

# 广义区间二型模糊集合的词计算

莫红<sup>1</sup> 王涛<sup>2</sup>

**摘要** 普通的模糊集合是点值为二维的一型模糊集合, 二型模糊集合 (Type-2 fuzzy sets, T2 FS) 是点值为三维的模糊集合, T2 FS 比相应的一型难以理解和计算. 为了让人们更好地理解 T2 FS 并推广其应用, 本文提出了广义区间二型模糊集合 (Generalized interval type-2 fuzzy sets, GIT2 FS) 的定义, 并将其分成三类: 离散型、半离散型及连续型, 分别给出相应的数学表达式与扩展原理公式, 并得到了 GIT2 FS 在两种不同的模糊逻辑算子下的词计算.

**关键词** 广义区间二型模糊集合, 扩展原理, 词计算, 不确定覆盖域

**引用格式** 莫红, 王涛. 广义区间二型模糊集合的词计算. 自动化学报, 2012, 38(5): 707–715

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2012.00707

## Computing with Words in Generalized Interval Type-2 Fuzzy Sets

MO Hong<sup>1</sup> WANG Tao<sup>2</sup>

**Abstract** The conventional fuzzy sets are type-1 fuzzy sets whose point-values are two-dimensional, and the point-values of type-2 fuzzy sets (T2 FSs) are three-dimensional. So it is more difficult for T2 FS to be understood and computed than the corresponding type-1. To make T2 FS be better understood and extensively applied, in this paper, we present the definition of generalized interval type-2 fuzzy sets (GIT2 FSs), and divide them into three types: discrete type, partial discrete type, and continuous type. Then, the corresponding mathematical representation of every type is given to get the extension principle formula of GIT2 FS. Lastly, computing methods are proposed to discuss computing with words of GIT2 FS by two different fuzzy logic operators.

**Key words** Generalized interval type-2 fuzzy sets (GIT2 FS), extension principle, computing with words, footprint of uncertainty (FOU)

**Citation** Mo Hong, Wang Tao. Computing with words in generalized interval type-2 fuzzy sets. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(5): 707–715

自 Zadeh 提出“词计算”以来<sup>[1]</sup>, 词计算在理论与应用方面取得了很大的进展<sup>[2–4]</sup>, 被广泛应用于控制与决策<sup>[5–6]</sup>. 在语言动力系统 (Linguistic dynamic systems, LDS) 中, 词计算被分成基于扩展原理的词计算和基于模糊规则的词计算两种类型<sup>[7]</sup>, 并取代常规的数值符号计算<sup>[7–8]</sup>. 早期的词计算通常基于一型模糊集合<sup>[9–10]</sup>. 虽然一型模糊集合作为一种描述不确定性、模糊性、不精确性有效方

法<sup>[11–14]</sup>, 在复杂系统建模与分析方面发挥了重要的作用, 但是, 一型模糊集合实际上是一个精确的常值函数, 如何确定该函数, 不仅不同的人有不同的定义, 同一个人不同的时间、不同的地点还有不同的定义, 如在中国, “高工资”在近四十年, 其隶属函数在不断变化, “跑得快”在日常生活中的和在奥运赛场上的定义也不同. 如何描述模糊集合定义上的差异性, 这需要二型模糊集合.

由于二型模糊集合 (Type-2 fuzzy sets, T2 FS) 比相应的一型能够更好地描述语言的不确定性, 能更好地解决语言歧义和数据噪声问题, 因此, 近年来 T2 FS 成为人们关注的热点之一<sup>[15–17]</sup>, 并已应用于交通<sup>[18]</sup>、移动机器人<sup>[19]</sup>、工业过程控制<sup>[20]</sup>、电力变换<sup>[21]</sup> 等实际问题之中, 同时关于 T2 FS 的词计算方法也广泛应用在语言动力学轨迹分析<sup>[22–23]</sup>、聚类<sup>[24]</sup>、决策<sup>[25]</sup> 等方面. 但是, 目前这些工作主要是基于区间型 T2 FS, 并且对区间型 T2 FS 研究可以转化为与其对应的不确定覆盖域 (Footprint of uncertainty, FOU) 的分析<sup>[26]</sup>, 并最终转化为对其 FOU 的上、下边界 (两个一型模糊集合) 的讨论, 这是因为 FOU 为一个平面图形, 非常直观, 易于被人

收稿日期 2011-08-22 录用日期 2012-02-23  
Manuscript received August 22, 2011; accepted February 23, 2012

国家自然科学基金 (61074903, 61074018), 中国科学院自动化研究所复杂系统管理与控制国家重点实验室开放课题, 长沙理工大学青年英才计划资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61074903, 61074018), Open Project of State Key Laboratory of Management and Control for Complex Systems, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, and Youth Talent Support Plan of Changsha University of Science and Technology  
本文责任编辑 刘德荣

Recommended by Associate Editor LIU De-Rong

1. 长沙理工大学电气与信息工程学院 长沙 410114 2. 国防科学技术大学信息系统与管理学院 长沙 410073

1. School of Electric and Information Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114  
2. College of Information System and Management, National University of Defense and Technology, Changsha 410073

们接受. 然而, 一个非区间型的 T2 FS 不能采用这种方法, 因为同一 FOU 可以对应多个 T2 FS, 更重要的是, T2 FS 对应一个三维图形, 没有平面图形的直观性, 难以写出其代数表述式, 从而不易直接进行计算与推理, 因此目前关于一般 T2 FS 的相关工作相对来说极少.

为了更好地理解一般的 T2 FS, 得到类似于一般模糊集合的分解定理来进行 T2 FS 的词计算, 建立由区间型 T2 FS 通向一般 T2 FS 的桥梁和纽带, 本文首先修正了关于二型模糊集合 FOU 的定义及其表达式, 提出了广义区间二型模糊集合 (Generalized interval type-2 fuzzy sets, GIT2 FS), 并将其分成三类: 离散型、半离散型、连续型. 对于这三类二型模糊集合, 分别给出其易于计算与推理的表述式及二型模糊集合的图形, 并将对应的 FOU 的图形置于同一图中, 最后讨论了 GIT2 FS 的扩展原理并给出相应的词计算方法. 本文中涉及的关于词计算的概念与文献 [22–23] 完全相同.

全文安排如下: 第 1 节介绍本文所涉及的相关术语和概念; 第 2 节给出了 GIT2 FS 的表述及分类; 第 3 节提出了 GIT2 FS 的扩展原理; 第 4 节分别讨论了离散、半离散、连续 GIT2 FS 的词计算; 第 5 节总结全文.

## 1 相关定义与术语

设  $U$  为论域,  $I = [0, 1]$ , 一个一型模糊集合定义为

$$A: U \rightarrow I$$

即对  $\forall u \in U$ , 存在  $a \in I$  与之对应, 称  $A$  为论域  $U$  上的模糊集合,  $A(u)$  称为  $u$  对  $A$  的隶属度<sup>[1]</sup>.

由 Zadeh 的  $n$  型模糊集合的定义<sup>[27]</sup>, Mendel 等和王晓波等将论域  $U$  上的一个 T2 FS  $\omega$  定义为<sup>[15, 28]</sup>

$$\omega: U \rightarrow [0, 1]^{[0,1]}$$

这里,  $[0, 1]^{[0,1]}$  表示定义在论域  $[0, 1]$  上全体映射组成的集合, 即

$$[0, 1]^{[0,1]} = \{f|f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]\}$$

同时,  $\omega$  也可以定义为三维空间中点  $(u, x, \mu_\omega(u, x))$  组成的集合<sup>[15]</sup>, 这里  $u \in U$  称为主变量, 主变量的隶属函数  $\mu_\omega(u)$  是区间  $[0, 1]$  的子集, 称为主隶属度值, 记为  $J_u \subseteq [0, 1]$ , 主隶属度值  $J_u$  中的每一个元素  $x$  为次变量, 其隶属度值为次隶属度值  $J_u(x)$ , 这里  $J_u(x) = \mu_\omega(u, x)$ .

二型模糊集合  $\omega$  在论域上任意点与在该点的主隶属度值的笛卡尔积之并组成 2-D 区域, 称为  $\omega$  的

FOU, 简记为  $FOU(\omega)$ . 即

$$FOU(\omega) = \bigcup_{u \in U} u \times J_u$$

$FOU(\omega)$  的上边界 (Upper membership function, UMF)、下边界 (Lower membership function, LMF) 分别记为  $UMF(\omega)$ ,  $LMF(\omega)$ <sup>[15]</sup>, 如图 1 所示.

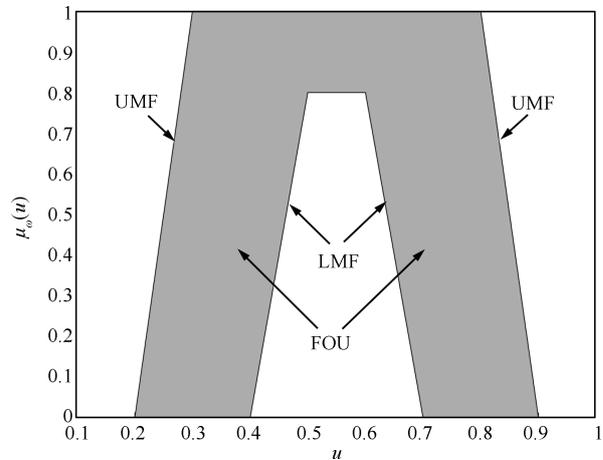


图 1 T2 FS 的 FOU, LMF 及 UMF

Fig. 1 FOU, LMF and UMF of T2 FS

次隶属度值均相等的 T2 FS 称为 GIT2 FS, 即对任意的  $u \in U$  及  $x \in J_u$ , 存在  $a \in [0, 1]$ , 使得  $\mu_\omega(u, x) = a$ .

一个 GIT2 FS  $\omega$  由其  $FOU(\omega)$  及次隶属度确定, 且其次隶属度值均为常数  $a$ ,  $a \in [0, 1]$ , 表示为  $\omega = a/FOU(\omega)$ . 次隶属度值均为 1 (即对  $\forall u \in U$ ,  $\forall x \in J_u$ ,  $\mu_\omega(u, x) = 1$ , 或  $a = 1$ ) 的 T2 FS 称为区间二型模糊集合 (Interval type-2 fuzzy sets, IT2 FS).

## 2 GIT2 FS 的分类

设  $\Gamma(U)$ ,  $\Gamma_1(U)$  分别为由定义在论域  $U$  上的 T2 FS 及 GIT2 FS 全体组成的集合, 本节将 T2 FS 及 GIT2 FS 分成离散型、半离散型、连续型三类, 并将对应类型的 T2 FS 及 GIT2 FS 进行比较.

### 2.1 离散的 GIT2 FS

论域  $U$  及主隶属度值  $J_u$  均离散的 T2 FS 称为离散 T2 FS<sup>[15]</sup>, 表示为

$$\omega = \sum_{u \in U} \sum_{x \in J_u} \frac{\mu(u, x)}{(u, x)}$$

易见, 离散 T2 FS 是由三维空间中离散的点列组成的集合, 即

$$\omega = \{(u, x, \mu_\omega(u, x)) | u \in U, x \in J_u\}$$

如论域  $U = \{1, 2, 4\}$  上的 T2 FS

$$\omega = \frac{0.7}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.6}{4}$$

是离散的, 由三个点构成的集合, 即

$$\omega = \{(1, 0.4, 0.7), (2, 0.8, 0.5), (4, 0.5, 0.6)\}$$

且

$$FOU(\omega) = \{(1, 0.4, 0), (2, 0.8, 0), (4, 0.5, 0)\}$$

如图 2 所示.

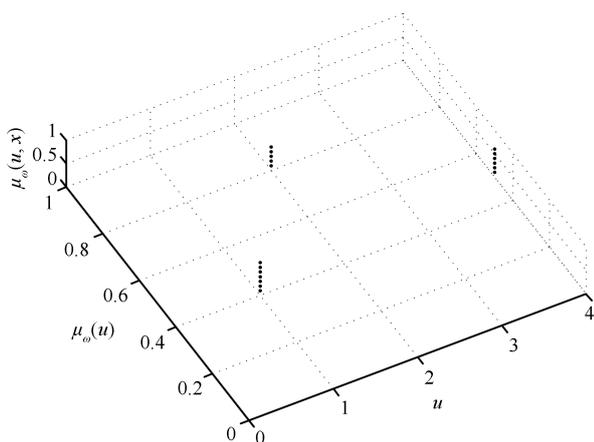


图 2 离散的 T2 FS  
Fig. 2 Discrete T2 FS

离散 T2 FS  $\omega$  的图形是一个分布在三维空间中的点列, 即图 2 中钉状体的上端点组成的集合. 其下端点的集合为  $FOU(\omega)$ .

当  $\mu_\omega(u, x) = a$  时, 称  $\omega$  为离散的 GIT2 FS, 这里  $a$  为任意常数.

论域  $U = \{1, 2, 3\}$  上的一个 GIT2 FS  $\tilde{3}$  定义为

$$\tilde{3} = \frac{0.5}{1} + \frac{0.5}{1} + \frac{0.3}{2} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.5}{3}$$

如图 3 所示.

由图 2 和图 3 可知, 离散 T2 FS 与离散 GIT2 FS 均为三维空间中离散点列. 但离散 T2 FS 的钉状体的高度不一致, 而离散 GIT2 FS 的是一致.

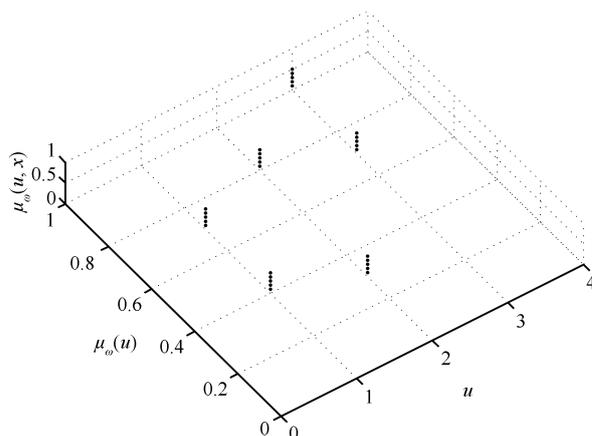


图 3 离散的 GIT2 FS  
Fig. 3 Discrete generalized GIT2 FS

### 2.2 半离散的 GIT2 FS

论域  $U$  离散, 主隶属度值  $J_u$  连续的 T2 FS 称为半离散 T2 FS<sup>[15]</sup>, 表示为

$$\omega = \sum_{u \in U} \int_{x \in J_u} \frac{\mu_\omega(u, x)}{(u, x)}$$

其中,  $\int$  表示连续二型模糊集合. 论域  $U = \{1, 2\}$  上的 T2 FS

$$\omega = \int_{x \in [0.3, 0.5]} \frac{5x - 1.5}{(1, x)} + \int_{x \in [0.5, 0.7]} \frac{-5x + 3.5}{(1, x)} + \int_{x \in [0.4, 0.6]} \frac{5x - 2}{(2, x)} + \int_{x \in [0.6, 0.8]} \frac{-5x + 4}{(2, x)} \quad (1)$$

就为一个半离散 T2 FS, 如图 4 所示.

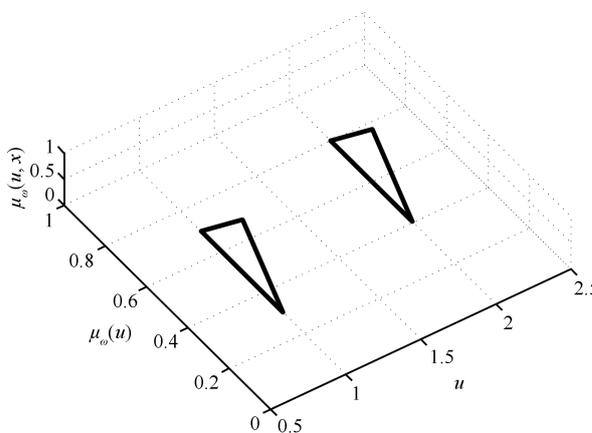


图 4 半离散 T2 FS 及其 FOU  
Fig. 4 Half discrete T2 FS and its FOU

由图 4 可知, 半离散的 T2 FS 为三维空间中的曲线,  $FOU(\omega)$  为其在底面的投影.

当  $\mu_\omega(u, x) = a$ , 称  $\omega$  为半离散 GIT2 FS.

设论域  $U = \{0, 1, 2, 3\}$  上的一个半离散的 GIT2 FS  $\tilde{1}$  定义为

$$\tilde{1} = \frac{0.6}{[0.3, 0.7]} + \frac{0.6}{[0.6, 0.9]} + \frac{0.6}{[0.4, 0.8]} + \frac{0.6}{[0.2, 0.5]}$$

如图 5 所示.

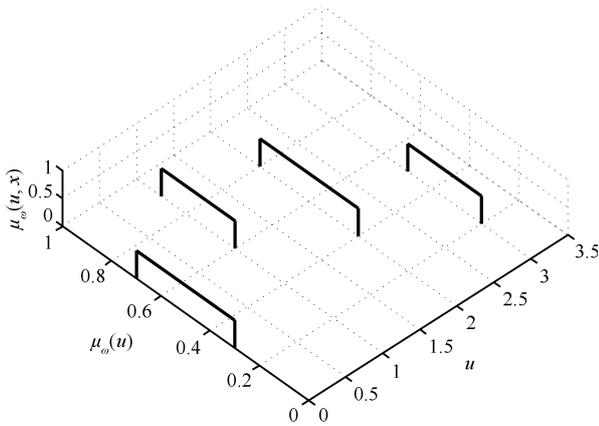


图 5 半离散 GIT2 FS

Fig. 5 Half discrete GIT2 FS

由图 4 和图 5 可知, 半离散 T2 FS 及半离散 GIT2 FS 对应的图形均为三维空间中的曲线, 但 GIT2 FS 对应的曲线平行于底面.

### 2.3 连续的 GIT2 FS

论域  $U$  及主隶属度值  $J_u$  均连续的 T2 FS 称为连续 T2 FS<sup>[15]</sup>, 表示为

$$\omega = \int_{u \in U} \int_{x \in J_u} \frac{\mu_\omega(u, x)}{(u, x)}$$

当  $\mu_\omega(u, x) = a$ , 称  $\omega$  为连续 GIT2 FS, 这里  $a \in [0, 1]$ , 且  $a \neq 0$ .

如论域  $U = [2, 4]$  上的 T2 FS

$$\omega = \int_{u \in [2, 3]} \int_{x \in [u-2, \sqrt{u-2}]} \frac{0.5(u-2)^2 + 0.4x^2}{(u, x)} + \int_{u \in [3, 4]} \int_{x \in [4-u, \sqrt{4-u}]} \frac{0.3(u-3)^2 + 0.9x^2}{(u, x)} \quad (2)$$

为一个连续 T2 FS, 如图 6 所示.

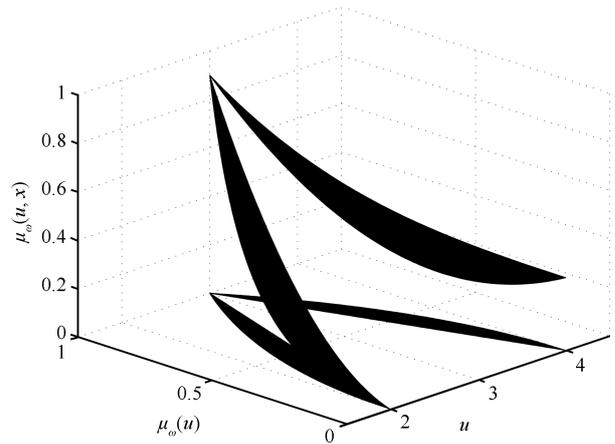


图 6 连续 T2 FS 及其 FOU

Fig. 6 Continuous T2 FS and its FOU

由图 6 可见, 连续的 T2 FS 为三维空间中的曲面,  $FOU(\omega)$  即为其在底面的投影.

当  $\mu(u, x) = a$ , 称  $\omega$  为连续 GIT2 FS. 如定义在论域  $U = [2, 4]$  上的 GIT2 FS 表示为

$$\omega = \int_{u \in [2, 3]} \int_{x \in [u-2, \sqrt{u-2}]} \frac{0.65}{(u, x)} + \int_{u \in [3, 4]} \int_{x \in [4-u, \sqrt{4-u}]} \frac{0.65}{(u, x)} \quad (3)$$

如图 7 所示.

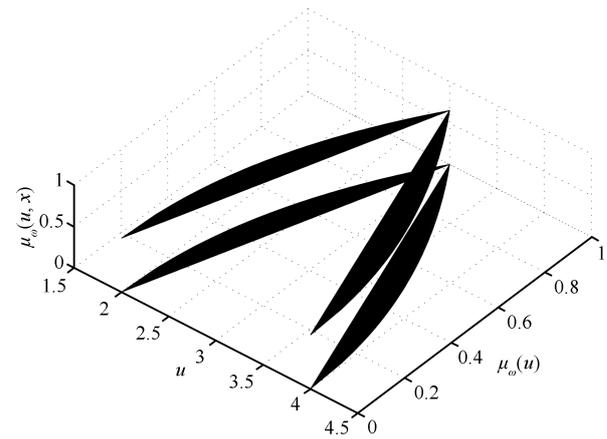


图 7 连续 GIT2 FS

Fig. 7 Continuous GIT2 FS

由图 6 和图 7 可知, 连续 T2 FS 与连续 GIT2 FS 均对应为三维空间中的图形, 但连续 T2 FS 一般对应一个曲面, 而连续 GIT2 FS 对应的是一个平面, 且该平面平行于底面.

### 3 GIT2 FS 的扩展原理

设  $\Gamma_1(U), \Gamma_1(V)$  分别表示论域  $U, V$  上的全体

T2 FS, 由映射

$$f : U \rightarrow V$$

可以诱导一个新映射

$$F : \Gamma_1(U) \rightarrow \Gamma_1(V)$$

对  $\forall \omega \in \Gamma_1(U)$ , 如何计算  $F(\omega)$ ?

由于一般的 T2 FS 的计算极其复杂, 人们往往只讨论区间型<sup>[15-16]</sup>, 本节给出 GIT2 FS 在模糊算子下的扩展原理. 令  $\Gamma_1(U)$ ,  $\Gamma_1(V)$  分别表示定义在  $U, V$  上的 GIT2 FS 全体.

对  $\forall \omega \in \Gamma_1(U)$ ,

$$\omega = \int_{u \in U} \int_{x \in J_u} \frac{a}{(u, x)}$$

这里,  $a \in [0, 1]$  为任意常数. 并且对于  $\forall u \in U$ , 记

$$\underline{\mu}_\omega^u = \inf J_u, \bar{\mu}_\omega^u = \sup J_u$$

有

$$F(\omega) = \int_{f(u) \in f(U)} \int_{y \in J_{f(u)}} \frac{a}{(f(u), y)}$$

或

$$F(\omega) = \int_{v \in V} \int_{y \in J_v} \frac{a}{(v, y)}$$

这里,  $J_v, \underline{\mu}_{F(\omega)}^v, \bar{\mu}_{F(\omega)}^v$  分别定义如下:

$$J_v = \{y | y \in \bigcup_{f(u)=v} J_u, \underline{\mu}_{F(\omega)}^v \leq y \leq \bar{\mu}_{F(\omega)}^v\} \quad (4)$$

$$\underline{\mu}_{F(\omega)}^v = \max\{\underline{\mu}_\omega^u | f(u) = v\} \quad (5)$$

$$\bar{\mu}_{F(\omega)}^v = \max\{\bar{\mu}_\omega^u | f(u) = v\} \quad (6)$$

其中,  $a \in [0, 1]$  为常数.

若  $\omega$  为一个 IT2 FS, 对应地,  $a = 1$ .

若  $\omega$  为一型模糊集合, 则  $\underline{\mu}_{F(\omega)}^v = \bar{\mu}_{F(\omega)}^v = \mu_\omega(u)$ , 该公式即为一型模糊集合的扩展原理.

#### 4 GIT2 FS 的词计算

下面分别讨论在以下两种模糊逻辑算子下的词计算: 基于模糊映射的词计算与基于模糊规则下的词计算.

设  $\Gamma_1(U), \Gamma_1(V)$  分别表示论域  $U, V$  上的 GIT2 FS 全体,  $F$  称为模糊逻辑算子, 即

$$F : \Gamma_1(U) \rightarrow \Gamma_1(V)$$

对于任意给定的初始词  $\omega \in \Gamma_1(U)$ , 如何计算其像词  $F(\omega)$  呢?

本节将  $F$  分为论域  $U$  上的模糊映射或者模糊推理规则两种情形分别讨论  $F(\omega)$  的值.

#### 4.1 模糊映射下 GIT2 FS 的词计算

下面分别对离散、半离散、连续 GIT2 FS 在模糊映射下的词计算进行讨论.

##### 4.1.1 离散 GIT2 FS 的词计算

设  $\omega$  为一个离散 GIT2 FS,  $\omega$  可以表示为

$$\omega = \sum_{u \in U} \frac{\sum_{x \in J_u} \frac{a}{x}}{u}$$

因而

$$F(\omega) = \sum_{v \in V} \frac{\sum_{y \in J_v} \frac{a}{y}}{v}$$

这里,  $J_v = \{y | y \in \bigcup_{f(u)=v} J_u, \underline{\mu}_\omega^v \leq y \leq \bar{\mu}_\omega^v\}$ , 并且

$$\underline{\mu}_\omega^v = \max\{\underline{\mu}_\omega^u | f(u) = v\}$$

$$\bar{\mu}_\omega^v = \max\{\bar{\mu}_\omega^u | f(u) = v\}$$

**例 1.** 设论域  $U = \{1, 2, 3\}, V = \{7, 9, 11\}$  上的函数

$$f : U \rightarrow V$$

定义为

$$f(2) = f(1) = 7, \quad f(3) = 9$$

对应的模糊函数为

$$F : \Gamma_1(U) \rightarrow \Gamma_1(V)$$

设  $\tilde{3}$  是论域  $U$  上的一个半离散的 GIT2 FS, 表示如下:

$$\tilde{3} = \frac{0.5}{\frac{0.4}{1}} + \frac{0.5}{\frac{0.7}{1}} + \frac{0.5}{\frac{0.3}{2}} + \frac{0.5}{\frac{0.8}{2}} + \frac{0.5}{\frac{0.7}{3}} + \frac{0.5}{\frac{1}{3}}$$

则

$$F(\tilde{3}) = \frac{0.5}{\frac{0.4}{9}} + \frac{0.5}{\frac{0.8}{9}} + \frac{0.5}{\frac{0.7}{7}} + \frac{0.5}{\frac{1}{7}}$$

T2 FS  $\tilde{3}$  及其像词  $F(\tilde{3})$  分别如图 3 和图 8 所示.

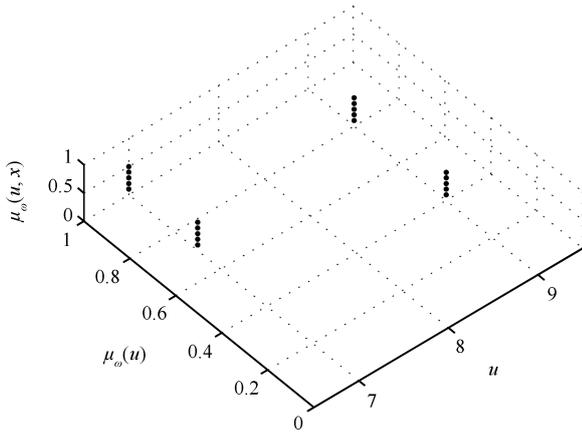


图 8 离散 GIT2 FS 的像词

Fig. 8 Image word of discrete generalized IT2 FS

由图 8 知, 离散 GIT2 FS 的像词仍为离散广义型, 且其次隶属度保持不变.

#### 4.1.2 半离散 GIT2 FS 的词计算

设  $\omega$  为一个半离散的 GIT2 FS, 论域  $U_1, V_1$  为均离散, 且对于  $\forall u \in U_1, J_u \subseteq [0, 1]$  是一个连通区间, 从而  $\omega, F(\omega)$  可以分别表示为

$$\omega = \sum_{u \in U_1} \frac{\int_{x \in J_u} \frac{a}{x}}{u}$$

$$F(\omega) = \sum_{v \in V_1} \frac{\int_{y \in J_v} \frac{a}{y}}{v}$$

这里,  $v = f(u), J_v = [\underline{\mu}_\omega^v, \bar{\mu}_\omega^v], \underline{\mu}_\omega^v, \bar{\mu}_\omega^v$  分别定义如下:

$$\underline{\mu}_\omega^v = \max\{\underline{\mu}_\omega^u | f(u) = v\}$$

$$\bar{\mu}_\omega^v = \max\{\bar{\mu}_\omega^u | f(u) = v\}$$

**例 2.** 设论域  $U_1 = \{0, 1, 2, 3\}, V_1 = \{0, 3, 4\}$  上的一个函数

$$g : U_1 \rightarrow V_1$$

定义为  $g(0) = g(2) = 3, g(1) = 4, g(3) = 0$ .

其对应的模糊函数为

$$G : \Gamma_1(U_1) \rightarrow \Gamma_1(V_1)$$

则 GIT2 FS  $\tilde{\omega}$  及其像词  $G(\tilde{\omega})$  为

$$\tilde{\omega} = \frac{0.6}{[0.3, 0.7]}_0 + \frac{0.6}{[0.6, 0.9]}_1 + \frac{0.6}{[0.4, 0.8]}_2 + \frac{0.6}{[0.2, 0.5]}_3$$

$$G(\tilde{\omega}) = \frac{0.6}{[0.4, 0.8]}_3 + \frac{0.6}{[0.6, 0.9]}_4 + \frac{0.6}{[0.2, 0.5]}_0$$

T2 FS  $\tilde{\omega}$  及其像词  $G(\tilde{\omega})$  分别如图 5 和图 9 所示.

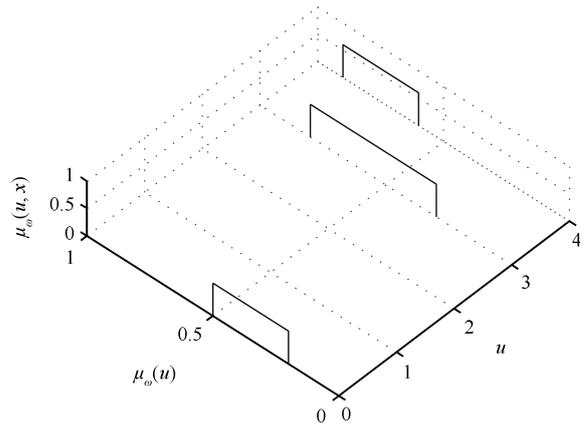


图 9 半离散 T2 FS 的像词

Fig. 9 Image word of half discrete T2 FS

由图 5 和图 9 可见, 半离散 GIT2 FS 的像词仍为一个半离散的 GIT2 FS, 但是与初始词相比, 像词中平行于底面的线段的长度与条数都发生了变化.

#### 4.1.3 连续 GIT2 FS 的词计算

设  $\omega$  为定义在论域  $U_2$  上的一个连续的 GIT2 FS, 这里  $U_2$  为连通论域,  $\forall u \in U_2, J_u$  是一个连通区间, 则  $\omega, F(\omega)$  可以表示为

$$\omega = \int_{u \in U_2} \int_{x \in J_u} \frac{a}{(u, x)} J_u \subseteq [0, 1]$$

$$F(\omega) = \int_{v \in V_2} \int_{y \in J_v} \frac{a}{(v, y)}$$

这里,  $v = f(u), J_v$  的定义如式 (4).

例 3 给出了 GIT2 FS 在一个二次模糊函数的像词.

**例 3.** 论域  $U_2 = [0, 1]$  上的函数  $h : U_2 \rightarrow U_2$  定义如下:

$$h(u) = u^2$$

将其转化为对应的模糊函数为

$$H : \Gamma_1(U_2) \rightarrow \Gamma_1(U_2)$$

论域  $U_2$  上的一个 GIT2 FS  $\omega$  表示为

$$\omega = \int_{u \in [0.4, 0.5]} \int_{x \in [0.5u-2]} \frac{0.8}{(u, x)} +$$

$$\int_{u \in [0.5, 0.6]} \int_{x \in [10u-5, 5u-2]} \frac{0.8}{(u, x)} +$$

$$\int_{u \in [0.6, 0.7]} \int_{x \in [-10u+7, -5u+4]} \frac{0.8}{(u, x)} +$$

$$\int_{u \in [0.7, 0.8]} \int_{x \in [0, -5u+4]} \frac{0.8}{(u, x)} \quad (7)$$

$\omega$  对应的图形如图 10 所示.

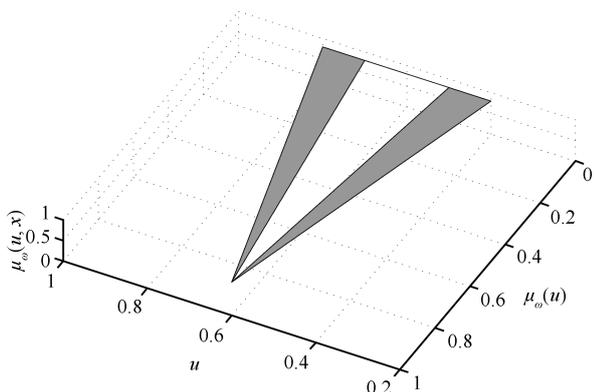


图 10 连续 T2 FS 的初始词

Fig. 10 Initial word of continuous Type-2 FS

则

$$\begin{aligned} H(\omega) = & \int_{v \in [0.16, 0.25]} \int_{x \in [0, 5\sqrt{v}-2]} \frac{0.8}{(v, x)} + \\ & \int_{v \in [0.25, 0.36]} \int_{x \in [10\sqrt{v}, 5\sqrt{v}-2]} \frac{0.8}{(v, x)} + \\ & \int_{v \in [0.36, 0.49]} \int_{x \in [-10\sqrt{v}+7, -5\sqrt{v}+4]} \frac{0.8}{(v, x)} + \\ & \int_{v \in [0.49, 0.64]} \int_{x \in [0, -5\sqrt{v}+4]} \frac{0.8}{(v, x)} \quad (8) \end{aligned}$$

像词  $H(\omega)$  对应的图形如图 11 所示.

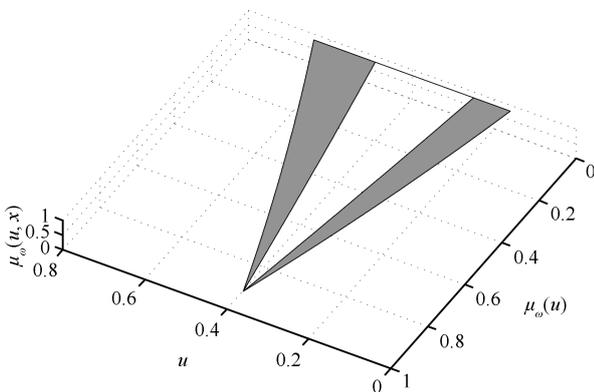


图 11 连续 T2 FS 的像词

Fig. 11 Image word of continuous T2 FS

由图 11 知, 在模糊映射的作用下, GIT2 FS  $\omega$  (图 10) 的像词  $H(\omega)$  (图 11) 的形状发生变化, 与初始词进行比较可以发现:  $\omega$  的图形具有对称性, 且边界均为三角函数, 但在模糊映射的作用下, 其像

词  $F(\omega)$  不再具有对称性, 其边界也不再是三角函数.

由上述系列图可知, GIT2 FS 的像仍为一个 GIT2 FS, 即一个三维的空间图形, 其第二个隶属度为常值, 且在模糊映射的作用下保持不变.

同时还可以看出, 一个连续的 GIT2 FS 在模糊映射下的像仍然是连续的, 因此, 对于这类模糊集合在连续映射下的计算, 实际上是对其对应的不确定覆盖域的计算.

#### 4.2 基于模糊规则的 GIT2 FS 的计算

假设一个二型模糊规则基  $R : \Gamma(U_3) \rightarrow \Gamma(V_3)$  由  $n$  条单输入单输出模糊规则组成:

- $r_1$ : 若  $u$  为  $\omega_1$ , 则  $v$  为  $\nu_1$ ;
- $r_2$ : 若  $u$  为  $\omega_2$ , 则  $v$  为  $\nu_2$ ;
- ⋮
- $r_n$ : 若  $u$  为  $\omega_n$ , 则  $v$  为  $\nu_n$ ;

$$\omega_i = \int_{u \in U} \int_{x \in [m_i(u), n_i(u)]} \frac{a_i}{(u, x)}$$

$$\nu_i = \int_{v \in V} \int_{y \in [f_i(u), g_i(u)]} \frac{b_i}{(v, y)}$$

其中,  $m_i(u)$ ,  $n_i(u)$ ,  $f_i(u)$ ,  $g_i(u)$  分别表示  $FOU(\omega_i)$ ,  $FOU(\nu_i)$  的上、下边界的隶属函数,  $a_i, b_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$ .

设初始词  $\omega$  表示如下:

$$\omega = \int_{u \in U} \int_{x \in [r(u), s(u)]} \frac{c}{(u, x)}$$

上述 T2 FS 的计算可转化为其对应的不确定覆盖域 FOU 的计算<sup>[15]</sup>. 假设上述  $n$  条规则中只有第  $r_i$  条规则被初始词  $\omega$  激活 (即  $\omega$  仅与  $\omega_i$  的上、下边界的匹配度不为 0), 分别计算  $\omega$  与第  $r_i$  条规则的初始词  $\omega_i$  的上、下边界的匹配度<sup>[29]</sup>, 记为

$$\lambda_i = \max\{n_i(u) | n_i(u) = s(u)\}$$

$$\mu_i = \max\{m_i(u) | m_i(u) = r(u)\}$$

匹配度  $\lambda_i, \mu_i$  如图 12.

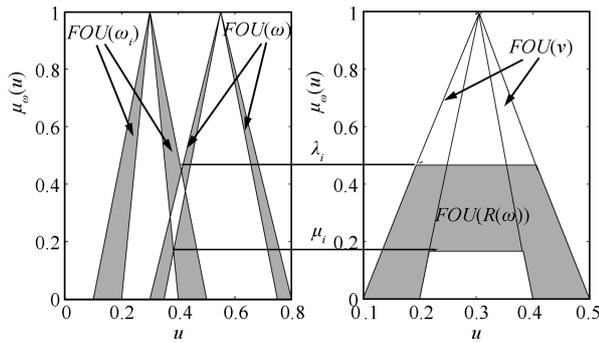


图 12 GIT2 FS 在模糊规则下的像词

Fig. 12 Image word of GIT2 FS under fuzzy rule

图 12 的左图中白色菱形部分为  $FOU(\omega)$ ,  $FOU(\omega_i)$  的交集. 由图 12 可知, 在模糊规则基的作用下,  $\omega$  的像词  $R(\omega)$  的不确定覆盖域  $FOU(R(\omega))$  为图 12 中右图阴影部分区域, 其上、下边界  $s^*(u)$ ,  $r^*(u)$  分别为

$$s^*(u) = \begin{cases} f_i(u), & f_i(u) < \lambda_i \\ \lambda_i, & f_i(u) \geq \lambda_i \end{cases}$$

$$r^*(u) = \begin{cases} g_i(u), & g_i(u) < \mu_i \\ \mu_i, & g_i(u) \geq \mu_i \end{cases}$$

从而, 词  $\omega$  的像词表示为

$$R(\omega) = \int_{v \in V} \int_{y \in [r^*(u), s^*(u)]} \frac{k}{(v, y)}$$

其中,  $k = \min\{a_i, b_i, c\}$ .

若有两条或者两条以上的规则同时被激活, 则按照上述方法分别计算出在每条被激活规则下的像词, 再按照文献 [8] 的方法对所有的像词进行转化就可以得到最终的像词.

## 5 结论

本文提出了 GIT2 FS 的概念以解决关于一般 T2 FS 的计算与推理问题, 讨论了基于模糊映射和基于模糊规则两种情形下的 GIT2 FS 的词计算, 前者主要运用二型模糊集合的扩展原理, 通过将 GIT2 FS 分成离散、半离散及连续三类, 结合扩展原理进行推理与计算, 后者采用匹配度法进行计算.

由于二型模糊集合难以理解, 因此本文提供的例子中相关的映射并不复杂, 从而其计算相对来说比较容易. 在映射比较复杂的情况下, 定义在离散论域上的二型模糊集合, 其计算难易程度变化不大, 但对于连续论域上的二型模糊集合, 其计算复杂度增大, 需要运用类似一型模糊集合的分解定理与合

成原理, 同时还将复杂映射分解为一系列分段单调映射来进行计算和推理以利于得到像词的清晰表达式.

本文的工作为后续研究奠定了理论基础. 我们即将开展的研究主要是将本文的工作应用于管理系统的建模与分析 (如员工行为、管理制度的评价及二者之间的交互的动力学研究), 其中还需要我们提出的新理论与方法 (如时变论域、动态模糊规则等).

## 致谢

二型模糊集合相关研究是在王飞跃教授的引入与指导下进行的, 感谢王飞跃教授的支持与帮助.

## References

- Zadeh L A. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, 4(2): 103–111
- Adolfo R de Soto. A hierarchical model of a linguistic variable. *Information Sciences*, 2011, 181(20): 4394–4408
- Cao Y Z, Chen G Q. A fuzzy petri-nets model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(3): 486–499
- Aisbett J, Rickard J T, Morgenthaler D. Multivariate modeling and type-2 fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 2011, 163(1): 78–95
- Wu D R, Mendel J M. Computing with words for hierarchical decision making applied to evaluating a weapon system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(3): 441–460
- Herrera F, Alonso S, Chiclana F, Herrera-Viedma E. Computing with words in decision making: foundations, trends and prospects. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2009, 8(4): 337–364
- Mo H, Wang F Y. Linguistic dynamic systems based on computing with words and their stabilities. *Science in China Series F - Information Sciences*, 2009, 52(5): 780–796
- Wang F Y. Outline of a computational theory for linguistic dynamic systems: toward computing with words. *International Journal of Intelligent Control and Systems*, 1998, 2(2): 211–224
- Wang Fei-Yue. Fundamental issues in research of computing with words and linguistic dynamic systems. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(6): 844–852  
(王飞跃. 词计算和语言动力学系统的基本问题和研究. *自动化学报*, 2005, 31(6): 844–852)
- Rubin S H. Computing with words. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics — Part B: Cybernetics*, 1999, 29(4): 518–524
- Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1973, SCM-3(1): 28–44
- Li Jia-Ning, Yi Jian-Qiang, Zhao Dong-Bin, Xi Guang-Cheng. A new fuzzy identification approach for complex systems based on neural-fuzzy inference network. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(5): 695–703

- 13 Mendel J M. *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*. Upper-Saddle River, NJ: Prentice-Hall PTR, 2001
- 14 Wang F Y. Modeling, analysis and synthesis of linguistic dynamic systems: a computational theory. In: *Proceedings of IEEE International Workshop on Architecture for Semiotic Modeling and Situation Control in Large Complex Systems*. Monterey, CA: IEEE, 1995. 173–178
- 15 Mendel J M, John R I B. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, **10**(2): 117–127
- 16 Uncu O, Turksen I B. Discrete interval type 2 fuzzy system models using uncertainty in learning parameters. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, **15**(1): 90–106
- 17 Pan Yong-Ping, Huang Dao-Ping, Sun Zong-Hai. Overview of type-2 fuzzy logic control. *Control Theory and Application*, 2011, **28**(1): 13–23  
(潘永平, 黄道平, 孙宗海. II型模糊控制综述. 控制理论与应用, 2011, **28**(1): 13–23)
- 18 Zhang Wei-Bin, Hu Huai-Zhong, Liu Wen-Jiang. Traffic flow forecast based on type-2 fuzzy logic approach. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2007, **41**(10): 1160–1164  
(张伟斌, 胡怀中, 刘文江. 基于二型模糊逻辑的交通流量预测. 西安交通大学学报, 2007, **41**(10): 1160–1164)
- 19 Li Cheng-Dong, Yi Jian-Qiang, Yu Yi, Zhao Dong-Bin. Inverse control of cable-driven parallel mechanism using type-2 fuzzy neural network. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 459–464  
(李成栋, 易建强, 余意, 赵冬斌. 柔索驱动并联机构的二型模糊神经网络控制. 自动化学报, 2010, **36**(3): 459–464)
- 20 Hagrass H. Type-2 FLCs: a new generation of fuzzy controllers. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, **2**(1): 30–43
- 21 Lin P Z, Lin C M, Hsu C F, Lee T T. Type-2 fuzzy controller design using a sliding-mode approach for application to DC-DC converters. *IEEE Proceedings: Electric Power Applications*, 2005, **152**(6): 1482–1488
- 22 Mo Hong, Wang Fei-Yue, Zhao Liang. LDS trajectories under one-to-one mapping in interval type-2 fuzzy sets. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2010, **23**(2): 144–147  
(莫红, 王飞跃, 赵亮. 一一映射下区间二型模糊集合的语言动力学轨迹. 模式识别与人工智能, 2010, **23**(2): 144–147)
- 23 Mo Hong, Wang Fei-Yue, Xiao Zhi-Quan, Chen Qian. Stabilities of linguistic dynamic systems based on interval type-2 fuzzy sets. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(8): 1018–1024  
(莫红, 王飞跃, 肖志权, 陈茜. 基于区间二型模糊集合的语言动力系统稳定性. 自动化学报, 2011, **37**(8): 1018–1024)
- 24 Wu D R, Mendel J M. Aggregation using the linguistic weighted average and interval type-2 fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, **15**(6): 1145–1161
- 25 Mendel J M. An architecture for making judgments using computing with words. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*, 2002, **12**(3): 325–335
- 26 Wu Q H, Yu D, Xie Z X, Liu J F. Fuzzy probabilistic approximation spaces and their information measures. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, **14**(2): 191–201
- 27 Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information Sciences*, 1975, **8**(3): 199–249
- 28 Wang Xiao-Bo. Decomposition theorem of type-2 fuzzy sets. *Fuzzy Mathematics*, 1983, (1): 9–13  
(王晓波. 2型 Fuzzy 集的分解定理. 模糊数学, 1983, (1): 9–13)
- 29 Zadeh L A. Soft computing and fuzzy logic. *IEEE Software*, 1994, **11**(6): 48–56



**莫红** 长沙理工大学电气与信息工程学院副教授. 2004 年获得中国科学院研究生院工学博士学位. 主要研究方向为语言动力系统, 智能计算. 本文通信作者. E-mail: mohong72@gmail.com

(**MO Hong** Associate professor at the School of Electric and Information Engineering, Changsha University of Science and Technology. She received her Ph.D. degree from Graduate University of Chinese Academy of Sciences in 2004. Her research interest covers linguistic dynamic systems and intelligent computing. Corresponding author of this paper.)



**王涛** 国防科学技术大学信息系统与管理学院博士生. 主要研究方向为社会计算.

E-mail: peterkingbeyond@gmail.com  
(**WANG Tao** Ph.D. candidate at the College of Information System and Management, National University of Defense and Technology. His main re-

search interest is social computing.)