含有不确定性的 2 维离散线性系统的鲁棒 H_2 滤波设计

王利魁 [1]　　胡国林 [1]　　刘娟娟 [1]

摘　要　针对含有不确定参数的 2 维离散线性系统, 本文给出了两种鲁棒 H_2 滤波设计方法. 第一种方法采用引入参数相关的矩阵函数的思想, 所设计的 Lyapunov 函数及引入的变量都是多项式参数相关的, 随着矩阵函数次数的增加条件的保守性逐渐减小. 但是次数不能无限增加, 当达到一定程度后, 即使次数继续增加, 条件的保守性不再改变. 接着, 为了进一步减小保守性, 通过详细分析现有条件的保守性来源, 给出了第二种方法 — 循环迭代算法. 同现有文献相比, 在此算法中引入的变量不需要满足特定的结构, 因而具有更小的保守性. 最后, 通过两个仿真算例证明了当第一种方法无法减小保守性时, 第二种方法仍然可以进一步减小保守性.

关键词　2 维系统, 鲁棒滤波, H_2 性能, 线性矩阵不等式

DOI　10.3724/SP.J.1004.2012.00303

Robust H_2 Filtering Design for 2-D Discrete-time Linear System with Uncertainties

WANG Li-Kui[1]　　HU Guo-Lin[1]　　LIU Juan-Juan[1]

Abstract　This paper is about robust H_2 filtering design for 2-dimensional discrete-time linear system with convex uncertainties and presents two methods to design the filtering. The first method is based on the idea of introducing parameter-dependent matrix function. As the degree of matrix function increases, more variables are generated to lead to less conservative results. However, the degree can not go infinitely and there exists supremum. The conservatism can not be further reduced when the degree arrives at the supremum. Then, in order to further reduce the conservatism, the second method, i.e., iteration algorithm is proposed based on the analysis of the possible source of conservatism. Since no special structures are required in the slack variables, the algorithm is less conservative than the existing results. In the end, two examples are presented to illustrate that the second method can further reduce conservatism even when the first one fails to do.

Key words　2-D systems, robust filtering design, H_2 performance, linear matrix inequality (LMI)

不确定系统 (包括不确定随机系统, 如文献 [1−2]) 的滤波设计是人们关注的一个方向, 如文献 [3] 研究了 1 维空间分布系统的状态估计问题, 所得结果可以推广到多维系统. 而最近人们关注的焦点集中于如何降低条件的保守性, 所采用的方法主要包括设计新的 Lyapunov 函数或引入变量. 最初, 人们采用二次 Lyapunov 函数, 但是对于系统的不确定性参数来说, 二次 Lyapunov 函数有较大的保守性. 文献 [4] 将二次 Lyapunov 函数加以扩展得到了线性参数相关的 Lyapunov 函数, 而文献 [5] 将其进一步推广得到了多项式参数相关的 Lyapunov 函数. 引入变量是鲁棒控制的一种重要方法, 如文献 [6] 通过等价变换引入变量, 放松了以前的结果, 而文献 [7] 应用更一般的等价变换放松了文献 [6] 的结果, 接着, 文献 [8] 通过设定变量的结构放松了文献 [7] 的结果, 而文献 [5] 通过应用多项式参数相关的矩阵变量进一步放松了文献 [8], 文献 [9] 通过增加变量的方法得到了新的结论, 但是文献 [10] 指出这种方法是错误的. 相对 1 维系统来说, 2 维系统的研究复杂一些[11], 文献 [12] 研究了 2 维系统的 H_2 和 H_∞ 滤波问题, 而文献 [13] 研究了 2 维系统的稳定边界问题, 文献 [14] 通过应用多项式参数相关的矩阵变量研究了 2 维系统的 H_∞ 滤波设计, 最近, 文献 [15−16] 通过应用一种变换将原系统表示为新的系统, 从而得到了新的滤波设计方法. 但是我们注意到, 文献 [15] 为了得到线性矩阵不等式不得不将自由变量 G_2 设置为如下特殊结构 $G_2 = \begin{bmatrix} g^{\rm T} & 0_{n\times 4n} & 0_{n\times n_\pi} & 0_{n\times 2n_\omega} \end{bmatrix}^{\rm T}$, 这种特殊结构使得其具有一定的保守性.

本文采用两种方法进一步研究了含有不确定参数的 2 维离散系统的 H_2 滤波设计. 第一种方法基于多项式参数相关的矩阵变量, 随着变量的增加条件的保守性逐渐减小. 但是这种方法有一个缺点: 当变量增加到一定程度以后, 即使继续增加变量, 条件的保守性不再改变. 当这种情况发生时, 应用此方法无法进一步降低保守性. 基于前面对文献 [15] 保守性来源的分析, 我们提出了第二种方法: 循环迭代算法. 由于这种方法不需 G_2 满足特殊的结构, 因而能够有效地减小保守性, 尤其是当第一种方法失效时, 第二种方法能够进一步减小保守性.

1　问题描述

考虑如下的 2 维离散系统:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{i+1,j+1} &= A_1(\lambda)\boldsymbol{x}_{i,j+1} + A_2(\lambda)\boldsymbol{x}_{i+1,j} + \\ &\quad\ B_1(\lambda)\boldsymbol{\omega}_{i,j+1} + B_2(\lambda)\boldsymbol{\omega}_{i+1,j} \\ \boldsymbol{y}_{i,j} &= C(\lambda)\boldsymbol{x}_{i,j} + D(\lambda)\boldsymbol{\omega}_{i,j} \\ \boldsymbol{s}_{i,j} &= L(\lambda)\boldsymbol{x}_{i,j}, \quad i,j = 0,1,\cdots \end{aligned} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}_{i,j} \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, $\boldsymbol{\omega}_{i,j} \in \mathbf{R}^{n_\omega}$ 是噪声信号, $\boldsymbol{y}_{i,j} \in \mathbf{R}^{n_y}$ 是输出, $\boldsymbol{s}_{i,j} \in \mathbf{R}^{n_s}$ 是待估信号, $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_v}]^{\rm T}$ 是不确定参数, A_1, A_2, B_1, B_2, C, D, L 是系统矩阵. 这里需要假设不确定参数属于有 n_v 个顶点的凸集 $\Lambda \subset \mathbf{R}^{n_v}$. 为了估计信号 $\boldsymbol{s}_{i,j}$, 考虑如下的 2 维滤波:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}_{i+1,j+1} &= A_{f1}\hat{\boldsymbol{x}}_{i,j+1} + A_{f2}\hat{\boldsymbol{x}}_{i+1,j} + \\ &\quad\ B_{f1}y_{i,j+1} + B_{f2}y_{i+1,j} \\ \hat{\boldsymbol{s}}_{i,j} &= C_f\hat{\boldsymbol{x}}_{i,j} + D_f\boldsymbol{y}_{i,j}, \quad i,j = 0,1,\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{x}}_{i,j} \in \mathbf{R}^n$ 滤波状态, $\hat{\boldsymbol{s}}_{i,j} \in \mathbf{R}^{n_s}$ 是对 $\boldsymbol{s}_{i,j}$ 的估计, A_{f1}, A_{f2}, B_{f1}, B_{f2}, C_f 和 D_f 是待设计的滤波矩阵.

由式 (1) 和式 (2), 可得估计误差 $\boldsymbol{e}_{i,j} = \boldsymbol{s}_{i,j} - \hat{\boldsymbol{s}}_{i,j}$ 的误

收稿日期 2011-06-22　　录用日期 2011-10-09
Manuscript received June 22, 2011; accepted October 9, 2011
国家自然科学基金 (61104220, 61165014, 11102078), 江西省自然科学基金 (2010GQS0173), 江西省教育厅基金 (GJJ11170) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61104220, 61165014, 11102078), Natural Science Foundation of Jiangxi Province(2010GQS0173), Scientific Research Foundation of Jiangxi Provincial Education Department (GJJ11170)
本文责任编委 耿志勇
Recommended by Associate Editor GENG Zhi-Yong
1. 南昌航空大学数学与信息科学学院 南昌 330063
1. College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063

差系统如下:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_{i+1,j+1} = & A_{e1}(\lambda)\boldsymbol{\rho}_{i,j+1} + A_{e2}(\lambda)\boldsymbol{\rho}_{i+1,j} + \\ & B_{e1}\boldsymbol{\omega}_{i,j+1} + B_{e2}\boldsymbol{\omega}_{i+1,j} \\ \boldsymbol{e}_{i,j} = & C_e(\lambda)\boldsymbol{\rho}_{i,j} + D_e(\lambda)\boldsymbol{\omega}_{i,j}, \qquad i,j=0,1,\cdots\end{aligned} \tag{3}$$

其中,

$$\boldsymbol{\rho}_{i,j} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{i,j}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{x}}_{i,j}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, D_e(\lambda) = -D_f D(\lambda)$$

$$A_{ei}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_i(\lambda) & 0 \\ B_{fi}C(\lambda) & A_{fi} \end{bmatrix}, B_{ei}(\lambda) = \begin{bmatrix} B_i(\lambda) \\ B_{fi}D(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$C_e(\lambda) = \begin{bmatrix} L(\lambda) - D_f C(\lambda) & -C_f \end{bmatrix}$$

本文的目标是要设计 A_{f1}, A_{f2}, B_{f1}, B_{f2}, C_f, D_f, 从而使误差系统 (3) 渐近稳定并且具有良好的 H_2 性能.

在文献 [8] 中, 通过适当的变换可将系统 (1) 表示为如下等价形式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{i+1,j+1} &= F_1\breve{\boldsymbol{x}}_{i,j} + F_2\boldsymbol{\pi}_{i,j} + F_3\breve{\boldsymbol{\omega}}_{i,j} \\ \boldsymbol{y}_{i,j} &= C(\lambda)\boldsymbol{x}_{i,j} + D(\lambda)\boldsymbol{\omega}_{i,j} \\ \boldsymbol{s}_{i,j} &= L(\lambda)\boldsymbol{x}_{i,j} \\ 0 &= \Omega_1(\lambda)\breve{\boldsymbol{x}}_{i,j} + \boldsymbol{\pi}_{i,j} + \Omega_3(\lambda)\breve{\boldsymbol{\omega}}_{i,j}\end{aligned} \tag{4}$$

其中, $\boldsymbol{\pi}_{i,j} := \boldsymbol{\pi}(\breve{\boldsymbol{x}}_{i,j}, \breve{\boldsymbol{\omega}}_{i,j}, \boldsymbol{\lambda})$ 是以 $(\breve{\boldsymbol{x}}_{i,j}, \breve{\boldsymbol{\omega}}_{i,j}, \boldsymbol{\lambda})$ 为自变量的辅助函数, 而 $\Omega_1(\lambda) \in \mathbf{R}^{n_\pi \times 2n}$ 和 $\Omega_3(\lambda) \in \mathbf{R}^{n_\pi \times 2n_\omega}$ 是关于 λ 的线性函数 (关于 $\pi_{i,j}, \Omega_1(\lambda), \Omega_3(\lambda)$ 的详细定义见文献 [8]). 基于式 (4), 我们得到下面的引理:

引理 1[8]**.** 假设 Λ 为顶点已知的凸集, 考虑系统 (1) 及其等价表达形式 (4). 当 $\gamma > 0$ 给定时, 如果存在 $2n \times 2n$ 对称正定矩阵 P_{ik}, $i = 1, 2$; $k = 1, \cdots, n_v$ 及一般矩阵 G_{1k}, $k = 1, \cdots, n_v$, G_2 和 G_3 满足如下的线性矩阵不等式:

$$P_1(\lambda) > 0, P_2(\lambda) > 0, \quad \forall\lambda \in \mathcal{V}(\Lambda) \tag{5}$$

$$\Upsilon(\lambda) + \mathrm{Her}(G(\lambda)\mathcal{N}_\eta(\lambda)) - J < 0, \quad \forall\lambda \in \mathcal{V}(\Lambda) \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}(P_1(\lambda) + P_2(\lambda)) & 0 & C_e^{\mathrm{T}}(\lambda) \\ 0 & I_{n_\omega} & D_e^{\mathrm{T}}(\lambda) \\ C_e(\lambda) & D_e(\lambda) & \gamma^2 I_{n_s} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall\lambda \in \mathcal{V}(\Lambda) \tag{7}$$

$$\Upsilon(\lambda) = \mathrm{diag}\left\{\begin{matrix} P_1(\lambda) + P_2(\lambda) \\ -\mathrm{diag}\{P_1(\lambda), P_2(\lambda)\}, 0_{n_\pi}, 0_{2n_\omega} \end{matrix}\right\}$$

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} G_1(\lambda) & G_2 & G_3 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_{2n_\omega} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & I_{2n_\omega} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_f = \mathrm{diag}\{C_f, C_f\}, \ \bar{C}(\lambda) = \mathrm{diag}\{C(\lambda), C(\lambda)\}$$

$$\bar{L}(\lambda) = \mathrm{diag}\{L(\lambda), L(\lambda)\}, \ \bar{D}_f = \mathrm{diag}\{D_f, D_f\}$$

$$\bar{D}(\lambda) = \mathrm{diag}\{D(\lambda), D(\lambda)\}$$

$$A_f = \begin{bmatrix} A_{f1} & A_{f2} \end{bmatrix}, \ B_f = \begin{bmatrix} B_{f1} & B_{f2} \end{bmatrix}$$

$$N_x = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \end{bmatrix}, \ \bar{N}_x = \mathrm{diag}\{N_x, N_x\}$$

$$N_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \end{bmatrix}, \ \bar{N}_{\hat{x}} = \mathrm{diag}\{N_{\hat{x}}, N_{\hat{x}}\}$$

$$\mathcal{N}_\eta(\lambda) = \begin{bmatrix} -N_x & F_1\bar{N}_x & F_2 & F_3 \\ -N_{\hat{x}} & B_f\bar{C}(\lambda)\bar{N}_x + A_f\bar{N}_{\hat{x}} & 0 & B_f\bar{D}(\lambda) \\ 0 & \Omega_1(\lambda)\bar{N}_x & I_{n_\pi} & \Omega_3(\lambda) \end{bmatrix}$$

那么, 误差系统 (3) 是渐近稳定的, 并且对所有参数 $\lambda \in \Lambda$ 都有 $\|H_{\omega e}\|_2 < \gamma$.

2 主要结果

2.1 第一种方法

引入多项式参数相关的矩阵变量的方法具有这样的特点: 变量随着多项式次数的增加而增加, 因而条件的保守性会逐渐减小. 将此方法直接应用到文献 [15] 中的定理 4, 可得如下定理:

定 理 1. 如果存在 $2n \times 2n$ 对称正定矩阵 $X_{1,K_j(g)}$, $X_{2,K_j(g)}$; 一般矩阵 $Z_{1,K_j(g)}$, $Z_{2,K_j(g)}$, $Z_{3,K_j(g)}$, $Z_{4,K_j(g)}$, A_{d1}, A_{d2}, B_{d1}, B_{d2}, C_d, D_d, K_d, $M_{d,K_j(g)}$; $K_j(g) \in K(g)$, $j = 1, \cdots, J(g)$, 对所有的 $K_l(g+1) \in K(g+1)$ 和 $\Im = \beta_l^i(g+1)$都满足如下的线性矩阵不等式:

$$X_{1,K_j(g)} > 0, \ X_{2,K_j(g)} > 0$$

$$\sum_{i \in I_l(g+1)} (\mathcal{U} + \mathrm{Her}(M_{d,K_l^i(g+1)}\mathcal{N}_d) - \Im J) < 0$$

$$\sum_{i \in I_l(g+1)} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}(X_{1,K_j(g)} + X_{2,K_j(g)}) & 0 & \Im\mathcal{C}^{\mathrm{T}} \\ 0 & \Im I_{n_\omega} & \Im\mathcal{D}^{\mathrm{T}} \\ \Im\mathcal{C} & \Im\mathcal{D} & \Im\gamma^2 I_{n_s} \end{bmatrix} > 0 \tag{8}$$

其中,

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} L_i - D_d C_i & -C_d \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\mathcal{D} = -D_d D_i \tag{10}$$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{(11)} & \mathcal{U}_{(12)} & \mathcal{U}_{(13)} & \mathcal{U}_{(14)} \\ * & \mathcal{U}_{(22)} & \mathcal{U}_{(23)} & \mathcal{U}_{(24)} \\ * & * & \mathcal{U}_{(33)} & \mathcal{U}_{(34)} \\ * & * & * & \mathcal{U}_{(44)} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{(11)} = & X_{1,K_l^i(g+1)} + X_{2,K_l^i(g+1)} - \\ & \mathrm{Her}\left\{Z_{1,K_l^i(g+1)}N_x + \Im l K_d N_{\hat{x}}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{(12)} = & -N_x^{\mathrm{T}} Z_{2,K_l^i(g+1)}^{\mathrm{T}} + Z_{1,K_l^i(g+1)} F_1 \bar{N}_x + \\ & \Im l B_d \bar{C}_i \bar{N}_x + \Im l A_d \bar{N}_{\hat{x}}\end{aligned}$$

$$\mathcal{U}_{(13)} = -N_x^{\mathrm{T}} Z_{3,K_l^i(g+1)}^{\mathrm{T}} + Z_{1,K_l^i(g+1)} F_2$$

$$\mathcal{U}_{(14)} = -N_x^{\mathrm{T}} Z_{4,K_l^i(g+1)}^{\mathrm{T}} + Z_{1,K_l^i(g+1)} F_3 + \Im l B_d \bar{D}_i$$

$$\mathcal{U}_{(22)} = -X_{K_l^i(g+1)} + \mathrm{Her}\left\{Z_{2,K_l^i(g+1)} F_1 \bar{N}_x\right\}$$

$$\mathcal{U}_{(23)} = \bar{N}_x^{\mathrm{T}} F_1^{\mathrm{T}} Z_{3,K_l^i(g+1)}^{\mathrm{T}} + Z_{2,K_l^i(g+1)} F_2$$

$$\mathcal{U}_{(24)} = \bar{N}_x^{\mathrm{T}} F_1^{\mathrm{T}} Z_{4,K_l^i(g+1)}^{\mathrm{T}} + Z_{2,K_l^i(g+1)} F_3$$

$$\mathcal{U}_{(33)} = \mathrm{Her}\left\{Z_{3,K_l^i(g+1)}F_2\right\}$$
$$\mathcal{U}_{(34)} = F_2^{\mathrm{T}} Z_{4,K_l^i(g+1)}^{\mathrm{T}} + Z_{3,K_l^i(g+1)}F_3$$
$$\mathcal{U}_{(44)} = \mathrm{Her}\left\{Z_{4,K_l^i(g+1)}F_3\right\}$$
$$\bar{C}_i = \mathrm{diag}\left\{C_i, C_i\right\},\ \bar{D}_i = \mathrm{diag}\left\{D_i, D_i\right\}$$
$$\mathcal{N}_d = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{1,i}\bar{N}_x & I & \Omega_{3,i} \end{bmatrix},\ \bar{L}_i = \mathrm{diag}\left\{L_i, L_i\right\},$$

那么, 误差估计系统 (3) 是渐近稳定的, 并且满足 $\|H_{\omega e}\|_2 < \gamma$. 进一步, 以上条件如果对次数 $\hat{g}$ 成立, 那么当 $g > \hat{g}$ 时同样成立.

证明. $K_j(g)$, $J(g)$ 和 $\beta_l^i(g+1)$ 的详细定义见文献 [5,14]. 如果定理 1 成立, 那么在 $X_{1,K_j(g)} > 0$ 和 $X_{2,K_j(g)} > 0$ 左右两边同时乘以 $\mathrm{diag}\{I_n, K_2K_1^{-1}\}$ 及其转置, 并且定义

$$P_1(\lambda) = \sum_{j=1}^{J(g)} \lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\cdots\lambda_{n_v}^{k_{n_v}} P_{1,K_j(g)}$$

$$P_2(\lambda) = \sum_{j=1}^{J(g)} \lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\cdots\lambda_{n_v}^{k_{n_v}} P_{2,K_j(g)}$$

在

$$\sum_{i\in I_l(g+1)} (\mathcal{U} + \mathrm{Her}(M_{d,K_l^i(g+1)}\mathcal{N}_d) - \Im J) < 0$$

两边同时乘以

$$\mathrm{diag}\{I_n, K_2K_1^{-1}, I_n, K_2K_1^{-1}, I_n, K_2K_1^{-1}, I_{n_\pi}, I_{2n_\omega}\}$$

及其转置, 在

$$\sum_{i\in I_l(g+1)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(X_{1,K_j(g)} + X_{2,K_j(g)}) & 0 & \Im\mathcal{C}^{\mathrm{T}} \\ 0 & \Im I_{n_\omega} & \Im\mathcal{D}^{\mathrm{T}} \\ \Im\mathcal{C} & \Im\mathcal{D} & \Im\gamma^2 I_{n_s} \end{bmatrix} > 0$$

两边同时乘以 $\mathrm{diag}\{I_n, K_2K_1^{-1}, I_{n_\omega}, I_{n_s}\}$ 及其转置, 再利用凸性 $(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n_v})^f = 1$ 和定义

$$G(\lambda) = \sum_{j=1}^{J(g)} \lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\cdots\lambda_{n_v}^{k_{n_v}} G_{K_j(g)}$$

可以得到:

$$P_1(\lambda) > 0, P_2(\lambda) > 0$$

$$\Upsilon(\lambda) + \mathrm{Her}(G(\lambda)\mathcal{N}_\eta(\lambda)) - J < 0 \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(P_1(\lambda) + P_2(\lambda)) & 0 & C_e^{\mathrm{T}}(\lambda) \\ 0 & I_{n_\omega} & D_e^{\mathrm{T}}(\lambda) \\ C_e(\lambda) & D_e(\lambda) & \gamma^2 I_{n_s} \end{bmatrix} > 0 \tag{13}$$

在式 (12) 两边同时乘以

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{i+1,j+1}^{\mathrm{T}} & \breve{\boldsymbol{\rho}}_{i,j}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\pi}_{i,j}^{\mathrm{T}} & \breve{\boldsymbol{\omega}}_{i,j}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

及其转置, 同时对式 (13) 应用 Schur 补, 得:

$$\begin{bmatrix} -\frac{P_1(\lambda)+P_2(\lambda)}{2} + \tilde{C} & \gamma^{-2}C_e^{\mathrm{T}}(\lambda)D_e(\lambda) \\ * & \gamma^{-2}D_e^{\mathrm{T}}(\lambda)D_e(\lambda) - I_{n_s} \end{bmatrix} > 0 \tag{14}$$

其中,

$$\tilde{C} = \gamma^{-2}C_e^{\mathrm{T}}(\lambda)C_e(\lambda)$$

然后在式 (14) 两边同时乘以 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{i,j}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\omega}_{i,j}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ 及其转置, 可得

$$\gamma^{-2}\boldsymbol{e}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{ij} - 0.5\boldsymbol{\rho}_{i,j}^{\mathrm{T}}(P_1(\lambda) + P_2(\lambda))\boldsymbol{\rho}_{i,j} - \boldsymbol{\omega}_{i,j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_{i,j} < 0$$

从而误差估计系统是渐近稳定的, 并且具有 H_2 性能 γ.

下面我们来证明次数增加而定理 1 的保守性不会增加. 假设次数 g 时定理 1 成立, 那么对于次数 $g+1$, 可令:

$$\widetilde{P}_1(\lambda) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n_v})P_1(\lambda)$$

$$\widetilde{P}_2(\lambda) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n_v})P_2(\lambda)$$

$$\widetilde{G}(\lambda) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n_v})G(\lambda)$$

从而, $g+1$ 时的线性矩阵不等式可以看作是 g 时的线性组合, 因而, 定理 1 在 g 时成立, 那么在 $g+1$ 同样成立, 依次类推可以得出大于 g 的次数都成立. □

注 1. 虽然通过增加次数能够不断引入变量, 从而减小保守性, 但是应用此方法时会发生一种现象: 存在整数 $\bar{g}$, 使得 $\gamma_{\bar{g}} = \gamma_{\bar{g}+1}$. 也就是说当次数增加到 $\bar{g}$ 时, 即使继续增加次数, 条件的保守性不再改变. 如果这种情况发生, 那么此方法无法进一步减小保守性.

2.2　第二种方法

因为引理 1 中含有关于 A_{f1}, A_{f2}, B_{f1}, B_{f2} 和 G_2 的非线性项, 因而不能使用线性矩阵不等式技术来设计滤波, 为了得到线性矩阵不等式结论 (文献 [15] 中定理 4), G_2 必须满足如下特殊结构:

$$G_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1^{\mathrm{T}} & K_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} & 0_{n\times 4n} & 0_{n\times n_\pi} & 0_{n\times 2n_\omega} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

其中, $K_1 \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和 $K_2 \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵, 这种特殊的结构必然导致保守性.

为弥补这一缺点, 进一步减小保守性, 从另外角度考虑, 构建循环迭代算法来设计滤波, 这样变量 G_2 为一般的矩阵而不需满足上述的特殊结构, 从而能够保证误差系统的渐近稳定且具有更好的 H_2 性能.

算法 1.

步骤 1. 给定 G_2, 设 $m = 1$, 应用 Mincx 解决如下的优化问题:

$$\min_{P_{ik}>0, G_{1k}, G_3, A_f, B_f} \gamma \tag{16}$$
$$\text{s.t.}\quad 不等式(5) \sim (7)$$

记所得结果为 $\left(\gamma_m^1, A_f, B_f, \bar{C}_f\right)$.

步骤 2. 应用步骤 1 中所得的 $A_f, B_f, \bar{C}_f$ 求解如下的优化问题:

$$\min_{P_{ik}>0, G_{1k}, G_3, G_2} \gamma \tag{17}$$
$$\text{s.t.}\quad 不等式(5) \sim (7)$$

记所得的结果为 $\left(\gamma_m^2, G_2\right)$.

步骤 3. 设 $\gamma_m = \min(\gamma_m^1, \gamma_m^2)$, 如果 $|\gamma_m - \gamma_{m-1}| < \delta$, 其中 δ 为设定的精度, 停止算法; 如果不满足, 设 $m = m+1$, 回到步骤 1 继续循环. 如有必要, 可以事先设定循环的次数 $m = m_{\max}$ 而不考虑精度 δ, 当达到循环的次数时便停止循环.

注 2. 不同的初始条件经过迭代之后会得到不同的结果, 为了保证算法的收敛性, 可以使用一些特殊的矩阵作为初始条件或将现有方法的计算结果设为初始条件. 因为文献 [15] 中的定理 4 是引理 1 的一种特殊情况, 可以用文献 [15] 中定理 4 的解作为算法的初始条件, 这样能够保证算法收敛以及保守性逐渐降低.

3 仿真算例

3.1 仿真算例 1 (文献 [15] 中的例 1)

考虑如下系统矩阵中含有不确定性参数的 2 维离散系统:

$$A_1=\begin{bmatrix}0.3&0\\0&0\end{bmatrix},\ A_2(\lambda)=\begin{bmatrix}0&0\\1&0.2+\lambda\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}3&1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix}0&0.5\end{bmatrix}$$

其中, λ 为满足 $|\lambda|\le\delta$ 的不确定参数. 此系统可表示为形如式 (4) 的等价形式, 参数如下:

$$\pi(x,\lambda)=\lambda x_{i+1,j}(2)$$

$$F_1=\begin{bmatrix}0.3&0&0&0\\0&0&1&0.2\end{bmatrix},\ F_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$F_3=\begin{bmatrix}B_1&B_2\end{bmatrix},\ \Omega_1(\lambda)=\begin{bmatrix}0&0&0&-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\Omega_3(\lambda)=0_{1\times4}$$

当 $\delta=0.75$ 时, 应用定理 1 及算法 1 所得结果见表 1.

表 1 不同方法所得的 H_2 性能 γ

Table 1 The H_2 performance γ obtained by different methods

方法	H_2 性能 γ	变量	LMIs	运算时间 (s)
文献 [8] 中定理 4	1.4823	144	8	4.1250
定理 1 ($g=2$)	1.4243	232	12	7.6100
定理 1 ($g=3$)	1.4243	303	16	12.5310
定理 1 ($g=4$)	1.4243	374	20	18.4120
算法 1	1.0453	164	16	76.8400

所使用的 PC 为 AMD Athlon (tm) X4 245 Processor 2.91 GHz, 4.00 GB 的内存, 使用 Matlab 7.0. 线性矩阵不等式的个数为 $\frac{4\times(g+n_v-1)!}{g!(n_v-1)!}$, 变量的个数为 $\frac{(g+n_v-1)!}{g!(n_v-1)!}\times(12n^2+7nn_\pi+2nn_\omega+n_\pi^2+2n_\omega n_\pi)+4n^2+nn_y+1$. 算法 1 的变量以及线性矩阵不等式的个数是指单个循环内的数目, 而时间则是完成 20 个循环所用的时间. 从表 1 可以看出, 应用定理 1 所得的结果要比文献 [8] 的结果好, 但是随着次数 g 的增加, 条件的保守性并未进一步减小 ($\gamma_{g=2}=\gamma_{g=3}=\gamma_{g=4}$), 对于例 1 来说, 应用增加变量的方法无法进一步减小保守性. 应用算法 1, 初始条件设为

$$G_2=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}I_2&10\times I_2\end{bmatrix}&0_{2\times8}&0_{2\times1}&0_{2\times4}\end{bmatrix}^{\mathrm T}$$

循环 $m_{\max}=20$ 次后得到 $\gamma=1.0453$, 此结果比文献 [15] 的结果减小了 $\frac{1.4823-1.0453}{1.4823}=29.48\,\%$, 比定理 1 的结果减小了 $\frac{1.4243-1.0453}{1.4243}=26.61\,\%$, 仿真结果充分说明了本方法的有效性. 但是从表中我们可以看出, 估计精度的提高是以运算时间的增加为代价的, 这是算法 1 的弊端, 但对于离线运算本方法非常有效. 此时所得的滤波矩阵如下:

$$A_f=\begin{bmatrix}-0.0632&-0.0516&-0.6946&-0.3425\\0.0652&0.0533&0.1982&0.8387\end{bmatrix}$$

$$B_f=\begin{bmatrix}-0.0072&-0.0353\\0.0074&-0.0190\end{bmatrix}$$

$$\bar C_f=\begin{bmatrix}-3.3291&-3.4953&0&0\\0&0&-3.3291&-3.4953\end{bmatrix}$$

3.2 仿真算例 2 (文献 [15] 中的例 2)

考虑如下系统矩阵中含有不确定性参数的 2 维离散系统:

$$A_1(\lambda)=\begin{bmatrix}0.2+0.1\lambda_1&-0.5\\0.5&0.2\end{bmatrix},A_2(\lambda)=\begin{bmatrix}0.25&0.1\lambda_2\\0.05&0.3\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0.5&0.25\end{bmatrix}^{\mathrm T},\ B_2=\begin{bmatrix}0&0.5\end{bmatrix}^{\mathrm T}$$

$$C=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix},\ D=1,\ L=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}$$

其中, λ_i, $i=1,2$, 为满足 $|\lambda_i|<\delta$ 的不确定参数. 此系统可表示为形如式 (4) 的等价形式, 其中,

$$\pi(x,\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda_1x_{i,j+1}(1)&\lambda_2x_{i+1,j}(2)\end{bmatrix}^{\mathrm T}$$

$$F_1=\begin{bmatrix}0.2&-0.5&0.25&0\\0.5&0.2&0.05&0.3\end{bmatrix},\ F_2=\begin{bmatrix}0.1&0.1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$F_3=\begin{bmatrix}B_1&B_2\end{bmatrix},\ \Omega_1(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda_1&0&0&0\\0&0&0&-\lambda_2\end{bmatrix}$$

$$\Omega_3(\lambda)=0_2$$

当 $\delta=4$ 时, 应用定理 1 及算法 1 所得结果见表 2.

表 2 不同方法所得的 H_2 性能 γ

Table 2 The H_2 performance γ obtained by different methods

方法	H_2 性能 γ	变量	LMIs	运算时间 (s)
文献 [8] 中定理 4	2.9772	259	16	10.4850
定理 1 ($g=2$)	2.7984	859	40	157.8440
定理 1 ($g=3$)	2.7982	1 699	80	639.4300
定理 1 ($g=4$)	2.7982	2 959	140	1 824.8150
算法 1	2.5564	292	32	388.7294

从仿真看出, 定理 1 的保守性随着次数 g 的增加逐渐减小 ($g=2$ 时, $\gamma=2.7984$; $g=3$ 时, $\gamma=2.7982$), 但是, $g=3$ 时的结果和 $g=4$ 时的结果相同, 也就是说 $g=3$ 是多项式次数的极限, 当次数大于 3 时, 应用定理 1 无法进一步降低保守性. 并且, 随着次数的增加, 变量的个数也不断增加, 从而导致计算复杂度增加, 需要花费更多的时间来完成运算, 尤其是系统的维数较大时, 这种情况更明显. 而应用算法 1, 初始条件设为

$$G_2=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}I_2&20\times I_2\end{bmatrix}&0_{2\times8}&0_{2\times2}&0_{2\times2}\end{bmatrix}^{\mathrm T}$$

循环 $m_{\max} = 20$ 次后得到 $\gamma = 2.5564$, 此结果比文献 [8] 的结果减小了 $\dfrac{2.9772 - 2.5564}{2.9772} = 14.13\,\%$, 比定理 1 的结果减小了 $\dfrac{2.7982 - 2.5564}{2.7982} = 8.64\,\%$. 仿真结果充分说明, 当引入变量无法进一步降低保守性时, 算法 2 仍然可以减小保守性, 然而这种精度的提高是以复杂度的提高为代价的. 此时所得的滤波矩阵如下:

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.3404 & -0.8790 & -0.1368 & 0.0791 \\ 0.0276 & 0.0860 & -0.0073 & 0.2551 \end{bmatrix}$$

$$B_f = \begin{bmatrix} -0.0227 & -0.0112 \\ -0.0122 & -0.0017 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_f = \begin{bmatrix} -15.8898 & -31.6573 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15.8898 & -31.6573 \end{bmatrix}$$

4 结论

本文应用两种方法讨论了 2 维离散系统的 H_2 滤波设计问题. 第一种方法采用了鲁棒控制领域常用的方法 — 引入变量法. 这种方法的一个特点为: 随着参数多项式次数的增加, 变量的个数也不断增加, 条件的保守性逐渐减小. 但是, 总存在一个正整数 $\bar{g}$, 当次数超过 $\bar{g}$ 后, 条件的保守性不再减小, 那么如何进一步减小条件的保守性呢? 为此, 通过详细分析现有条件保守性的来源, 我们设计了一种算法. 在此算法中, 变量矩阵不必是特定的结构, 因而能够在增加变量这种方法失效时进一步减小条件的保守性. 最后的仿真算例证明了方法的有效性.

References

1 Liang H Y, Zhou T. Robust state estimation for uncertain discrete-time stochastic systems with missing measurements. *Automatica*, 2011, **47**(7): 1520−1524

2 Cui Jia-Rui, Hu Guang-Da. State estimation of 2-D stochastic systems represented by FM-II model. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(5): 755−761

3 Liang Hua-Yong, Zhou Tong. Distributed state estimation for spatially interconnected systems and its convergence analysis. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(5): 720−730
(梁化勇, 周彤. 一类空间连接系统的分布式状态估计及其收敛性分析. 自动化学报, 2010, **36**(5): 720−730)

4 Oliveira M C, Bernussou J, Geromel J C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems and Control Letters*, 1999, **37**(4): 261−265

5 Gao H J, Meng X Y, Chen T W. A new design of robust H_2 filters for uncertain systems. *Systems and Control Letters*, 2008, **57**(7): 585−593

6 Geromel J C, Oliveira M C, Bernussou J. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002, **41**(3): 700−711

7 Xie L, Lu L, Zhang D, Zhang H. Improved robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, 2004, **40**(5): 873−880

8 Duan Z, Zhang J, Zhang C, Mosca E. Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, 2006, **42**(11): 1919−1926

9 Zhang J H, Xia Y Q, Shi P. Parameter-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, 2009, **45**(2): 560−565

10 Wang L K. Comments on "parameter-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems". *Automatica*, 2011, **47**(8): 1846−1847

11 Du C, Xie L. *H_∞ Control and Filtering of Two-dimensional Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 2002

12 Tuan H D, Apkarian P, Nguyen T Q, Narikiyo T. Robust mixed H_2/H_∞ filtering of 2-D systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(7): 1759−1771

13 Zhou T. Stability and stability margin for a two-dimensional system. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(9): 3483−3488

14 Gao H J, Meng X Y, Chen T W. New design of robust H_∞ filters for 2-D systems. *IEEE Signal Processing Letters*, 2008, **15**: 217−220

15 Souza C E, Xie L, Coutinho D F. Robust filtering for 2-D discrete-time linear systems with convex-bounded parameter uncertainty. *Automatica*, 2010, **46**(4): 673−681

16 Coutinho D F, Souza C E, Barbosa K A. Robust H_∞ filter design for a class of discrete-time parameter varying systems. *Automatica*, 2009, **45**(12): 2946−2954

王利魁 博士, 南昌航空大学数学与信息科学学院副教授. 主要研究方向为模糊控制, 滤波. 本文通信作者. E-mail: wlk0228@yahoo.cn
(**WANG Li-Kui** Ph. D., associate professor at Nanchang Hangkong University. His research interest covers fuzzy control and filtering. Corresponding author of this paper.)

胡国林 南昌航空大学数学与信息科学学院硕士研究生. 主要研究方向为不确定系统的滤波设计. E-mail: huguolin1985@163.com
(**HU Guo-Lin** Master student at Nanchang Hangkong University. His main research interest is filtering design for uncertain system.)

刘娟娟 南昌航空大学数学与信息科学学院讲师. 主要研究方向为 2 维系统. E-mail: liujj_19801202@tom.com
(**LIU Juan-Juan** Lecturer at Nanchang Hangkong University. Her main research interest is two dimensional system.)