$  分别为控制输入和对象输出;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  是适维常数阵.

网络诱导时延记为  $\tau_k$ , 采样周期记为  $T$ . 根据文献 [9] 的结论, 给出  $0 < \tau_k \leq T$ ,  $\tau_k > T$  两种情形下的状态反馈闭环方程:

1)  $0 < \tau_k \leq T$  时:

网络诱导时延  $\tau_k$  被描述为:  $\tau_k = T/2 + \tau'_k$ , 其中,  $-T/2 \leq \tau'_k \leq T/2$ . 记  $\Gamma_0 = \int_0^{T/2} e^{As} ds \times B$ ,  $\Gamma_1 = \int_{T/2}^T e^{As} ds \times B$ ,  $\Phi = e^{AT}$ ,  $D = \delta e^{A(T/2)}$ ,  $\delta = \max_{\tau'_k \in \{-T/2, T/2\}} \|\int_0^{-\tau'_k} e^{As} ds\|_2$ , 不确定项  $F(\tau'_k) = \delta^{-1} \times \int_0^{-\tau'_k} e^{As} ds$ , 显然  $F(\tau'_k)$  满足不等式:  $F^T(\tau'_k) F(\tau'_k) \leq I$ .

令  $\mathbf{Z}(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \mathbf{u}^T(k-1)]^T$ , 采用状态反馈控制律  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\mathbf{Z}(k)$ , 可得:

$$\mathbf{Z}(k+1) = \tilde{\Phi}_1 \mathbf{Z}(k) \quad (2)$$

其中,  $\tilde{\Phi}_1 = \hat{\Phi}_1 + \hat{\Gamma}K + \hat{D}F(\tau'_k) (\hat{E} + BK)$ ,  $\hat{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ I \end{bmatrix}, \hat{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{E} = \begin{bmatrix} 0 & -B \end{bmatrix}.$$

2)  $\tau_k > T$  时, 视为丢包发生,  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1)$ , 则

$$\mathbf{Z}(k+1) = \tilde{\Phi}_2 \mathbf{Z}(k) \quad (3)$$

其中,  $\tilde{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_0 + \Gamma_1 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ ,  $\Gamma_0, \Gamma_1$  表达式同上文.

于是上述 NCS 可建模为如下切换系统:

$$\mathbf{Z}(k+1) = \tilde{\Phi}_{\sigma(k)} \mathbf{Z}(k), \sigma(k) = 1, 2 \quad (4)$$

其中切换规律  $\sigma(k)$  可以用一个转移概率矩阵已知的 Markov 链描述, 如图 2 所示,  $\sigma(k) = 1$  表示数据包未丢失,  $\sigma(k) = 2$  表示数据包丢失; 切换规律初始状态记为  $\sigma(0)$ .

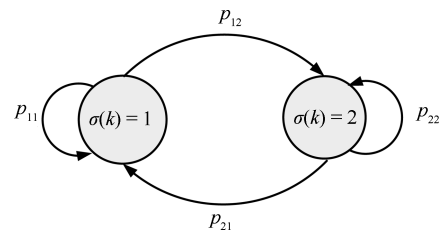


图 2 两状态 Markov 链示意图

Fig. 2 Schematic diagram of two-state Markov chain

本文约定  $p_{ij}^{(n)}$  为 Markov 链从状态  $i$  到状态  $j$  的  $n$  步转移概率, 即  $p_{ij}^{(n)} = \Pr(\sigma(k+n) = j | \sigma(k) = i)$ , 其中  $k$  为任意非负整数,  $n \geq 1$ . 特别地, 当  $n = 1$  时, 将一步转移概率  $p_{ij}^{(1)}$  简记为  $p_{ij}$ . 记一步转移概率矩阵  $P^{(1)} = [p_{ij}]_{2 \times 2}$ , 由转移概率性质可知  $\sum_{j=1}^2 p_{ij} = 1$ . 当采用 Markov 链描述 NCS 数据包丢失时, 转移概率  $p_{ij}$  一般不为零, 因此 Markov 链  $\sigma(k)$  具有遍历性<sup>[12]</sup>, 即对所有  $i$  和  $j$ , 存在极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

其中,  $\pi_j$  表示状态  $j$  的极限概率, 此时称  $\{\pi_1, \pi_2\}$  为该 Markov 链的平稳分布. 由平稳分布性质可知:

$$[\pi_1 \ \pi_2] = [\pi_1 \ \pi_2] P^{(1)}$$

注意到  $\pi_1 + \pi_2 = 1$ , 计算可得:

$$\pi_1 = \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}}, \quad \pi_2 = \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} \quad (5)$$

**引理 1**<sup>[13]</sup>. 遍历的有限状态不可约马氏链  $\Phi_k$  具有指数收敛性, 即存在正常数  $\rho < 1, M < \infty$ , 使得对任意的步数  $n (1 \leq n < \infty)$  有:

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leq M\rho^n$$

**注 1.** 遍历的有限状态不可约马氏链  $\Phi_k$  具有指数收敛性证明见文献 [13]. 遍历、有限状态、不可约三个约束条件比较宽泛, 一般 Markov 链均满足此条件. 通常情况下, 马氏链收敛速度  $\rho$  的精确值较难得到. 但是对于某些特殊类型 Markov 链, 其收敛速度则可通过计算获得, 例如文献 [14] 给出了 M/G/1 型马氏链最大几何收敛速度  $\rho$  的精确值及参数  $M$  的界. 在无线网络通信中, 尤其是在 IEEE 802.11 DCF (Distributed coordinate function) 和 IEEE 802.15 的无线网络研究中, M/G/1 型马氏链常被用于描述网络端到端时延和 MAC 时延<sup>[15-16]</sup>.

**定义 1.** 对于切换规律  $\sigma(k)$ , 若满足:

$$\begin{aligned} \sigma(m-1) &\neq \sigma(m) \\ \sigma(m) &= \sigma(m+1) = \dots = \sigma(m+q-1) = i \\ \sigma(m+q-1) &\neq \sigma(m+q) \end{aligned}$$

则称子系统  $i$  某次作用的驻留时间为  $q$ , 其中  $m$  和  $m+q$  是两个切换时刻.

将时间段  $(0, k]$  内的各切换时刻依次表示为  $k_1 < k_2 < \dots < k_j$ , 其中  $k_j \leq k$  (下标  $j$  表示第  $j$  次切换). 状态 1 在时间段  $(0, k]$  内的驻留时间依次记为  $T_1^1, T_2^1, \dots, T_{n_1}^1$ ; 状态 2 在时间段  $(0, k]$  内的驻留时间依次记为  $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{n_2}^2$  (其中  $n_1, n_2$  分别是状态 1, 2 作用的总次数). 切换时刻与驻留时间的关系如图 3 所示.

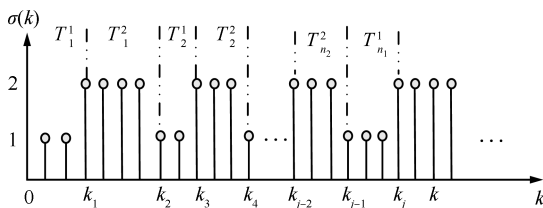


图 3 切换序列示意图

Fig. 3 Schematic diagram of switching sequence

时间段  $(0, k]$  内切换频度记为  $F_r(k)$ , 定义  $F_r(k) = N_\sigma(0, k)/k$ , 其中  $N_\sigma(0, k)$  是时间段  $(0, k]$  内的切换次数. 则时间段  $(0, k]$  内的平均驻留时间  $T_a(k)$  与切换频度的关系为  $T_a(k) F_r(k) = 1$ .

**引理 2.** 考虑一个两状态 Markov 链, 切换频度  $F_r(k)$  满足如下关系:

$$E[F_r(k)] \leq \max\{p_{12}, p_{21}\}$$

**证明.** 根据文献 [17], 两状态 Markov 链状态  $i$  第  $n$  次驻留时间  $T_n^i (i = 1, 2; n = 1, 2, \dots)$  的数学期望为

$$E(T_n^1) = \frac{1}{p_{12}}, \quad E(T_n^2) = \frac{1}{p_{21}} \quad (6)$$

$E[T_a(k)]$  不仅和  $E(T_n^1), E(T_n^2)$  有关, 还与状态 1 和状态 2 在  $(0, k]$  内分别作用的总次数  $n_1, n_2$  有关. 讨论如下:

1) 若  $k$  是切换时刻, 令  $\alpha = n_1/(n_1 + n_2)$ , 则  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,

$$E[T_a(k)] = \alpha E(T_n^1) + (1 - \alpha) E(T_n^2) = \frac{1}{p_{21}} + \alpha \left[ \frac{1}{p_{12}} - \frac{1}{p_{21}} \right] \geq \min \left\{ \frac{1}{p_{12}}, \frac{1}{p_{21}} \right\}$$

2) 若  $k$  不是切换时刻, 如图 3, 则

$$\begin{aligned} E[T_a(k)] &= E \left[ \frac{k}{N_\sigma(0, k)} \right] = E \left[ \frac{k_j + (k - k_j)}{N_\sigma(0, k_j)} \right] \geq \\ &= E \left[ \frac{k_j}{N_\sigma(0, k_j)} \right] = E[T_a(k_j)] \geq \\ &= \min \left\{ \frac{1}{p_{12}}, \frac{1}{p_{21}} \right\} \end{aligned}$$

综上,  $E[F_r(k)] = 1/E[T_a(k)] \leq \max\{p_{12}, p_{21}\}$ .  $\square$

**注 2.** 文献 [17] 中定理 2.6 针对多个状态的 Markov 链, 给出了状态  $i$  第  $n$  次驻留时间期望  $E(T_n^i)$  的公式. 根据该定理可知, 一般而言,  $E(T_n^i)$  的取值与参数  $i, n$  均有关系. 但对于两状态 Markov 链,  $E(T_n^i)$  的取值与参数  $n$  无关, 即式 (6). 由于该定理表述涉及较多预备知识, 故本文略去相关介绍.

## 2 主要结果

**定义 2**<sup>[18]</sup>. 若对于任意初始状态  $(Z(0), \sigma(0))$ , 存在常数  $0 < \gamma < 1, \beta > 0$  使得对于所有正整数  $k$ , 有:

$$E\{\|Z(k)\|^2\} \leq \beta\gamma^k \|Z(0)\|^2$$

则称 Markov 跳变线性系统 (4) 是均方指数稳定的.

**引理 3**<sup>[19]</sup>. 给定适维矩阵  $W, D$  和  $E$ , 其中  $W$  是对称矩阵, 对于所有满足  $F(t)^T F(t) \leq I$  的矩阵  $F(t), W + DF(t)E + E^T F(t)^T D^T < 0$  当且仅当存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $W + \varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E < 0$ .

**定理 1.** 若存在正标量  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_{12}, \mu_{21}, \xi_1$ , 矩阵  $Y$  及对称正定矩阵  $X_1, X_2$  使得下列不等式成立, 则网络控制系统 (4) 在状态反馈  $K = YX_1^{-1}$  作用下均方指数稳定.

$$\begin{bmatrix} -X_1 & * & * \\ \lambda_1 \hat{\Phi}_1 X_1 + \lambda_1 \hat{\Gamma} Y & -X_1 + \lambda_1^2 \xi_1 \hat{D} \hat{D}^T & * \\ \hat{E} X_1 + B Y & 0 & -\xi_1 I \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} -X_2 & * \\ \lambda_2 \hat{\Phi}_2 X_2 & -X_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$X_1^{-1} \leq \mu_{21} X_2^{-1}, \quad X_2^{-1} \leq \mu_{12} X_1^{-1} \quad (9)$$

$$\lambda_1^{\pi_1} \lambda_2^{\pi_2} > 1 \quad (10)$$

$$\frac{2 \ln(\lambda_1^{\pi_1} \lambda_2^{\pi_2})}{\max\{p_{12}, p_{21}\}} > \ln \max\{\mu_{12}, \mu_{21}\} \quad (11)$$

其中,  $\hat{E} = \begin{bmatrix} 0 & -B \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ I \end{bmatrix}$ ,  $\hat{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  
 $\tilde{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_0 + \Gamma_1 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ , 马氏链的极限概率  $\pi_1, \pi_2$  如式 (5).

证明. 选择 Lyapunov 函数, 如下:

$$V_{\sigma(k)}(k) = \mathbf{Z}^T(k) Q_{\sigma(k)} \mathbf{Z}(k), \quad \sigma(k) = 1, 2$$

结合式 (7) 和  $K = YX_1^{-1}$ , 并令  $Q_1 = X_1^{-1}$  可得:

$$\begin{bmatrix} -Q_1^{-1} & * & * \\ \lambda_1 \hat{\Phi}_1 Q_1^{-1} + \lambda_1 \hat{\Gamma} K Q_1^{-1} & \Psi & * \\ \hat{E} Q_1^{-1} + BK Q_1^{-1} & 0 & -\xi_1 I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

其中,  $\Psi = -Q_1^{-1} + \lambda_1^2 \xi_1 \hat{D} \hat{D}^T$ .

令式 (12) 左乘右乘  $\text{diag}\{Q_1, Q_1, I\}$ , 并由 Schur 补引理, 可知上式等价于:

$$\begin{bmatrix} -Q_1 & * \\ \lambda_1 Q_1 (\hat{\Phi}_1 + \hat{\Gamma} K) & -Q_1 + Q_1 \lambda_1^2 \xi_1 \hat{D} \hat{D}^T Q_1 \end{bmatrix} + \xi_1^{-1} \begin{bmatrix} (\hat{E} + BK)^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{E} + BK) & 0 \end{bmatrix} < 0$$

即

$$\begin{bmatrix} -Q_1 & \lambda_1 (\hat{\Phi}_1 + \hat{\Gamma} K)^T Q_1 \\ \lambda_1 Q_1 (\hat{\Phi}_1 + \hat{\Gamma} K) & -Q_1 \end{bmatrix} + \xi_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 Q_1 \hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 Q_1 \hat{D} \end{bmatrix}^T + \xi_1^{-1} \begin{bmatrix} (\hat{E} + BK)^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{E} + BK) & 0 \end{bmatrix} < 0$$

由引理 3 可知, 上式等价于:

$$\begin{bmatrix} -Q_1 & \lambda_1 (\hat{\Phi}_1 + \hat{\Gamma} K)^T Q_1 \\ \lambda_1 Q_1 (\hat{\Phi}_1 + \hat{\Gamma} K) & -Q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 Q_1 \hat{D} \end{bmatrix} F(\tau'_k) \begin{bmatrix} (\hat{E} + BK) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\hat{E} + BK)^T \\ 0 \end{bmatrix} F(\tau'_k)^T \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 Q_1 \hat{D} \end{bmatrix}^T < 0$$

令  $\tilde{\Phi}_1 = \hat{\Phi}_1 + \hat{\Gamma} K + \hat{D} F(\tau'_k) (\hat{E} + BK)$ , 上式整理可得:

$$\begin{bmatrix} -Q_1 & \lambda_1 \tilde{\Phi}_1^T Q_1 \\ \lambda_1 Q_1 \tilde{\Phi}_1 & -Q_1 \end{bmatrix} < 0$$

由 Schur 补引理, 可知:

$$\tilde{\Phi}_1^T Q_1 \tilde{\Phi}_1 < \lambda_1^{-2} Q_1$$

类似地, 令  $Q_2 = X_2^{-1}$ , 由式 (8) 得:

$$\tilde{\Phi}_2^T Q_2 \tilde{\Phi}_2 < \lambda_2^{-2} Q_2$$

即有  $\tilde{\Phi}_{\sigma(k)}^T Q_{\sigma(k)} \tilde{\Phi}_{\sigma(k)} < \lambda_{\sigma(k)}^{-2} Q_{\sigma(k)}$ ,  $\sigma(k) = 1, 2$ .

若  $k$  不为切换时刻且在时段  $(k_0, k)$  内不发生切换, 则

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k)}(k) &= \mathbf{Z}^T(k) Q_{\sigma(k)} \mathbf{Z}(k) = \\ & \mathbf{Z}^T(k-1) \tilde{\Phi}_{\sigma(k)}^T Q_{\sigma(k)} \tilde{\Phi}_{\sigma(k)} \mathbf{Z}(k-1) < \\ & \lambda_{\sigma(k)}^{-2} \mathbf{Z}^T(k-1) Q_{\sigma(k)} \mathbf{Z}(k-1) = \\ & \lambda_{\sigma(k)}^{-2} V_{\sigma(k)}(k-1) < \dots < \lambda_{\sigma(k)}^{-2(k-k_0)} V_{\sigma(k)}(k_0) \end{aligned}$$

若  $k$  为切换时刻, 此时  $\sigma(k) \neq \sigma(k-1)$ , 则由式 (9) 知:

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k)}(k) &= \mathbf{Z}^T(k) Q_{\sigma(k)} \mathbf{Z}(k) \leq \\ & \mathbf{Z}^T(k) \mu_{\sigma(k-1)\sigma(k)} Q_{\sigma(k-1)} \mathbf{Z}(k) = \\ & \mu_{\sigma(k-1)\sigma(k)} V_{\sigma(k-1)}(k) \end{aligned}$$

若记  $k_1, \dots, k_{j-1}, k_j$  为系统在时间段  $(0, k)$  内各切换时刻 ( $k_1 < \dots < k_{j-1} < k_j$ ), 不妨设  $(k_j, k]$  时间段是状态 1 作用 (若为状态 2, 推导过程类似). 则可记  $T_{\Delta}^1 = k - k_j$ , 并令  $\mu = \max\{\mu_{12}, \mu_{21}\}$ , 有:

$$\begin{aligned} E[V_{\sigma(k)}(k)] &< E\left[\lambda_{\sigma(k_j)}^{-2(k-k_j)} V_{\sigma(k_j)}(k_j)\right] \leq \\ & E\left[\lambda_{\sigma(k_j)}^{-2(k-k_j)} \mu_{\sigma(k_{j-1})\sigma(k_j)} V_{\sigma(k_{j-1})}(k_j)\right] \leq \\ & E\left[\lambda_{\sigma(k_j)}^{-2(k-k_j)} \mu V_{\sigma(k_{j-1})}(k_j)\right] < \\ & E\left[\lambda_{\sigma(k_j)}^{-2(k-k_j)} \mu \lambda_{\sigma(k_{j-1})}^{-2(k_j-k_{j-1})} V_{\sigma(k_{j-1})}(k_{j-1})\right] \end{aligned}$$

依次类推, 若记  $T_1^1, \dots, T_{n_1}^1$  和  $T_1^2, \dots, T_{n_2}^2$  分别是  $(0, k]$  时间段内子系统 1 和子系统 2 的各次驻留时间, 则

$$\begin{aligned} E[V_{\sigma(k)}(k)] &< \\ & E\left[\lambda_{\sigma(k_j)}^{-2(k-k_j)} \mu \lambda_{\sigma(k_{j-1})}^{-2(k_j-k_{j-1})} V_{\sigma(k_{j-1})}(k_{j-1})\right] < \\ & E\left[\mu^{N_{\sigma}(0,k)} \lambda_1^{-2(T_1^1 + \dots + T_{n_1}^1 + T_{\Delta}^1)} \lambda_2^{-2(T_1^2 + \dots + T_{n_2}^2)}\right] \times \\ & V_{\sigma(0)}(0) \end{aligned}$$

根据 Schwarz 不等式,  $|E(XY)|^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ . 利用此结论可得:

$$\begin{aligned} E[V_{\sigma(k)}(k)] &< \\ & \sqrt{E\left[\lambda_1^{-4(T_1^1 + \dots + T_{n_1}^1 + T_{\Delta}^1)} \lambda_2^{-4(T_1^2 + \dots + T_{n_2}^2)}\right]} \times \\ & \sqrt{E[\mu^{2N_{\sigma}(0,k)}] V_{\sigma(0)}(0)} \end{aligned} \quad (13)$$

由引理 1 可知:

$$\pi_j - M\rho^k \leq p_{ij}^{(k)} \leq \pi_j + M\rho^k \quad (14)$$

不妨令初始概率  $P\{\sigma(0) = 1\} = f$ , 则  $P\{\sigma(0) = 2\} = 1 - f$ . 由于状态  $i$  在一定时段内的总驻留时间就是该状态出现的总次数, 可知

$$E [T_1^1 + \dots + T_{n_1}^1 + T_{\Delta}^1] = E \left[ \sum_{n=1}^k (p_{11}^{(n)} f + p_{21}^{(n)} (1 - f)) \right]$$

将式 (14) 代入上式可得:

$$\sum_{n=1}^k (\pi_1 - M\rho^n) \leq E [T_1^1 + \dots + T_{n_1}^1 + T_{\Delta}^1] \leq \sum_{n=1}^k (\pi_1 + M\rho^n)$$

上式两边级数求和, 并令  $R = \frac{\rho M}{1-\rho}$ , 可得:

$$\pi_1 k - R < E [T_1^1 + \dots + T_{n_1}^1 + T_{\Delta}^1] < \pi_1 k + R \quad (15a)$$

同理

$$\pi_2 k - R < E [T_1^2 + \dots + T_{n_2}^2] < \pi_2 k + R \quad (15b)$$

由于子系统 2 无状态反馈, 因此  $\tilde{\Phi}_2$  通常是不稳定阵, 所以  $0 < \lambda_2 < 1$ . 而从式 (10) 可知,  $\lambda_1 > 1$ .

将式 (15) 代入式 (13), 可得:

$$E [V_{\sigma(k)}(k)] < \sqrt{E \left[ \lambda_1^{-4(T_1^1 + \dots + T_{n_1}^1 + T_{\Delta}^1)} \lambda_2^{-4(T_1^2 + \dots + T_{n_2}^2)} \right]} \times \sqrt{E [\mu^{2N_{\sigma}(0,k)}] V_{\sigma(0)}(0)} < \lambda_1^{-2(\pi_1 k - R)} \lambda_2^{-2(\pi_2 k + R)} \mu^{E[N_{\sigma}(0,k)]} V_{\sigma(0)}(0) = \lambda_1^{2R} \lambda_2^{-2R} \lambda^{-2k} \lambda^{\frac{\ln \mu}{\ln \lambda} E[N_{\sigma}(0,k)]} V_{\sigma(0)}(0)$$

其中  $\lambda = \lambda_1^{\pi_1} \lambda_2^{\pi_2}$ . 将  $F_r(k) = N_{\sigma}(0, k) / k$  代入上式, 并记  $\beta = \lambda_1^{2R} \lambda_2^{-2R} > 0$ , 可得:

$$E [V_{\sigma(k)}(k)] < \beta \left( \lambda^{\frac{\ln \mu}{\ln \lambda} E[F_r(k)] - 2} \right)^k V_{\sigma(0)}(0)$$

另一方面, 根据引理 2 及式 (11), 并注意到  $\mu = \max\{\mu_{12}, \mu_{21}\}$ , 易得:

$$\frac{\ln \mu}{\ln \lambda} E [F_r(k)] - 2 < 0 \quad (16)$$

因此, 由式 (16) 以及定理条件式 (10) 可知

$$\lambda^{\frac{\ln \mu}{\ln \lambda} E[F_r(k)] - 2} < 1$$

从而

$$E [\|Z(k)\|^2] < \frac{b\beta}{a} \left( \lambda^{\frac{\ln \mu}{\ln \lambda} E[F_r(k)] - 2} \right)^k \|Z(0)\|^2$$

其中,  $a = \min_{i \in \{1,2\}} \lambda_{\min}(Q_i)$ ,  $b = \max_{i \in \{1,2\}} \lambda_{\max}(Q_i)$ .  $\lambda_{\min}(Q_i)$  和  $\lambda_{\max}(Q_i)$  分别为  $Q_i$  的最小和最大特征根. 根据定义 2, 此时系统 (4) 是均方指数稳定的.  $\square$

**注 3.** 本文实现均方指数镇定时, 不需知道常数  $\rho, M$  的具体数值. 对于某些特定类型的马氏链, 则可以参照注 1 估算常数  $\rho, M$ , 进而得到参数  $\beta$ .

### 3 数值仿真

假设网络控制系统的被控对象状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -0.5 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

采样周期  $T = 0.1\text{s}$ , Markov 链一次转移概率矩阵  $P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$ , 其中 Markov 链状态 1、2 分别对应未丢包、丢包两情形.

根据定理 1, 取  $\lambda_1 = 1.15, \mu_{12} = \mu_{21} = 1.05$ , 应用 Matlab LMI 工具箱求解式 (7)~(9), 得:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 9.8347 & -0.4840 & 0.0908 \\ -0.4840 & 0.7854 & -2.2567 \\ 0.0908 & -2.2567 & 11.1498 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 9.8097 & -0.4827 & 0.0902 \\ -0.4827 & 0.7836 & -2.2503 \\ 0.0902 & -2.2503 & 11.1186 \end{bmatrix}$$

$$Y = [0.1233 \quad -2.1324 \quad 6.1627]$$

$$\lambda_2 = 0.7198, \quad \xi_1 = 9.5057$$

此时, 反馈增益矩阵  $K = [-0.1287 \quad -2.8759 \quad -0.0283]$ ;

且  $\frac{2 \ln(\lambda_1^{\pi_1} \lambda_2^{\pi_2})}{\max\{p_{12}, p_{21}\}} = 0.0755 > \ln \max\{\mu_{12}, \mu_{21}\} = 0.0488, \lambda_1^{\pi_1} \lambda_2^{\pi_2} = 1.0229$ , 满足定理条件式 (10) 和式 (11).

假设被控对象的初始状态为  $[3, -3]^T$ , 当 Markov 链状态跳转如图 4 所示时, 系统状态轨迹如图 5, Lyapunov 函数的轨迹如图 6 所示. 可以看出, 即使存在随机诱导时延和数据包丢失时, 在上述状态反馈控制器作用下, 系统也能指数收敛至平衡点.

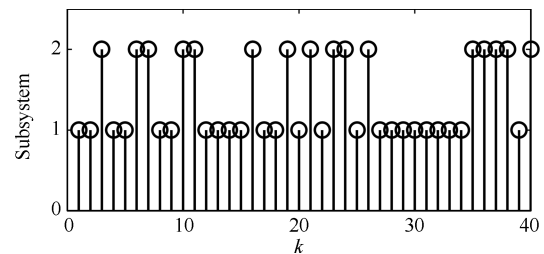


图 4 Markov 链跳转规律

Fig. 4 Jump law of Markov chain

### 4 结论

由于网络负载总是有限, 因此网络时延和网络丢包不可避免. 本文根据网络诱导时延的 Markov 特性, 将网络控制系统建立成具有两个状态的离散时间 Markov 切换系统, 并利用 Markov 的转移概率得到了子系统间切换频度范围的计算方法; 然后利用 Markov 理论和平均驻留时间的思想给出了闭环系统均方指数稳定的充分条件; 进而通过线性矩阵不

等式给出了状态反馈控制器的设计方法. 最后用一个数值仿真例子验证了文中方法的有效性.

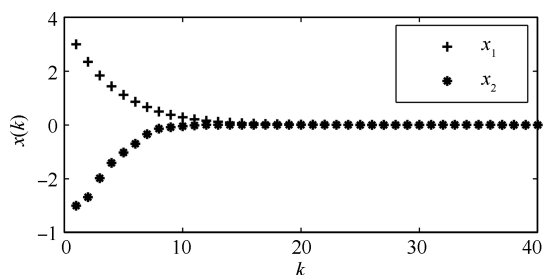


图 5 系统状态运动轨迹

Fig. 5 Trajectories of system state

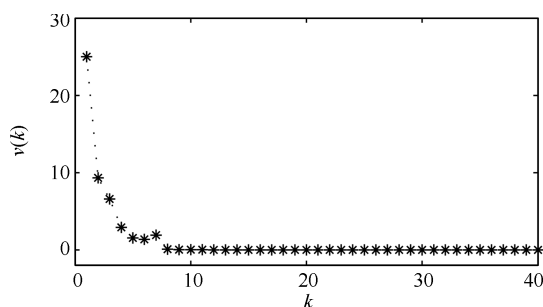


图 6 Lyapunov 函数轨迹

Fig. 6 Trajectory of Lyapunov function

### References

- Gupta R A, Chow M Y. Networked control system: overview and research trends. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010, **57**(7): 2527–2535
- Yang T C. Networked control system: a brief survey. *IEE Proceedings-Control Theory Applications*, 2006, **153**(4): 403–412
- Du Da-Jun, Fei Min-Rui, Song Yang, Li Xue. Brief survey and prospect of networked control systems. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2011, **32**(3): 713–720  
(杜大军, 费敏锐, 宋杨, 李雪. 网络控制系统的简要回顾及展望. 仪器仪表学报, 2011, **32**(3): 713–720)
- Song Y, Fan J, Fei M R, Yang T C. Robust  $H_\infty$  control of discrete switched system with time delay. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, **205**(1): 159–169
- Zhang W A, Yu L. Output feedback stabilization of networked control systems with packet dropouts. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(9): 1705–1710
- Sun X M, Liu G P, Wang W, David R. Stability analysis for networked control systems based on average dwell time method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, **20**(15): 1774–1784
- Niu Y G, Jia T G, Wang X Y, Yang F W. Output-feedback control design for NCSs subject to quantization and dropout. *Information Sciences*, 2009, **179**(21): 3804–3813
- Nilsson J. Real-time Control Systems with Delays [Ph.D. dissertation], Lund Institute of Technology, Sweden, 1998
- Ma Wei-Guo, Shao Cheng. Stochastic stability for networked control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(8): 878–882  
(马卫国, 邵诚. 网络控制系统随机稳定性研究. 自动化学报, 2007, **33**(8): 878–882)
- Shi Y, Yu B. Output feedback stabilization of networked control systems with random delays modeled by Markov chains. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(7): 1668–1674
- Ge Y, Chen Q G, Jiang M, Liu Z A. Stability analysis of networked control systems based on hidden Markov models. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2008, **29**(2): 273–278
- Li Q L. *Constructive Computation in Stochastic Models with Applications: The RG-Factorizations*. Berlin: Springer-Verlag, 2010. 2–11
- Ross S M. *Stochastic Processes*. New York: John Wiley, 1983. 258–260
- Liu Yuan-Yuan. Ergodic Theory of Markov Processes and Its Applications [Ph. D. dissertation], Central South University, China, 2006  
(刘源远. 马氏过程的遍历性理论及其应用 [博士学位论文]. 中南大学, 中国, 2006)
- He Jian, Bai Guang-Wei. Performance study of S-MAC protocol in wireless sensor network. *Computer Engineering*, 2010, **36**(24): 87–89  
(何剑, 白光伟. 无线传感器网络 S-MAC 协议性能研究. 计算机工程, 2010, **36**(24): 87–89)
- Bai Xiang, Mao Yu-Ming. Performance investigation of IEEE 802.11e EDCA based on the M/G/1/K queue model. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2008, **30**(7): 1610–1614  
(白翔, 毛玉明. 基于 M/G/1/K 排队模型的 IEEE 802.11e EDCA 性能研究. 电子与信息学报, 2008, **30**(7): 1610–1614)
- Rubino G, Sericola B. Sojourn times in finite Markov processes. *Journal of Applied Probability*, 1989, **26**(4): 744–756
- Ji Y, Chizeck H J, Feng X, Loparo K A. Stability and control of discrete-time jump linear systems. *Control Theory and Advanced Technology*, 1991, **7**(2): 247–270
- Wang Y Y, Xie L H, De Souza C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 1992, **19**(2): 139–149

宋 杨 上海大学机电工程与自动化学院副研究员. 主要研究方向为切换系统, 网络控制理论与应用. 本文通信作者.

E-mail: y\_song@shu.edu.cn

(**SONG Yang** Associate professor at the School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University. His research interest covers switched systems, networked control theory and application. Corresponding author of this paper.)

董 豪 上海大学机电工程与自动化学院硕士研究生. 主要研究方向为网络控制系统. E-mail: 07121936@163.com

(**DONG Hao** Master student at the School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University. His research interest covers networked control systems.)

费敏锐 上海大学机电工程与自动化学院教授. 主要研究方向为网络控制, 无线传感网络. E-mail: mrfei@staff.shu.edu.cn

(**FEI Min-Rui** Professor at the School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University. His research interest covers networked control and wireless sensor networks.)