一类非线性时变时滞系统的稳定性分析与吸引域估计

杨仁明[1,2]　王玉振[1]

摘　要　针对一类非线性时变时滞系统, 研究其稳定性和吸引域的估计问题. 首先, 通过坐标变换和正交分解法, 将这类系统转化为一个等价形式. 其次, 基于正交条件和引入自由权矩阵, 给出了这类系统具有较小保守性的稳定性和吸引域估计结果. 最后, 仿真例子验证了所提出方法的有效性.

关键词　时变时滞系统, 等价形式, 稳定性, 吸引域

引用格式　杨仁明, 王玉振. 一类非线性时变时滞系统的稳定性分析与吸引域估计. 自动化学报, 2012, **38**(5): 716−724

DOI　10.3724/SP.J.1004.2012.00716

Stability Analysis and Estimate of Domain of Attraction for a Class of Nonlinear Time-varying Delay Systems

YANG Ren-Ming[1,2]　WANG Yu-Zhen[1]

Abstract　The stability and estimate of domain of attraction are studied for a class of nonlinear time-varying delay systems. Firstly, an equivalent form is obtained for the systems by means of coordinate transformation and orthogonal decomposition of vector fields. Then, based on the orthogonal condition and the free-weighting matrix method, several less conservative results are derived on the stability and estimate of domain of attraction. Finally, illustrative examples show effectiveness of the proposed method.

Key words　Time-varying delay systems, equivalent form, stability, domain of attraction

Citation　Yang Ren-Ming, Wang Yu-Zhen. Stability analysis and estimate of domain of attraction for a class of nonlinear time-varying delay systems. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(5): 716−724

许多实际的控制系统经常包含时滞. 时滞的存在会带来系统不稳定、振动以及更差的行为, 因此研究时滞系统的稳定性和控制问题具有重要的理论和实际意义. 在过去的几十年里, 关于线性时滞系统的稳定性分析与控制设计, 已有许多较好的结果[1−8].

然而, 与线性时滞系统相比, 关于非线性时滞系统的相应结果却较少. 这是因为非线性时滞系统包含着更为复杂的动力学行为, 因此研究这类系统的分析与设计相应更难. 尽管如此, 有许多学者研究了这类系统, 并给出了一些较好的结果[9−20]. 文献 [16−17] 通过应用非线性矩阵不等式 (Nonlinear matrix inequality, NLMI) 技术, 研究了拟线性时滞系统的稳定性. 通过一个迭代过程, 文献 [13] 研究了一类三角结构系统的鲁棒镇定问题. 应用自由权矩阵方法, 文献 [18] 得到一些具有较小保守性的稳定性结果. 文献 [17] 通过应用 Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函方法, 研究了输入到状态稳定性, 得到了几个较小保守性的稳定性条件.

众所周知, 对一个给定的局部渐近稳定的非线性系统, 研究其吸引域是一个重要的问题. 然而, 对一个非线性时滞系统, 要找到其精确的吸引域几乎是不可能的. 因此, 吸引域的估计便成为唯一可能研究该类问题的方法. 一类非线性无时滞系统[21−22] 以及一些简单非线性时滞系统[16, 23] 的吸引域估计分别被研究. 文献 [16] 研究了一类可表达为微分代数形式的常时滞非线性系统的吸引域估计, 并提出了一个新的估计方法. 文献 [23] 通过应用一阶近似方法, 给出了一类非线性时滞系统的吸引域估计.

本文研究一类非线性时变时滞系统的稳定性和吸引域的估计问题, 并得到了几个新的和保守性小

收稿日期 2011-07-28　录用日期 2011-12-02
Manuscript received July 28, 2011; accepted December 2, 2011
国家自然科学基金 (61074068, 61034007, 61174036), 山东省泰山学者项目研究基金和省自然科学基金 (ZR2010FM013), 山东大学博士创新基金 (YZC09045), 安徽省高校省级自然科学基金 (KJ2008B61ZC) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61074068, 61034007, 61174036), the Research Fund for the Taishan Scholar Project of Shandong Province and the Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2010FM013), the Doctoral Innovation Foundation of Shandong University (YZC09 045), and the Natural Science Foundation of Colleges and Universities in Anhui Province (KJ2008B61ZC)
本文责任编委 张化光
Recommended by Associate Editor ZHANG Hua-Guang
1. 山东大学控制科学与工程学院 济南 250061　2. 山东交通学院 济南 250023
1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061　2. Shandong Jiaotong University, Jinan 250023

的结果. 本文的主要贡献如下: 1) 通过应用坐标变换和正交分解方法把待研究的非线性时滞系统转化为拟线性形式, 这不同于已存在的方法[15−16, 18, 23−24]; 2) 通过正交条件和自由权矩阵方法, 给出了较小保守性的结果. 另一方面, 为了得到较小保守性的结果, 本文也构建了一个包含时滞以及其导数信息的 L-K 泛函, 并应用了 Jensen 不等式[1] 和自由权矩阵[7] 方法. 与文献 [18] 相比, 本文所得到的结果有更小的保守性.

注 1. 设 P 和 Q 是对称矩阵, $P > Q$ ($P \geq Q$) 表示 $P - Q$ 是正定的 (半正定的). 类似的, $P < Q$ ($P \leq Q$) 意味着 $P - Q$ 是负定的 (半负定的). $\lambda_{\max}(P)$ 和 $\lambda_{\min}(P)$ 分别表示矩阵 P 的最大和最小特征值. $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\rm T}\boldsymbol{x}}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的欧氏范数, $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ 代表欧氏空间中的内积. 连续可微的欧氏空间 $\boldsymbol{\phi}:[-h,\,0]\to\mathbf{R}^n$ 连同它的有限范数 $\|\boldsymbol{\phi}\|_h = \sup_{-h\leq t\leq 0}\|\boldsymbol{\phi}(t)\|$ 记为 $\bigwedge$, $\boldsymbol{x}_t$ 表示 $\boldsymbol{x}_t(\theta)=\boldsymbol{x}(t+\theta), \forall\theta\in[-h,\,0]$, 以及 $\boldsymbol{x}_t\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ 意味着 $\boldsymbol{x}(t+\theta)\in\Omega, \forall\theta\in[-h,\,0]$.

1 问题描述与预备工作

考虑下列非线性时变时滞系统:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f(\boldsymbol{x}(t))+g(\boldsymbol{x}(t-d(t)))\\ \boldsymbol{x}(\theta)=\boldsymbol{\phi}(\theta),\ \ \theta\in[-h_2,\,0]\end{cases}\tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{x}(t+\theta)\in C([-h_2,0],\mathbf{R}^n)$, $f(\boldsymbol{x})$ 与 $g(\boldsymbol{x})$ 是满足 $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 和 $g(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 的两个 n 维光滑向量场, $\boldsymbol{\phi}(\theta)$ 是 n 维向量初值函数, $d(t)$ 是一个连续可微的时变时滞函数并满足下列限制条件:

$$0<h_1\leq d(t)\leq h_2\tag{2}$$

$$\mu_1\leq\dot{d}(t)\leq\mu_2\tag{3}$$

其中, h_1, h_2, μ_1 和 μ_2 是已知的常数.

本文的主要目标是研究系统 (1) 的稳定性与吸引域的估计.

如果 $f(\boldsymbol{x})\equiv\mathbf{0}$ 并且 $d(t)\equiv 0$, 则系统 (1) 表达为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=g(\boldsymbol{x}),\ \ g(\mathbf{0})=\mathbf{0}\tag{4}$$

接下来, 给出系统 (1) 的一个假设.

假设 1. 假设存在 $n\times n$ 矩阵 $M(\boldsymbol{x})$ 和 Jacobi 矩阵 $J_{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})}$ 非奇异的光滑向量场 $h(\boldsymbol{x})$ 使得 $g(\boldsymbol{x})=M(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 内成立, 其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是原点的一个有界凸邻域.

注 2. 根据文献 [25], 如果 $g(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵 J_g 有一个 $r\times r$ ($1\leq r\leq n$) 非奇异的主对角块, 则必存在 $n\times n$ 矩阵 $M(\boldsymbol{x})$ 和 $J_{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})}$ 非奇异的向量场 $h(\boldsymbol{x})$ 使得 $g(\boldsymbol{x})=M(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})$ 成立.

在假设 1 下, $\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 内是微分同胚的. 这样取 $\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x})$ 作为坐标变换, 则系统 (4) 可表达为

$$\dot{\boldsymbol{y}}=A(\boldsymbol{x})M(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{x}=h^{-1}(\boldsymbol{y})}\tag{5}$$

其中, $A(\boldsymbol{x})=J_h(\boldsymbol{x})$.

显然, 在假设 1 下, 系统 (4) 与系统 (5) 是等价的.

下面考虑系统 (1). 如果假设 1 成立, 并令 $\boldsymbol{x}_d=\boldsymbol{x}(t-d(t))$, 则系统 (1) 可表达为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f(\boldsymbol{x}(t))+M(\boldsymbol{x}_d)h(\boldsymbol{x}_d)$$

类似于系统 (5), 可得:

$$\dot{h}(\boldsymbol{x})=A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})+A(\boldsymbol{x})M(\boldsymbol{x}_d)h(\boldsymbol{x}_d)\tag{6}$$

根据文献 [12, 25], 沿着 $h(\boldsymbol{x})$ 的切方向和正交方向分解 $A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})$, 得到:

$$A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})=\frac{\langle A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}),\ h(\boldsymbol{x})\rangle}{\|h(\boldsymbol{x})\|^2}h(\boldsymbol{x})+G(\boldsymbol{x})\tag{7}$$

其中

$$G(\boldsymbol{x})=A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})-\frac{\langle A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}),\ h(\boldsymbol{x})\rangle}{\|h(\boldsymbol{x})\|^2}h(\boldsymbol{x})$$

显然

$$\langle G(\boldsymbol{x}),\ h(\boldsymbol{x})\rangle=\langle A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}),\ h(\boldsymbol{x})\rangle-\frac{\langle A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}),\ h(\boldsymbol{x})\rangle}{\|h(\boldsymbol{x})\|^2}\|h(\boldsymbol{x})\|^2=0$$

即 $G(\boldsymbol{x})\perp h(\boldsymbol{x})$ 成立.

因此在假设 1 和坐标变换 $\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x})$ 下, 系统 (1) 可等价转化为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{y}}(t)=B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_d)\boldsymbol{y}_d+D(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}+G(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{y}(\theta)=h(\boldsymbol{\phi}(\theta)),\qquad\forall\theta\in[-h_2,0]\end{cases}\tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{y}_d=\boldsymbol{y}(t-d(t)),\ \boldsymbol{x}=h^{-1}(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{x}_d=h^{-1}(\boldsymbol{y}_d)$$

$$\begin{aligned}&B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_d)=A(\boldsymbol{x})M(\boldsymbol{x}_d)\\&D(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{\langle A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}),\ h(\boldsymbol{x})\rangle}{\|h(\boldsymbol{x})\|^2}I_n, & \boldsymbol{y}\neq\mathbf{0}\\ D(\mathbf{0}), & \boldsymbol{y}=\mathbf{0}\end{cases}\end{aligned}\tag{9}$$

$D(\mathbf{0}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to 0} \frac{\langle A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}),\, h(\boldsymbol{x})\rangle}{\|h(\boldsymbol{x})\|^2} I_n$. 如果极限不存在, 可令 $D(\mathbf{0}) = 0_{n\times n}$.

下面给出系统 (1) 的几条性质.

由 $G(\boldsymbol{x}) \perp h(\boldsymbol{x})$ 易得:

$$\langle G(\boldsymbol{x}),\, \boldsymbol{y}\rangle = 0 \tag{10}$$

根据式 (7) 和式 (9) 以及 $\boldsymbol{y} = h(\boldsymbol{x})$, 可得: $H(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = D(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} + G(\boldsymbol{x})$, 即

$$E(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} + G(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \tag{11}$$

其中

$E(\boldsymbol{x}) = D(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x})$

$$H(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})h^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})}{\|h(\boldsymbol{x})\|^2}, & h(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0} \\ \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to 0} \dfrac{A(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})h^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})}{\|h(\boldsymbol{x})\|^2} \text{ 或 } 0_{n\times n}, & h(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

另外, 我们有:

$$g(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y},\;\; g(\boldsymbol{x}_d) = M(\boldsymbol{x}_d)\boldsymbol{y}_d \tag{12}$$

为了方便应用, 下面给出吸引域估计的定义.

定义 1[16]**.** 假设系统 (1) 的零解是渐近稳定的. 集合 $\Theta = \left\{\boldsymbol{\phi} \in \Lambda : \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\phi}) = 0\right\}$ 称为系统 (1) 的零解吸引域的估计.

2 稳定性分析

本节基于等价形式 (8), 分两种情形研究系统 (1) 的稳定性: 1) μ_1 和 μ_2 是已知的; 2) μ_1 和 (或) μ_2 未知.

对 μ_1 和 μ_2 已知的情形, 我们有下列结果.

定理 1. 当 μ_1 和 μ_2 已知, 并且式 (2) 和式 (3) 成立时, 考虑系统 (1). 如果假设 1 成立, 且存在常数 a, 常正定矩阵 P, Q_i $(i = 1,2,3)$, Z_j $(j = 1,2)$, R 以及常阵 N_1, N_2, N_3, 使得

$$\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_d) = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & Z_1 & 0 & \Gamma_{15} \\ * & \Gamma_{22} & Z_2 & Z_2 & \hat{B}^{\mathrm{T}}Z \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & -Q_3 - Z_2 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \Gamma_{55} \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

其中, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_d) \in \Omega\times\Omega$, $\hat{D} = D(\boldsymbol{x})$, $\hat{B} = A(\boldsymbol{x})\hat{M}$, $\hat{M} = M(\boldsymbol{x}_d)$, $E(\boldsymbol{x})$ 定义于式 (11), 并且

$$\begin{aligned} h_{12} &= h_2 - h_1,\;\; Z = h_1^2 Z_1 + h_{12}^2 Z_2 \\ \Gamma_{11} &= P\hat{D} + \hat{D}^{\mathrm{T}}P + Q_1 - Z_1 + \hat{D}^{\mathrm{T}}Z\hat{D} + \\ &\quad N_1^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{x}) + E^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})N_1 + M^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})RM(\boldsymbol{x}) \\ \Gamma_{12} &= P\hat{B} + \hat{D}^{\mathrm{T}}Z\hat{B} \\ \Gamma_{22} &= -(1-\mu_2)Q_2 + (1-\mu_1)Q_3 - \\ &\quad (1-\mu_2)\hat{M}^{\mathrm{T}}R\hat{M} - 2Z_2 + \hat{B}^{\mathrm{T}}Z\hat{B} \\ \Gamma_{33} &= -Q_1 + Q_2 - Z_1 - Z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{15} &= P + aI_n + N_1^{\mathrm{T}} + E^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})N_2 + \\ &\quad N_3 h^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) + \hat{D}^{\mathrm{T}}Z \\ \Gamma_{55} &= N_2^{\mathrm{T}} + N_2 + Z \end{aligned} \tag{14}$$

则系统 (1) 是局部渐近稳定的.

证明. 由第 1 节可知在假设 1 下, 系统 (1) 等价于系统 (8). 因此为了证明系统 (1) 是局部渐近稳定的, 只需证明在该定理的条件下, 系统 (8) 是局部渐近稳定的.

考虑系统 (8), 构建如下的 L-K 泛函:

$$V(t,\boldsymbol{y}_t) = V_1(\boldsymbol{y}) + V_2(t,\boldsymbol{y}_t) + V_3(t,\boldsymbol{y}_t) \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{y}(t+\theta),\; V_1(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{y}(t)$$

$$\begin{aligned} V_2(t,\boldsymbol{y}_t) = &\int_{t-h_1}^{t} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)Q_1\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s + \\ &\int_{t-d(t)}^{t-h_1} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)Q_2\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s + \\ &\int_{t-h_2}^{t-d(t)} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)Q_3\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s + \\ &\int_{t-d(t)}^{t} g^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(s))Rg(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3(t,\boldsymbol{y}_t) = &\, h_1\int_{t-h_1}^{t}\int_{s}^{t} \dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(\tau)Z_1\dot{\boldsymbol{y}}(\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau + \\ &h_{12}\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t} \dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(\tau)Z_2\dot{\boldsymbol{y}}(\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

沿系统 (8) 的轨线计算 $V(t,\boldsymbol{y}_t)$ 的导数, 并根据式 (8) 和式 (12), 易得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = &\, \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\left\{P\hat{D} + \hat{D}^{\mathrm{T}}P\right\}\boldsymbol{y} + \\ &2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}P\hat{B}\boldsymbol{y}_d + 2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}PG(h^{-1}(\boldsymbol{y})) \end{aligned}$$

$$\dot{V}_2 \le \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}[M^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})RM(\boldsymbol{x}) + Q_1]\boldsymbol{y} +$$

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-h_1)\Big\{-Q_1+Q_2\Big\}\boldsymbol{y}(t-h_1)+$$
$$\boldsymbol{y}_d^{\mathrm{T}}\Big\{-(1-\mu_2)Q_2+(1-\mu_1)Q_3-(1-\mu_2)\times$$
$$\hat{M}^{\mathrm{T}}R\hat{M}\Big\}\boldsymbol{y}_d+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-h_2)(-Q_3)\boldsymbol{y}(t-h_2)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_3=&\,h_1^2\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(t)Z_1\dot{\boldsymbol{y}}(t)+h_{12}^2\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(t)Z_2\dot{\boldsymbol{y}}(t)-\\&h_1\int_{t-h_1}^{t}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(s)Z_1\dot{\boldsymbol{y}}(s)\mathrm{d}s-\\&h_{12}\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(s)Z_2\dot{\boldsymbol{y}}(s)\mathrm{d}s=\\&h_1^2\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(t)Z_1\dot{\boldsymbol{y}}(t)+h_{12}^2\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(t)Z_2\dot{\boldsymbol{y}}(t)-\\&\quad h_1\int_{t-h_1}^{t}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(s)Z_1\dot{\boldsymbol{y}}(s)\mathrm{d}s-\\&\quad h_{12}\int_{t-d(t)}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(s)Z_2\dot{\boldsymbol{y}}(s)\mathrm{d}s-\\&\quad h_{12}\int_{t-h_2}^{t-d(t)}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(s)Z_2\dot{\boldsymbol{y}}(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

应用 Jensen 不等式, 可得:

$$\begin{aligned}-h_1\int_{t-h_1}^{t}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(s)Z_1\dot{\boldsymbol{y}}(s)\mathrm{d}s\le&\\-[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(t-h_1)]^{\mathrm{T}}Z_1[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}(t-h_1)]&\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}-h_{12}\int_{t-d(t)}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(s)Z_2\dot{\boldsymbol{y}}(s)\mathrm{d}s\le&\\-[\boldsymbol{y}(t-h_1)-\boldsymbol{y}_d]^{\mathrm{T}}Z_2[\boldsymbol{y}(t-h_1)-\boldsymbol{y}_d]&\\-h_{12}\int_{t-h_2}^{t-d(t)}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(s)Z_2\dot{\boldsymbol{y}}(s)\mathrm{d}s\le&\\-[\boldsymbol{y}_d-\boldsymbol{y}(t-h_2)]^{\mathrm{T}}Z_2[\boldsymbol{y}_d-\boldsymbol{y}(t-h_2)]&\end{aligned}\tag{17}$$

另外, 由式 (10), 式 (11) 和 $\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x})$, 得到:

$$\begin{aligned}2[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}N_1^{\mathrm{T}}+G^{\mathrm{T}}(h^{-1}(\boldsymbol{y}))N_2^{\mathrm{T}}]\times&\\ [E(h^{-1}(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{y}+G(h^{-1}(\boldsymbol{y}))=0&\end{aligned}\tag{18}$$

$$2a\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}G(h^{-1}(\boldsymbol{y}))=0,\ \ 2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}N_3\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}G(h^{-1}(\boldsymbol{y}))=0\tag{19}$$

把 $\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\hat{D}\boldsymbol{y}+\hat{B}\boldsymbol{y}_d+G(h^{-1}(\boldsymbol{y}))$ 代入 $\dot{V}_3$, 并注意到式 (16) ∼ (19), 我们有 $\dot{V}\le\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Phi\boldsymbol{\xi}$, 其中 $\boldsymbol{\xi}=[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}_d^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-h_1),\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-h_2),G^{\mathrm{T}}(h^{-1}(\boldsymbol{y}))]^{\mathrm{T}}$.

由条件 (13), 可得当 $\boldsymbol{\xi}\neq0$ 时, $\dot{V}<0$, 即系统 (8) 在 $\Omega_0=h(\Omega)$ 内是局部渐近稳定的. 所以系统 (1) 是局部渐近稳定的. □

接下来, 当 μ_1 未知 μ_2 已知时, 我们有下列结果.

定理 2. 考虑系统 (1), 假设 μ_1 未知和 μ_2 已知, 并且式 (2) 和式 (3) 成立. 如果假设 1 成立, 并存在常数 a, 常正定矩阵 P, Q_i $(i=1,2,3)$, Z_j $(j=1,2)$, R 以及常阵 N_1, N_2, N_3 使得下列不等式成立:

$$\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_d)=\begin{bmatrix}\Gamma_{11}&\Gamma_{12}&Z_1&0&\Gamma_{15}\\ *&\Gamma_{22}&Z_2&Z_2&\hat{B}^{\mathrm{T}}Z\\ *&*&\Gamma_{33}&0&0\\ 0&*&0&-Q_2-Z_2&0\\ *&*&0&0&\Gamma_{55}\end{bmatrix}<0$$

其中, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_d)\in\Omega\times\Omega$, h_{12}, Z, $\hat{D}$, $\hat{B}$, $\hat{M}$, Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{15} 和 Γ_{55} 与定理 1 相同, 并且 $\Gamma_{22}=-(1-\mu_2)Q_3-2Z_2-(1-\mu_2)\hat{M}^{\mathrm{T}}R\hat{M}+\hat{B}^{\mathrm{T}}Z\hat{B}$, $\Gamma_{33}=-Q_1+Q_2+Q_3-Z_1-Z_2$. 则系统 (1) 是局部渐近稳定的.

证明. 类似于定理 1, 下面构建一个候选 L-K 泛函: $V(t,\boldsymbol{y}_t)=V_1(\boldsymbol{y})+V_2(t,\boldsymbol{y}_t)+V_3(t,\boldsymbol{y}_t)$, 其中

$$\begin{aligned}V_1(\boldsymbol{y})=&\,\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{y}(t)\\V_2(t,\boldsymbol{y}_t)=&\int_{t-h_1}^{t}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)Q_1\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s+\\&\int_{t-h_2}^{t-h_1}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)Q_2\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s+\\&\int_{t-d(t)}^{t-h_1}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)Q_3\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s+\\&\int_{t-d(t)}^{t}g^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(s))Rg(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s\\V_3(t,\boldsymbol{y}_t)=&\,h_1\int_{t-h_1}^{t}\int_{s}^{t}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(\tau)Z_1\dot{\boldsymbol{y}}(\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+\\&h_{12}\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(\tau)Z_2\dot{\boldsymbol{y}}(\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

其余证明类似于定理 1, 因此省略. □

根据定理 2, 当 μ_1 和 μ_2 都未知时, 可得下列推论.

推论 1. 在条件 (2) 下, 考虑系统 (1). 如果假设 1 成立, 并存在常数 a, 常正定矩阵 P, Q_i $(i=1,2)$, Z_j $(j=1,2)$, 以及常阵 N_1, N_2, N_3 使得下列不等式成立:

$$\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_d)=$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & Z_1 & 0 & \Gamma_{15} \\ * & \Gamma_{22} & Z_2 & Z_2 & \hat{B}^{\mathrm{T}}Z \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & -Q_2-Z_2 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \Gamma_{55} \end{bmatrix} < 0$$

其中, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_d)\in\Omega\times\Omega$, h_{12}, Z, $\hat{D}$, $\hat{B}$, $\hat{M}$, Γ_{12}, Γ_{15} 和 Γ_{55} 与定理 2 相同, $\Gamma_{11}=P\hat{D}+\hat{D}^{\mathrm{T}}P+Q_1-Z_1+\hat{D}^{\mathrm{T}}Z\hat{D}+N_1^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{x})+E^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})N_1$, $\Gamma_{22}=-2Z_2+\hat{B}^{\mathrm{T}}Z\hat{B}$ 和 $\Gamma_{33}=-Q_1+Q_2-Z_1-Z_2$. 则系统 (1) 是局部渐近稳定的.

证明. 在定理 2 的证明中, 令 $Q_3=0$ 和 $R=0$, 可得这个结果. □

下面, 给出系统 (1) 在常时滞情形下的一个结果.

推论 2. 当 $d(t)=\tau>0$ 时 (τ 是常数), 考虑系统 (1). 如果假设 1 成立, 并存在常数 a, 常正定矩阵 P, Q, Z, R 以及常阵 N_i $(i=1,2,3)$, 使得 $\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_d)=$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ * & \Gamma_{22} & \tau^2\hat{B}^{\mathrm{T}}Z \\ * & * & N_2+N_2^{\mathrm{T}}+\tau^2 Z \end{bmatrix} < 0 \tag{20}$$

成立, 其中 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_d)\in\Omega\times\Omega$ 和 $\hat{D}$, $\hat{B}$, $\hat{M}$, $E(\boldsymbol{x})$ 与定理 2 相同,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}=\,&P\hat{D}+\hat{D}^{\mathrm{T}}P+Q-Z+N_1^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{x})+\\
&E^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})N_1+\tau^2\hat{D}^{\mathrm{T}}Z\hat{D}+M^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})RM(\boldsymbol{x})\\
\Gamma_{12}=\,&P\hat{B}+Z+\tau^2\hat{D}^{\mathrm{T}}Z\hat{B}\\
\Gamma_{13}=\,&aI_n+N_1^{\mathrm{T}}+E^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})N_2+P+\\
&N_3h^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\tau^2\hat{D}^{\mathrm{T}}Z\\
\Gamma_{22}=\,&-Q-Z-\hat{M}^{\mathrm{T}}R\hat{M}+\tau^2\hat{B}^{\mathrm{T}}Z\hat{B}
\end{aligned}$$

则系统 (1) 是局部渐近稳定的.

证明. 考虑下列候选 L-K 泛函:

$$\begin{aligned}
V(t,\boldsymbol{y}_t)=\,&\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{y}(t)+\int_{t-\tau}^{t}[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)Q\boldsymbol{y}(s)+\\
&g^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(s))Rg(\boldsymbol{x}(s))]\mathrm{d}s+\\
&\tau\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(\alpha)Z\dot{\boldsymbol{y}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

同于定理 2 的证明, 可得这个结果. □

注 3. 本节应用的方法是自由权矩阵加向量场的正交分解, 这个方法有下列优势: 1) 在假设 1 下, 应用这个方法, 人们能够把非线性时滞系统 (1) 转化为拟线性形式 (8); 2) 通过应用正交条件 (10), 可以引入更大自由度的方程 $2a\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}G(h^{-1}(\boldsymbol{y}))=0$ 和 $2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}N_3\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}G(h^{-1}(\boldsymbol{y}))=0$, 使得本文的结果有较小的保守性 (参见例 1 和例 2); 3) 如果 J_g 是非奇异的, 容易看到本文得到的所有结果只包含 $\boldsymbol{x}$ 而不包含时滞项 $\boldsymbol{x}(t-d(t))$, 这是本文应用坐标变换方法的优势 (见例 1).

3 吸引域估计

通过应用第 2 节的结果, 本节研究系统 (1) 的吸引域估计问题.

为了方便应用, 假设集合 $\Omega_0=h(\Omega)$:

$$\Omega_1=\left\{\boldsymbol{y}\in h(\Omega):\alpha_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\le 1,\ i=1,2,\cdots,m\right\} \tag{21}$$

其中, α_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 定义了 Ω_1 的 m 个边界, 是已知的常向量, Ω 与 $h(\boldsymbol{x})$ 与第 2 节相同.

对系统 (1) 的吸引域估计, 我们给出下列结果:

定理 3. 当 μ_1, μ_2 已知, 并且式 (2) 和式 (3) 成立时, 考虑系统 (1). 如果:

1) 假设 1 成立, 并存在常数 a, 常正定矩阵 P, Q_i $(i=1,2,3)$, Z_j $(j=1,2)$ 以及常阵 N_1, N_2, N_3 使得条件 (13) 在 Ω 内成立;

2) 存在正实数 k, s, ι 使得

$$k-h_2-\frac{h_1^3}{2}-\frac{h_{12}(h_1^2+h_2^2)}{2}-1\ge 0 \tag{22}$$

$$\iota\ge\max_{1\le i\le 2}\{\lambda_{\max}(Z_i)\} \tag{23}$$

以及如下最优问题

$$\begin{aligned}
&\min\eta\\
\text{s.t.}\quad&\eta I_n-P\ge 0 &(24)\\
&\begin{bmatrix} 2s-k & -s\alpha_i^{\mathrm{T}} \\ -s\alpha_i & P \end{bmatrix}\ge 0 &(25)\\
&\eta\ge\max_{1\le i\le 3}\{\lambda_{\max}(Q_i)\} &(26)
\end{aligned}$$

有解 (η^*,P^*), 这里 $i=1,2,\cdots,m$.

则集合

$$\Theta_d=\left\{\boldsymbol{\phi}\in\Lambda:\eta^*\|h(\boldsymbol{\phi})\|^2\le 1,\iota\|\dot{h}(\boldsymbol{\phi})\|^2\le 1\right\} \tag{27}$$

是系统 (1) 的一个吸引域估计.

证明. 根据条件 1) 以及定理 1, 可得式 (15) 中的 $V(t,\boldsymbol{y}_t)$ 是系统 (8) 的一个 L-K 泛函候选函数.

令 $\Psi=\left\{\boldsymbol{y}_t\in h(\Lambda):V(t,\boldsymbol{y}_t)\le k\right\}$, 在条件 1) 下, 如果 $\Psi\subset\Omega_1$ 成立, 则 Ψ 是一个正不变集. 下面证明 $\Psi\subset\Omega_1$.

由于 $V_1(\boldsymbol{y})\le V(t,\boldsymbol{y}_t)$, 易得集合

$$\Psi_1=\left\{\boldsymbol{y}\in h(\Lambda):V_1(\boldsymbol{y})\le k\right\}\tag{28}$$

包含 Ψ, 其中 $V_1=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{y}$. 因此, 只需证明 $\Psi_1\subset\Omega_1$.

注意到

$$\Omega_1=\left\{\boldsymbol{y}\in h(\Omega):\alpha_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\le 1,i=1,2,\cdots,m\right\}\tag{29}$$

并根据式 (28) 和式 (29), 若使 $\Psi_1\subset\Omega_1$ 成立, 需要

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{y}-k\le 0,\ \ \forall\boldsymbol{y}\in h(\Lambda),\\ \text{s.t.}\quad &2-2\alpha_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\ge 0,\ \ i=1,2,\cdots,m\end{aligned}\tag{30}$$

成立. 应用 S- 过程[26], 只需下列条件成立:

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\left[\begin{array}{cc}2s-k & -s\alpha_i^{\mathrm{T}}\\ -s\alpha_i & P\end{array}\right]\boldsymbol{\xi}\ge 0\tag{31}$$

这等价于条件 (25). 从条件 (25), 可得式 (30) 成立, 即 $\Psi\subset\Omega_1$ 成立, 其中 $\boldsymbol{\xi}=[1,\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $s>0$ 是通过 S- 过程引入的标量.

接下来, 为了说明式 (27) 是系统 (1) 的一个吸引域估计, 需要证明 $V(h(\boldsymbol{\phi}))\le k$ 对 $\forall\boldsymbol{\phi}\in\Theta_d$ 成立. 根据式 (23) 和式 (26) 以及 $\boldsymbol{\phi}\in\Theta_d$, 只需证明:

$$\begin{aligned}h(\boldsymbol{\phi})^{\mathrm{T}}Ph(\boldsymbol{\phi})-k+h_2+\frac{h_1^3}{2}+\frac{h_{12}(h_1^2+h_2^2)}{2}\le 0,\\ \forall\boldsymbol{\phi}\in\Lambda:\eta\|h(\boldsymbol{\phi})\|_{h_2}^2\le 1\end{aligned}\tag{32}$$

应用 S- 过程, 不等式 (32) 成立只需下式成立:

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\left[\begin{array}{cc}\gamma_1 & 0\\ 0 & \eta I_n-P\end{array}\right]\boldsymbol{\xi}\ge 0\tag{33}$$

其中, $\gamma_1=\frac{k-h_2-\frac{h_1^3}{2}-h_{12}(h_1^2+h_2^2)}{2}-1$. 从条件 (22) 和 (24), 可得式 (33) 成立, 即 $V(h(\boldsymbol{\phi}))\le k$. 这样定理得证. □

注意到人们不能直接从式 (27) 得到系统 (1) 的吸引域估计, 下面给出一个粗略的计算方法.

1) 如果 h 是单位算子, 从式 (27) 可直接得到系统 (1) 的吸引域估计.

2) 如果 h 是一线性算子, 易得:

$$\|h(\boldsymbol{\phi})\|\le\|h\|\|\boldsymbol{\phi}\|\tag{34}$$

其中, $\|h\|=\sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\|h(\boldsymbol{x})\|$, $\boldsymbol{x}\in\Omega$.

3) 如果 h 是一个非线性算子, 用微分中值不等式, 可得:

$$\|h(\boldsymbol{\phi})\|=\|h(\boldsymbol{\phi})-h(\boldsymbol{0})\|\le\|J_{h(\boldsymbol{\xi})}\|\|\boldsymbol{\phi}\|\tag{35}$$

其中, $\boldsymbol{\xi}\in\Omega$, $J_{h(\boldsymbol{x})}$ 是 $h(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵.

根据式 (34) 和式 (35), 如果 $\sqrt{\eta^*}\|h\|\|\boldsymbol{\phi}\|\le 1$ 或 $\sqrt{\eta^*}d\|\boldsymbol{\phi}\|\le 1$ 成立, 则 $\eta^*\|h(\boldsymbol{\phi})\|_{h_2}^2\le 1$, 这样人们能够得到系统 (1) 的吸引域估计, 其中 $d=\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\Omega}\|J_{h(\boldsymbol{\xi})}\|$.

注 4. 1) 用同样的方法, 易得初值 ϕ 的导数集的估计; 2) 定理 3 的结果可推广到系统 (1) 为常时滞的情形.

注 5. 本文的结果都是以非线性矩阵不等式的形式给出的, 有许多方法可以解这种不等式, 譬如, 有限元方法[27]、凸集顶点算法[16]、平方和分解法[15]、分割方法[28−29]、凸集方法[30] 等. 在第 4 节, 我们将用凸集算法来解这些 NLMI (见例 1 和例 2).

4 例证

例 1. 考虑下列非线性时滞系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1^3+x_1^2-x_1+0.5x_2-2x_1(t-d(t))+\\ \qquad 2x_2(t-d(t))\\ \dot{x}_2=-0.5x_1+x_2^3+x_2^2-x_2-2x_1(t-d(t))-\\ \qquad 2x_2(t-d(t))\end{cases}\tag{36}$$

其中, $\boldsymbol{x}=[x_1,\ x_2]^{\mathrm{T}}\in\Omega=\{(x_1,\ x_2)\text{: }|x_1|\le 0.5,|x_2|\le 0.5\}$, $d(t)$ 是一个时变时滞满足 $0\le d(t)\le\tau$ (注意到当 $d(t)$ 是常数时, 系统 (36) 就是文献 [16] 中的例 10).

在这个例子中, $f(\boldsymbol{x})=[x_1^3+x_1^2-x_1+0.5x_2,-0.5x_1+x_2^3+x_2^2-x_2]^{\mathrm{T}}$, $g(\boldsymbol{x})=[-2x_1+2x_2,-2x_1-2x_2]^{\mathrm{T}}$. 由于 $g(x)$ 是线性的, 令 $\boldsymbol{y}=[x_1,x_2]^{\mathrm{T}}=h(\boldsymbol{x})$. 很明显, $J_h(\boldsymbol{x})=A(\boldsymbol{x})=I_2$ 在 Ω 内非奇异. 取 $\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x})$ 作为一个坐标变换, 则当 $h(\boldsymbol{x})\ne 0$, 可得:

$$\begin{aligned}&D(\boldsymbol{x})=\left(\frac{x_1^4+x_2^4+x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}-1\right)I_2\\ &B(\boldsymbol{x})=\left[\begin{array}{cc}-2 & 2\\ -2 & -2\end{array}\right]\end{aligned}\tag{37}$$

$$H(\boldsymbol{x})=\left[\begin{array}{cc}x_1^2+x_1-1 & 0.5\\ -0.5 & x_2^2+x_2-1\end{array}\right]$$

其中, $f(\boldsymbol{x}) = C(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$. 当 $h(\boldsymbol{x}) = 0$ 时,

$$h(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad D(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

接下来, 我们用推论 1 分析系统 (36) 的稳定性.

注意到 $x_1^2 + x_1 - 1$ 和 $x_2^2 + x_2 - 1$ 是区间 [-0.5, 0.5] 上的单调函数, 易得:

$$H^1 = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.5 \\ -0.5 & -0.25 \end{bmatrix}, \ h^1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$H^2 = \begin{bmatrix} -1.25 & 0.5 \\ -0.5 & -0.25 \end{bmatrix}, \ h^2 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$H^3 = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.5 \\ -0.5 & -1.25 \end{bmatrix}, \ h^3 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$H^4 = \begin{bmatrix} -1.25 & 0.5 \\ -0.5 & -1.25 \end{bmatrix}, \ h^4 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

令 $a = 0$, $h_1 = 0$, $h_{12} = \tau$. 用推论 1 以及凸集方法, 可得存在 P, Q_i, Z_i $(i = 1, 2)$ 和 N_i $(i = 1, 2, 3)$ 使得推论 1 中的矩阵 $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_d)$ 是负定的, 同时最大的时滞 $h_{\max} = 0.3009$. 根据推论 1, 当 $0 < d(t) \leq 0.3009$ 时, 系统 (36) 是局部渐近稳定的.

为了表明本文的方法有较小的保守性, 我们给出与文献 [18] 的一个比较. 应用文献 [18] 中的方法, 得到最大的时滞是 $h_{\max} = 0.2608$, 比应用推论 1 所得到的 0.3009 要小.

另一方面, 当 $h_1 = 0.01$, $\mu_1 = -1$ 和 $\mu_2 = 2$ 时, 用定理 1 来研究这个系统的渐近稳定性. 令 $a = 0$, $R = 0$, 用定理 1 和凸集算法, 得存在矩阵 P, Q_i, Z_j $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2)$ 和 N_i $(i = 1, 2, 3)$ 使得定理 1 中 $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_d)$ 是负定的, 同时最大的 h_2 是 $h_{\max} = 0.2576$. 根据定理 1, 当 $0.01 \leq d(t) \leq 0.2576$ 时, 系统 (36) 是渐近稳定的.

从这个例子可以看出, 在分析非线性时滞系统的稳定性时, 本文的方法是有效的, 并有较小的保守性.

例 2. 考虑下列非线性时滞系统[16]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - 2x_2(t - \tau) + 0.5x_2^3(t - \tau) \end{cases} \tag{39}$$

其中, $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2]^{\rm T} \in \Omega = \{(x_1,\ x_2):\ x_1^2 + x_2^2 \leq 2.8^2\}$, $\tau = 1$.

下面, 用定理 3 来给出系统 (39) 的吸引域估计.

在这个例子中, $f(\boldsymbol{x}) = [x_2,\ -x_1 - 2x_2]^{\rm T}$, $g(\boldsymbol{x}) = [0,\ -2x_2 + 0.5x_2^3]^{\rm T}$. 分解 $g(\boldsymbol{x})$ 如下: $g(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 + 0.5x_2^2 & 2 - 0.5x_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} = M(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})$. 由于 J_h 非奇异, 取 $\boldsymbol{y} = h(\boldsymbol{x})$ 作为坐标变换, 可得 $D(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x})$ 以及 $h(\boldsymbol{x})$:

当 $h(\boldsymbol{x}) \neq 0$,

$$D(\boldsymbol{x}) = \frac{-2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} I_2 \in [-2,\ 0] I_2$$

$$H(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ h(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

当 $h(\boldsymbol{x}) = 0$,

$$D(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ h(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

通过直接计算, 可得:

$$\Omega_1 = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^2 : \|\boldsymbol{y}\| \leq 2.8\sqrt{2}\}$$

$$\hat{B} = \{1 - 0.25x_2^2(t - 1)\} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M(\boldsymbol{x}) = \left\{1 - 0.25x_2^2\right\} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{M} = \{1 - 0.25x_2^2(t - 1)\} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

注意到 $1 - 0.25x_2^2 \in [-0.96,\ 1]$ 和 $1 - 0.25x_2^2(t - 1) \in [-0.96,\ 1]$, 易得:

$$\hat{B}^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \hat{M}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}^2 = \begin{bmatrix} 0.96 & -0.96 \\ -0.96 & 0.96 \end{bmatrix}, \ \hat{M}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.96 & -0.96 \end{bmatrix}$$

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h^1 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}, \ D^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.96 & -0.96 \end{bmatrix}, h^2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

另一方面, 选取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2.8\sqrt{2}}$, 可得对 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}} \in \Omega_1$, $i = 1, 2$, $\alpha_i |y_i| \leq 1$ 成立.

从注 4 的 2), 可得存在 a, $k > 0$, $s > 0$, $\iota = 10^{-10}$, N_i $(i = 1, 2, 3)$, $P > 0$, $Q > 0$, $Z > 0$, $R > 0$ 以及最优解 $\eta^* = 0.166$, 使得定理 3 的所有条件成立. 根据定理 3, 可得系统 (39) 的吸引域估计为

$$\Theta_d = \Big\{\boldsymbol{\phi}(t) \in C^1[-1, 0] : \|\boldsymbol{\phi}(t)\| \leq 1.7355, \|\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)\| \leq 7.071 \times 10^4\Big\} \tag{41}$$

其中, $\boldsymbol{\phi}(t) : [-1, 0] \mapsto \mathbf{R}^2$.

另外, 用文献 [16] 中的方法, 系统 (39) 的吸引域估计为

$$\Theta_d = \{\boldsymbol{\phi} \in C^1[-1, 0] : \|\boldsymbol{\phi}(t)\| \leq 1.25, \|\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)\| \leq 10^4\}$$

小于本文所得到的结果.

这个例子表明本文的方法具有更小的保守性.

5 结论

本文研究了一类非线性时滞系统的稳定性和吸引域的估计. 通过坐标变换和正交分解法, 把原系统转化为一个等价形式. 基于这个等价形式和自由权矩阵方法, 给出了几个更小保守性稳定性和吸引域的估计结果. 论证例子表明了本文方法的有效性.

References

1 Gu K Q, Kharitonov V L, Chen J. *Stability of Time-Delay Systems*. Berlin: Springer, 2003. 322−323

2 Quan Quan, Yang De-Dong, Cai Kai-Yuan. Adaptive compensation for robust tracking of uncertain dynamic delay systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(8): 1189−1194

3 Cong Shen, Zhang Hai-Tao, Zou Yun. A new exponential stability condition for delayed systems with Markovian switching. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 1025−1028

4 Li Q K, Zhao J, Dimirovski G M, Liu X J. State convergence property of perturbed switched linear time-delay systems. *IET Control Theory and Applications*, 2010, **4**(2): 273−281

5 Sun Xin, Zhang Qing-Ling, Yang Chun-Yu, Shao Yong-Yun, Su Zhan. Delay-dependent stability analysis and stabilization of discrete-time singular delay systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(10): 1477−1483

6 Xu S Y, Lam J. Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(3): 384−387

7 He Y, Wang Q G, Lin C, Wu M. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay. *Automatica*, 2007, **43**(2): 371−376

8 Han Q L. A delay decomposition approach to stability of linear neutral systems. In: Proceedings of the 17th International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress. Seoul, Korea: IEEE, 2008. 2607−2612

9 Fu Y S, Tian Z H, Shi S J. Output feedback stabilization for a class of stochastic time-delay nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(6): 847−851

10 Zemouche A, Boutayeb M, Bara G I. On observers design for nonlinear time-delay systems. In: Proceedings of the American Control Conference. Minneapolis, Minnesota, USA: IEEE, 2006. 4025−4030

11 Gong Q X, Zhang H G, Song C H, Liu D R. Disturbance decoupling control for a class of nonlinear time-delay system. In: Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Dalian, China, IEEE: 2006. 878−882

12 Yang R M, Wang Y Z. Stability analysis and H_∞ control design for a class of nonlinear time-delay systems. *Asian Journal of Control*, 2012, **14**(1): 153−162

13 Nguang S K. Robust stabilization of a class of time-delay nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(4): 756−762

14 Sun W W, Wang Y Z, Yang R M. L_2 disturbance attenuation for a class of time-delay Hamiltonian systems. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2011, **24**(4): 672−682

15 Papachristodoulou A. Analysis of nonlinear time-delay systems using the sum of squares decomposition. In: Proceedings of the American Control Conference. Pasadena CA, USA: IEEE, 2004. 4153−4158

16 Coutinho D F, de Souza C E. Delay-dependent robust stability and L_2-gain analysis of a class of nonlinear time-delay systems. *Automatica*, 2008, **44**(8): 2006−2018

17 Fridman E, Dambrine M, Yeganefar N. On input-to-state stability of systems with time-delay: a matrix inequalities approach. *Automatica*, 2008, **44**(9): 2364−2369

18 Zhang W, Cai X S, Han Z Z. Robust stability criteria for systems with interval time-varying delay and nonlinear perturbations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010, **234**(1): 174−180

19 Ramakrishnan K, Ray G. Improved stability criteria for lurie type systems with time-varying delay. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(5): 639−644

20 Lin Jin-Xing, Fei Shu-Min. Robust exponential admissibility of uncertain switched singular time-delay systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(12): 1773−1779

21 Khalil H K. *Nonlinear Systems (3rd Edition)*. USA: Prentice Hall, 2002. 312−322

22 Cao J D. An estimation of the domain of attraction and convergence rate for Hopfield continuous feedback neural networks. *Physics Letters A*, 2004, **325**(5−6): 370−374

23 Melchor-Aguilar D, Niculescu S I. Estimates of the attraction region for a class of nonlinear time-delay systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2007, **24**(4): 523−550

24 Mazenc F, Bliman P A. Backstepping design for time-delay nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(1): 149−154

25 Wang Y Z, Li C W, Cheng D Z. Generalized Hamiltonian realization of time-invariant nonlinear systems. *Automatica*, 2003, **39**(8): 1437−1443

26 Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM, 1994. 23−24

27 Lu W M, Doyle J C. Robustness analysis and synthesis for nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(12): 1654−1662

28 Zhang X P, Tsiotras P, Knospe C. Stability analysis of LPV time-delayed systems. *International Journal of Control*, 2002, **75**(7): 538−558

29 Wu F, Grigoriadis K M. LPV systems with parameter-varying time delays: analysis and control. *Automatica*, 2001, **37**(2): 221−229

30 Kiriakidis K. Control synthesis for a class of uncertain nonlinear systems. In: Proceedings of the American Control Conference. San Diego, California, USA: IEEE, 1999. 4073−4074

杨仁明 山东大学控制学院博士研究生.2006 年获得山东师范大学硕士学位. 主要研究方向为非线性、非线性时滞系统的稳定性和控制设计. 本文通信作者.
E-mail: renmingyang0222@tom.com
(**YANG Ren-Ming** Ph. D. candidate at Shandong University. He received his bachelor degree from Shandong Normal University in 2006. His research interest covers stability analysis and control design for nonlinear and nonlinear time-delay systems. Corres ponding author of this paper.)

王玉振 山东大学控制科学与工程学院教授. 2001 年获得中国科学院系统科学研究所博士学位, 2003 年清华大学博士后出站. 主要研究方向为非线性控制系统, Hamiltonian 系统与鲁棒控制.
E-mail: yzwang@sdu.edu.cn
(**WANG Yu-Zhen** Professor at the School of Control Science and Engineering, Shandong University. He received his Ph. D. degree from the Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences in 2001. From 2001 to 2003, he worked as a postdoctoral fellow in Tsinghua University. His research interest covers nonlinear control systems, Hamiltonian systems, and robust control.)