

一类不确定热方程自适应边界控制

李健¹ 刘允刚¹

摘要 研究了一类含有不确定控制系数和边界扰动的热方程自适应状态反馈边界控制设计问题. 通过 Lyapunov 方法, 显式地得到了仅需系统边界状态信息的自适应控制器. 证明了闭环系统状态是 $L_2[0, 1]$ 稳定的, 特别是当边界扰动消逝时, 该状态收敛到 0. 此外, 通过灵活选取参数调节律的初始条件, 适当放宽了相关文献中相容性条件对系统初始条件的限制. 仿真算例验证了本文方法的有效性.

关键词 自适应镇定, 不确定控制系数, 边界扰动, 边界控制

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00469

Adaptive Boundary Control for a Class of Uncertain Heat Equations

LI Jian¹ LIU Yun-Gang¹

Abstract This paper investigates the adaptive state-feedback boundary control design for a class of heat equations with uncertain control coefficient and boundary disturbance. By Lyapunov method, the desirable controller is explicitly constructed, which only needs the boundary state of the system. It is shown that the closed-loop system state is $L_2[0, 1]$ stable, and particularly, the state converges to zero when the boundary disturbance vanishes. Moreover, by skillfully choosing the initial condition of parameter updating law, the restriction on the initial condition of the system is moderately relaxed, which is usually described by the so-called compatible condition in the related literature. A simulation example is presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words Adaptive stabilization, uncertain control coefficient, boundary disturbance, boundary control

偏微分方程的边界控制在过去 30 年间得到了广泛研究, 发展了许多控制分析与设计方法^[1-13]. 具体地, 利用半群理论, 文献 [1] 和 [2] 分别研究了抛物型偏微分方程和梁方程的镇定问题, 文献 [3] 研究了抛物型偏微分方程的最优控制问题. 无穷维反推方法是最近文献 [4-6] 提出的, 能用于解决热方程的镇定问题. 进一步, 文献 [7-8] 将该方法用于解决不确定抛物型偏微分方程自适应镇定问题. 特别地, 文献 [9-13]

收稿日期 2010-12-14 录用日期 2011-04-19
Manuscript received December 14, 2010; accepted April 19, 2011.
国家自然科学基金 (60974003, 61143011), 教育部新世纪优秀人才支持计划 (NCET-07-0513), 教育部科学技术研究重点项目 (108079), 山东省杰出青年基金 (JQ200919), 山东省科技发展计划 (2004GG4204014), 山东省优秀中青年科学家奖励基金 (2007BS01010), 山东大学自主创新基金 (2009JQ008) 资助

Supported by National Natural Science Foundations of China (60974003, 61143011), the Program for New Century Excellent Talents in University of China (NCET-07-0513), the Key Science and Technical Foundation of Ministry of Education of China (108079), the Natural Science Foundation for Distinguished Young Scholar of Shandong Province of China (JQ200919), the Science and Technical Development Plan of Shandong Province of China (2004GG4204014), the Excellent Young and Middle-Aged Scientist Award Grant of Shandong Province of China (2007BS01010), and the Independent Innovation Foundation of Shandong University (2009JQ008)

本文责任编辑 李少远
Recommended by Associate Editor LI Shao-Yuan

1. 山东大学控制科学与工程学院 济南 250061
1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061

表明经典的 Lyapunov 直接法仍然能有效解决一些类型的偏微分方程的镇定及跟踪问题. 需指出的是, 上面提到的方法各有优劣性, 故对于特定类型的偏微分方程, 其中某个方法对其适用且便捷, 而不是所有都如此.

本文针对如下带有不确定控制系数和边界扰动的热方程, 研究其自适应边界控制设计问题.

$$\begin{cases} \omega_t(x, t) = \omega_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, t > 0 \\ \omega_x(0, t) = 0, & t > 0 \\ \omega_x(1, t) = bu(t) + d(t), & t > 0 \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\omega_t = \frac{\partial \omega}{\partial t}$, $\omega_x = \frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\omega_{xx} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, $\omega(x, t)$ 是系统状态, 初始值为 $\omega(x, 0) = \omega_0(x)$; $u(t)$ 是系统的控制输入; b 是符号已知但数值未知的非零常数, 称之为控制系数; $d(t)$ 是边界扰动(可看作在端点 $x = 1$ 处输出或输入的热流) 满足如下假设:

$$\int_0^{+\infty} d(t)^2 dt < +\infty \quad (2)$$

应指出的是, 系统的初始条件应与其边界条件相容, 即需满足如下条件:

$$\left. \frac{d\omega_0(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d\omega_0(x)}{dx} \right|_{x=1} = bu(0) + d(0) \quad (3)$$

为了更好地理解系统 (1) 的物理含义, 可将方程组 (1) 视为一个热导体棒的动态的数学描述, 其中 $\omega(x, t)$ 表示该棒在空间坐标 x 处、时间 t 的温度. 该描述显示棒的一端是绝缘的, 而另一端的温度可以通过施加适当的控制改变. 现实中, 导体棒被外部热源通过热交换加热时不可避免存在热量损失, 该现象用式 (1) 中的常数 b 来建模. 另一方面, 导体棒和周围介质之间总是存在热量交换, 这种现象称为扰动, 并用式 (1) 中的 $d(t)$ 来建模. 实际中, 一旦控制施加在系统上, 一些物理上的绝缘设备将使得边界扰动 $d(t)$ 在某个时刻之后消逝, 这点可以通过不等式 (2) 来保证.

本文研究系统 (1) 的状态反馈自适应边界控制设计, 以实现系统的期望稳定性和对边界扰动与不确定控制系数中未知性的抑制. 基于适当选取的 Lyapunov 函数, 构建了自适应状态反馈控制器. 当边界扰动有界且满足假设 (2) 时, 该控制器能保证原始系统状态是 $L_2[0, 1]$ 稳定的¹. 另外, 当扰动消逝时, 所设计的控制器还能保证系统状态收敛到 0. 尽管本文研究的系统较为简单, 但其方法和思想将促进带有未知控制系数和边界扰动的更复杂系统 (由偏微分方程描述) 的进一步研究. 详细地, 本文的主要贡献集中在如下三个方面:

1) 系统 (1) 含有不确定控制系数和边界扰动. 实际上, 针对比热方程更一般偏微分方程的镇定问题, 文献 [4-8] 已得到了一些有意义的结果. 然而, 在已有文献中, 系统的控制系数均假定为已知的且不存在边界扰动. 尽管系统 (1) 较文献 [4-8] 研究的系统看似更简单, 但不确定控制系数和边界扰动的存在使前者的镇定问题更加难以解决.

2) 采用 Lyapunov 方法设计了自适应边界控制器. 应指出的是, 本文没有采用文献 [4-8] 中的无穷维反推方法. 这是由于边界扰动的存在使得该方法中的关键“反推变换”难

¹如果一个偏微分方程系统 (其状态记为 $\omega(x, t)$) 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \omega(x, t)^2 dx = 0$, 则称之为 $L_2[0, 1]$ 稳定的.

以构造且利用该方法得到的控制器一般需要沿着棒的所有测量值(实际中这意味着需要很多传感器).应用 Lyapunov 法,可以很容易地解决系统(1)的镇定问题,特别是所设计的控制器仅需要棒在端点处的测量值.

3) 放宽了相容性条件(3)对初始条件 $\omega_0(x)$ 的限制.由于控制器 u 的初始值和系统初始条件 $\omega_0(x)$ 密切相关(可从式(3)的第二个方程看出),控制器仅适用于某些特定的初始条件.不同于现有方法,本文通过选择适当的参数更新律及其初始条件,使反馈控制的初始值变为0(即 $u(0) = 0$).在此情形下,相容性条件(3)独立于控制器 u ,因而放宽了其初始条件 $\omega_0(x)$ 的限制.

本文其余部分组织如下:第1节给出了系统(1)的自适应边界控制器设计过程,第2节通过仿真算例验证了本文所提方法的有效性,第3节是总结性评述.

1 自适应边界控制设计

由于 b 是未知的且不存在已知上界,受现有方法启发,应寻找一个适当的动态更新律来补偿 b 的未知性.如前所述,边界扰动使得无穷维反推方法对系统(1)难以适用,因此,将采用 Lyapunov 方法设计状态反馈自适应边界控制器.

为设计期望的控制器,定义如下候选 Lyapunov 函数:

$$V(\omega, \tilde{\eta}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \omega(x, t)^2 dx + \frac{|b|}{2\gamma} \tilde{\eta}(t)^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \omega(x, t)^2 dx + \frac{|b|}{2\gamma} \left(\frac{1}{b} - \hat{\eta}(t) \right)^2 \quad (4)$$

其中, γ 是正常数,称之为自适应增益; $\hat{\eta}(t)$ 是对常数 $\frac{1}{b}$ 的动态补偿,其更新律将在后面确定.

沿着系统(1)的解计算 V 关于时间 t 的导数,并由分部积分法,有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^1 \omega(x, t) \omega_t(x, t) dx + \frac{|b|}{\gamma} \tilde{\eta}(t) \dot{\tilde{\eta}}(t) = \\ &= bu(t)\omega(1, t) + d(t)\omega(1, t) - \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx - \\ &= \frac{|b|}{\gamma} \tilde{\eta}(t) \dot{\tilde{\eta}}(t) \leq \\ &= bu(t)\omega(1, t) + \frac{1}{4} d(t)^2 - \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx + \\ &= b\omega(1, t)^2 \left(\frac{1}{b} - \hat{\eta}(t) + \hat{\eta}(t) \right) - \frac{|b|}{\gamma} \tilde{\eta}(t) \dot{\tilde{\eta}}(t) \quad (5) \end{aligned}$$

进而,注意到 $\frac{1}{b} - \hat{\eta} = \tilde{\eta}$,经一些直接的运算后得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq b\omega(1, t) \left(u(t) + \omega(1, t) \hat{\eta}(t) \right) - \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx + \\ &= b\tilde{\eta}(t) \left(\omega(1, t)^2 - \frac{\text{sgn}(b)}{\gamma} \dot{\tilde{\eta}}(t) \right) + \frac{1}{4} d(t)^2 \quad (6) \end{aligned}$$

为确保闭环系统具有期望的稳定性,式(6)右端一些符号不确定的项应被抵消掉且需增加一些负项,因此参数更新律选择如下:

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = \gamma \text{sgn}(b) \omega(1, t)^2 \quad (7)$$

其初始条件为 $\hat{\eta}(0) = -\text{sgn}(b)(1 + \omega_0(1)^2)$,并且状态反馈边界控制器设计如下:

$$u(t) = -\omega(1, t) \hat{\eta}(t) - \text{sgn}(b) \omega(1, t) - \text{sgn}(b) \omega(1, t)^3 \quad (8)$$

由此及式(6),得

$$\dot{V} \leq -|b| \omega(1, t)^2 - |b| \omega(1, t)^4 + \frac{1}{4} d(t)^2 - \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx \quad (9)$$

注 1. 值得提及的是,上述参数更新律被赋予了特定的初始条件.因此,易于看出控制器 u (如式(8)所示)有零初始值(即 $u(0) = 0$),从而式(3)的第二个方程退化为

$$\left. \frac{d\omega_0(x)}{dx} \right|_{x=1} = d(0) \quad (10)$$

其中, $d(0)$ 表示控制施加到系统之前的初始输出或输入的热流.这表明相容性条件(3)是独立于控制器 u 的,因此,较现有结果,其对 $\omega_0(x)$ 的限制被放宽了.

下面定理概括了本文的主要结果.

定理 1. 如果系统(1)的扰动 $d(t)$ 满足假设(2)且初始条件 $\omega_0(x)$ 满足 $\int_0^1 \omega_0(x)^2 dx < +\infty$,则所得到的自适应状态反馈边界控制器(7)和(8)确保如下论断成立:

1) $\int_0^1 \omega(x, t)^2 dx$ 和 $\hat{\eta}(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界,且 $\omega(x, t)$ 关于 t 是一致平方可积的,即 $\sup_{x \in [0, 1]} \int_0^{+\infty} \omega(x, t)^2 dt < +\infty$.

2) 进一步,当扰动 $d(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界时,闭环系统状态 $\omega(x, t)$ 是 $L_2[0, 1]$ 稳定的,即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \omega(x, t)^2 dx = 0$.

3) 特别地,当扰动 $d(t)$ 消逝且 $\int_0^1 \left(\frac{d\omega_0(x)}{dx} \right)^2 dx$ 有界时,闭环系统状态 $\omega(x, t)$ 收敛到0,即对任意 $x \in [0, 1]$,有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(x, t) = 0$.

证明. 对式(9)分别在 $[0, t]$ 和 $[0, +\infty)$ 上积分,经过一些简单处理后,得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \omega(x, t)^2 dx + \frac{|b|}{2\gamma} \left(\frac{1}{b} - \hat{\eta}(t) \right)^2 \leq \\ \frac{1}{4} \int_0^t d(\tau)^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^1 \omega_0(x)^2 dx + \frac{|b|}{2\gamma} \left(\frac{1}{b} - \hat{\eta}(0) \right)^2 \quad (11) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(|b| \omega(1, t)^2 + |b| \omega(1, t)^4 + \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx \right) dt \leq \\ \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} d(t)^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \omega_0(x)^2 dx + \frac{|b|}{2\gamma} \left(\frac{1}{b} - \hat{\eta}(0) \right)^2 \quad (12) \end{aligned}$$

由此及式(2)可知, $\int_0^{+\infty} \omega(1, t)^2 dt$, $\int_0^{+\infty} \omega(1, t)^4 dt$, $\int_0^{+\infty} \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx dt$ 是有界的,且 $\int_0^1 \omega(x, t)^2 dx$ 和 $\hat{\eta}(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有界.

应用 Poincaré 不等式(见文献[13]引理 A.1),有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^1 \omega(x, t)^2 dx dt \leq 2 \int_0^{+\infty} \omega(1, t)^2 dt + \\ 4 \int_0^{+\infty} \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx dt < +\infty \quad (13) \end{aligned}$$

再用 Agmon 不等式 (见文献 [13] 引理 A.2) 和熟知的 Cauchy-Schwartz 不等式, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \omega(x, t)^2 dt &\leq \int_0^{+\infty} \omega(1, t)^2 dt + \\ &2 \int_0^{+\infty} \sqrt{\int_0^1 \omega(x, t)^2 dx \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx} dt \leq \\ &\int_0^{+\infty} \omega(1, t)^2 dt + 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} \int_0^1 \omega(x, t)^2 dx} dt \times \\ &\sqrt{\int_0^{+\infty} \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx} dt < +\infty \end{aligned} \tag{14}$$

这意味着 $\omega(x, t)$ 关于时间 t 是一致平方可积的. 至此, 论断 1) 得证.

接下来证明论断 2), 即闭环系统状态 $\omega(x, t)$ 的 $L_2[0, 1]$ 稳定性. 为此, 只需验证 $\int_0^1 \omega(x, t)^2 dx$ 满足文献 [9] 中引理 3.1 的三个条件². 显然, 该引理的条件 a) 成立. 从式 (13) 可知引理的条件 c) 亦成立. 为了验证引理的条件 b), 先进行如下运算:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 \omega(x, t)^2 dx \right) &= \int_0^1 \omega(x, t) \omega_t(x, t) dx = \\ &\omega(1, t) \omega_x(1, t) - \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx = \\ &\omega(1, t) (bu(t) + d(t)) - \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx = \\ &- b\hat{\eta}(t)\omega(1, t)^2 - |b|\omega(1, t)^2 - |b|\omega(1, t)^4 + \\ &d(t)\omega(1, t) - \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx \end{aligned} \tag{15}$$

再通过完全平方法, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 \omega(x, t)^2 dx \right) &\leq \\ &\frac{1}{4} |b|\hat{\eta}(t)^2 + |b|\omega(1, t)^4 - |b|\omega(1, t)^2 - |b|\omega(1, t)^4 + \\ &\frac{1}{4|b|} d(t)^2 + |b|\omega(1, t)^2 - \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx \leq \\ &\frac{1}{4} |b|\hat{\eta}(t)^2 + \frac{1}{4|b|} d(t)^2 \end{aligned} \tag{16}$$

由于 $\hat{\eta}(t)$ 和 $d(t)$ 均在 $[0, +\infty)$ 有界, 故必存在常数 M 使得

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^1 \omega(x, t)^2 dx \right) \leq M \tag{17}$$

这说明文献 [9] 中引理 3.1 的条件 b) 是成立的. 因此, 论断 2) 成立.

对定理的论断 3), 显然有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \omega(x, t)^2 dx = 0$. 但这并不意味着对任意的 $x \in [0, 1], \omega(x, t)$ 是一致有界的且收敛到 0. 随后, 将通过验证 $\int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx$ 和 $\omega(1, t)$ 的有界

性来证明 $\omega(x, t)$ 的一致有界性和收敛性. 为此, 定义如下函数:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx + \frac{1}{2} |b|\omega(1, t)^2 + \\ &\frac{1}{4} |b| (\omega(1, t)^2 + \text{sgn}(b)\hat{\eta}(t))^2 \end{aligned} \tag{18}$$

通过计算 $\phi(t)$ 的导数并利用式 (1), (7) 和 (8), 得

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \int_0^1 \omega_x(x, t) \omega_{xt}(x, t) dx + |b|\omega(1, t) \omega_t(1, t) + \\ &b\hat{\eta}(t)\omega(1, t) \omega_t(1, t) + \frac{1}{2} b\dot{\hat{\eta}}(t)\omega(1, t)^2 + \\ &|b|\omega(1, t)^3 \omega_t(1, t) + \frac{1}{2} |b|\hat{\eta}(t)\dot{\hat{\eta}}(t) = \\ &\omega_x(1, t) \omega_t(1, t) - \int_0^1 \omega_{xx}(x, t)^2 dx + \\ &|b|\omega(1, t) \omega_t(1, t) + b\hat{\eta}(t)\omega(1, t) \omega_t(1, t) + \\ &\frac{1}{2} b\dot{\hat{\eta}}(t)\omega(1, t)^2 + |b|\omega(1, t)^3 \omega_t(1, t) + \frac{1}{2} |b|\hat{\eta}(t)\dot{\hat{\eta}}(t) = \\ &\frac{1}{2} b\dot{\hat{\eta}}(t)\omega(1, t)^2 + \frac{1}{2} |b|\hat{\eta}(t)\dot{\hat{\eta}}(t) - \int_0^1 \omega_{xx}(x, t)^2 dx \leq \\ &\frac{1}{2} \gamma |b|\omega(1, t)^4 + \frac{1}{2} \gamma |b| \cdot |\hat{\eta}(t)|\omega(1, t)^2 \end{aligned} \tag{19}$$

对上式两边在 $[0, t]$ 上积分并注意 $\hat{\eta}(t)$ 的初始值, 有

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq \phi(0) + \frac{1}{2} \gamma |b| \int_0^t \omega(1, \tau)^4 d\tau + \\ &\frac{1}{2} \gamma |b| \max_{t \in [0, +\infty)} |\hat{\eta}(t)| \int_0^t \omega(1, \tau)^2 d\tau = \\ &\frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left(\frac{d\omega_0(x)}{dx} \right)^2 dx + |b|\omega_0(1)^2 \right) + \\ &\frac{1}{4} |b| + \frac{1}{2} \gamma |b| \int_0^t \omega(1, \tau)^4 d\tau + \\ &\frac{1}{2} \gamma |b| \max_{t \in [0, +\infty)} |\hat{\eta}(t)| \int_0^t \omega(1, \tau)^2 d\tau \end{aligned} \tag{20}$$

由此及式 (11) 和 (12) 可知 $\phi(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是有界的, 因而 $\int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx$ 和 $\omega(1, t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是有界的.

因此, 应用 Agmon 不等式易推得

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, 1]} |\omega(x, t)| &\leq |\omega(1, t)| + \\ &\sqrt{2 \sqrt{\int_0^1 \omega(x, t)^2 dx} \int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx} \end{aligned} \tag{21}$$

从而 $\omega(x, t)$ 是一致有界的.

注意到 $\omega(x, t)$ 是一次连续可微的, 故对任意 $t \in [0, +\infty)$, 存在 $\bar{x} \in [0, 1]$ 满足 $\omega(\bar{x}, t)^2 = \min_{x \in [0, 1]} \omega(x, t)^2$. 从而, 用分部积分公式和 Cauchy-Schwartz 不等式, 对任

²(此引理可看作熟知的 Barbălat 引理的特例) 假设函数 $f(t) : [0, +\infty) \mapsto \mathbf{R}$ 满足如下三个条件:

- a) $f(t) \geq 0$ 对任意 $t \in [0, +\infty)$ 成立;
 - b) $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 是可微的且 $\sup_{t \geq 0} \frac{df(t)}{dt} < +\infty$;
 - c) $\int_0^{+\infty} f(t) dt < +\infty$.
- 则有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

意 $t \in [0, +\infty)$, 有

$$\begin{aligned} \omega(1, t)^2 &= \omega(\bar{x}, t)^2 + 2 \int_{\bar{x}}^1 \omega(x, t) \omega_x(x, t) dx = \\ &\min_{x \in [0, 1]} \omega(x, t)^2 + 2 \int_{\bar{x}}^1 \omega(x, t) \omega_x(x, t) dx \leq \\ &\min_{x \in [0, 1]} \omega(x, t)^2 + 2 \sqrt{\int_{\bar{x}}^1 \omega(x, t)^2 dx} \sqrt{\int_{\bar{x}}^1 \omega_x(x, t)^2 dx} \leq \\ &\min_{x \in [0, 1]} \omega(x, t)^2 + 2 \sqrt{\int_0^1 \omega(x, t)^2 dx} \sqrt{\int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx} \quad (22) \end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned} |\omega(1, t)| &\leq \min_{x \in [0, 1]} |\omega(x, t)| + \\ &\sqrt{2 \sqrt{\int_0^1 \omega(x, t)^2 dx} \sqrt{\int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx}} \quad (23) \end{aligned}$$

由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \omega(x, t)^2 dx = 0$ 显然意味着 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \min_{x \in [0, 1]} |\omega(x, t)| = 0$, 由式 (23), 可得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(1, t) = 0$. 从而, 由式 (21) 和 $\int_0^1 \omega_x(x, t)^2 dx$ 的有界性, 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(x, t) = 0$$

论断 3) 得证. □

2 仿真算例

对系统 (1), 通过设置初始条件为 $\omega_0(x) = x^2$, 控制系数为 $b = -10$, 边界扰动为 $d(t) = 2/(t + 1)$, 验证当自适应增益选为 $\gamma = 20$ 时自适应状态反馈边界控制器 (7) 和 (8) 的有效性.

将热方程所在域 $[0, 1]$ 划分成 50 等份, 再利用显示前项欧拉方法 (见文献 [14] 第 406 页) 进行仿真, 得到 4 幅仿真图. 其中, 图 1 和图 2 分别说明闭环系统状态 $\omega(x, t)$ 是 $L_2[0, 1]$ 稳定的和参数估计 $\hat{\eta}(t)$ 收敛到非零常值; 图 3 和图 4 表明边界扰动 $d(t)$ 消逝时, $\omega(x, t)$ 和 $\hat{\eta}(t)$ 分别收敛到 0 和一个更小的非零常值.

3 结论

本文针对一类带有不确定控制系数和边界扰动的热方程, 研究了其自适应状态反馈边界控制问题. 通过选择适当的控制 Lyapunov 函数和参数更新律, 显式构造了仅需系统边界状态信息的自适应控制器. 证明了闭环系统状态是 $L_2[0, 1]$ 稳定的, 且特别是当边界扰动消逝时, 系统状态收敛到 0. 需指明的是, 本文研究的热方程是反应-扩散-对流方程的一个特例. 然而由于不确定控制系数和边界扰动的存在, 所研究的热方程具有典型性且其控制设计方法具有借鉴性. 因此, 将本文的结果扩展到更一般的偏微分方程系统是有意义并且值得进一步研究的问题.

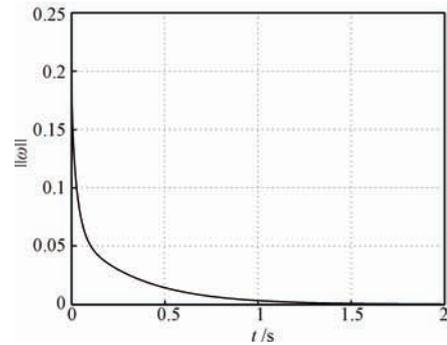


图 1 $d(t) = 2/(t + 1)$ 时, $\|\omega\| = (\int_0^1 \omega(x, t)^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ 的轨迹
Fig. 1 Evolution of $\|\omega\|$ when $d(t) = 2/(t + 1)$

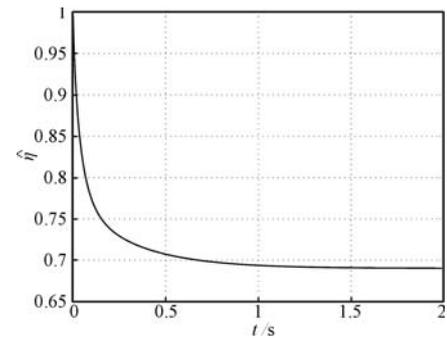


图 2 $d(t) = 2/(t + 1)$ 时, 参数估计 $\hat{\eta}$ 的轨迹
Fig. 2 Evolution of parameter estimate $\hat{\eta}$ when $d(t) = 2/(t + 1)$

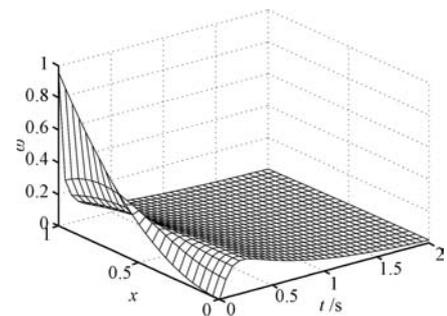


图 3 $d(t) \equiv 0$ 时, 状态 $\omega(x, t)$ 的轨迹
Fig. 3 Evolution of state $\omega(x, t)$ when $d(t) \equiv 0$

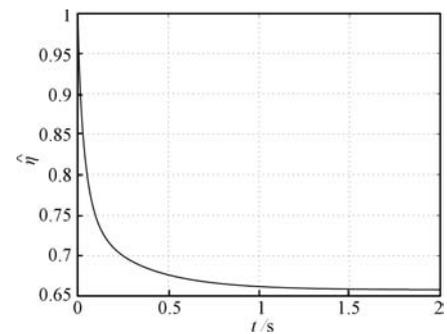


图 4 $d(t) \equiv 0$ 时, 参数估计 $\hat{\eta}(t)$ 的轨迹
Fig. 4 Evolution of parameter estimate $\hat{\eta}(t)$ when $d(t) \equiv 0$

References

- 1 Triggiani R. Boundary feedback stabilizability of parabolic equations. *Applied Mathematics and Optimization*, 1980, **6**(1): 201–220
- 2 Kim J U, Renardy Y. Boundary control of the Timoshenko beam. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1987, **25**(6): 1417–1429
- 3 Lasiecka I, Triggiani R. *Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 4 Boskovic D M, Krstic M, Liu W J. Boundary control of an unstable heat equation via measurement of domain-averaged temperature. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(12): 2022–2028
- 5 Liu W J. Boundary feedback stabilization of an unstable heat equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2004, **42**(3): 1033–1043
- 6 Smyshlyaev A, Krstic M. Closed-form boundary state feedbacks for a class of 1-D partial integro-differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(12): 2185–2202
- 7 Krstic M, Smyshlyaev A. Adaptive boundary control for unstable parabolic PDEs-Part I: Lyapunov design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(7): 1575–1591
- 8 Smyshlyaev A, Krstic M. Adaptive boundary control for unstable parabolic PDEs-Part II: estimation-based designs. *Automatica*, 2007, **43**(9): 1543–1556
- 9 Liu W J, Krstic M. Adaptive control of Burgers' equation with unknown viscosity. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2001, **15**(7): 745–766
- 10 Nguyen Q C, Hong K S. Asymptotic stabilization of a nonlinear axially moving string by adaptive boundary control. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, **329**(22): 4588–4603
- 11 Fard M P, Sagatun S I. Exponential stabilization of a transversely vibrating beam by boundary control via Lyapunov's direct method. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2001, **123**(2): 195–200
- 12 Queiroz M S, Dawson D M, Nagarkatti S P, Zhang F M. *Lyapunov-Based Control of Mechanical Systems*. Boston: Birkhauser, 2000
- 13 Krstic M. On global stabilization of Burgers' equation by boundary control. *Systems and Control Letters*, 1999, **37**(3): 123–141
- 14 Yang W Y, Cao W, Chung T S, Morris J. *Applied Numerical Methods Using MATLAB*. New Jersey: John Wiley and Sons, 2005

李健 山东大学控制科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向为分布参数系统和自适应控制. E-mail: sdulijian@gmail.com

(LI Jian Ph.D. candidate at the School of Control Science and Engineering, Shandong University. His research interest covers distributed parameter systems and adaptive control theory.)

刘允刚 山东大学控制科学与工程学院教授. 主要研究方向为随机系统控制, 非线性系统分析和自适应控制. 本文通信作者.

E-mail: lygfr@sdu.edu.cn

(LIU Yun-Gang Professor at the School of Control Science and Engineering, Shandong University. His research interest covers stochastic control, nonlinear system analysis, and adaptive control. Corresponding author of this paper.)