

多率系统 Kalman 滤波算法的鲁棒性分析

吴瑶¹ 罗雄麟¹

摘要 多率系统 Kalman 滤波算法是多率采样系统中对多源观测进行融合的重要手段. 基于化工过程的多率采样特点, 给出了多率 Kalman 滤波算法, 分析了该算法在模型失配情况下的鲁棒性. 在给定的假设条件下, 通过对滤波误差变化规律的分析, 给出了多率 Kalman 滤波稳定与发散的基本判定方法. 针对一类典型系统, 推导出了滤波稳定与发散判据. 通过仿真对该判据进行了验证, 仿真结果表明所提出的滤波鲁棒性分析方法可以用于算法的实际应用.

关键词 多率系统, Kalman 滤波, 鲁棒性, 滤波偏差比

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00156

Robustness Analysis of Kalman Filtering Algorithm for Multirate Systems

WU Yao¹ LUO Xiong-Lin¹

Abstract The multirate Kalman filtering algorithm is an important method of fusing multi-source observations in multirate systems. The multirate Kalman filtering algorithm is given based on the multirate-sampling character of chemical processes, and the robustness of the algorithm under model mismatches is investigated. By analyzing the evolution pattern of the filtering error under given hypothesis, a basic judging method of multirate Kalman filtering divergence is proposed. Then, a criterion of the filter divergence property for a class of typical systems is derived. Simulation result shows that the proposed method can be applied to the multirate Kalman filtering algorithm.

Key words Multirate system, Kalman filter, robustness, filtering error ratio

采样系统是离散化实际系统的连续信号而得到的, 当各个采样器或保持器以不同的采样周期进行采样或保持时, 就形成了多采样率系统 (Multirate sampled systems) 或称多率系统 (Multirate systems). 近年来, 随着人们对多率现象认识的不断深入, 多率系统越来越受到学者们的关注. 多率系统已逐渐成为一个极为活跃的理论研究与应用领域. 多率系统的建模、辨识以及状态估计是多率系统研究中重要的研究方向^[1], 提升技术、多项式变换、辅助模型、最小二乘法等方法均得到了广泛的研究应用.

在双率系统参数辨识方面, 文献 [2] 提出了利用辅助模型辨识双率采样数据系统的模型参数方法, 基本思想是根据输入输出的采样数据, 利用辅助模型估计无干扰系统的未知输出, 然后直接辨识出下层快速单率模型参数, 在一般或者弱的持续激励和无界噪声方差条件下, 参数的估计误差收敛于零, 输出估计一致收敛于真实的输出. 文献 [3] 对于输出采

样周期整数倍于输入采样周期的双率系统, 提出了利用辅助 FIR (Finite impulse response) 模型预测模型输出并结合系统输入辨识底层的快速单率系统模型参数的方法. 文献 [4] 针对双率采样数据系统提出了一种新的梯度递归算法辨识模型参数的方法, 利用输出误差方法辨识单率模型并且从系统的输入输出数据直接得到未知的无干扰输出. 文献 [5] 提出了利用多项式变换技术辨识双率采样数据系统的数学模型的方法. 文献 [6] 提出了利用随机梯度算法辨识双率系统模型参数的方法, 基于系统的输入输出数据, 利用输出估计的算法得到采样时刻间的输出.

在双率系统的参数和状态估计方面, 文献 [7] 推导了一般双率采样数据系统的提升状态空间模型, 并基于状态空间能观性规范模型, 提出了相应的递阶辨识方法; 文献 [8] 利用提升技术推导提升状态空间模型, 对于状态可测的多率系统利用最小二乘法辨识模型参数和状态, 对于不可测的系统分解为多个子系统, 提出了用状态空间模型递阶辨识方法辨识模型参数和状态的方法.

对于存在两个以上采样频率的多率系统, 文献 [9] 研究了多率多输入系统的辅助模型最小二乘辨识算法, 文献 [10] 利用多新息辨识理论研究了多率多输入系统的辨识方法, 文献 [11] 研究了多率多输入系统的辅助模型多新息辨识算法, 文献 [12] 推导了多率多输入系统的最小二乘迭代辨识方法.

对于非均匀采样系统和损失数据系统的辨识,

收稿日期 2011-03-15 录用日期 2011-11-10
Manuscript received March 15, 2011; accepted November 10, 2011

国家自然科学基金 (21006127, 20976193) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (21006127, 20976193)

本文责任编辑 贾英民
Recommended by Associate Editor JIA Ying-Min
1. 中国石油大学 (北京) 自动化研究所 北京 102249

1. Research Institute of Automation, China University of Petroleum, Beijing 102249

文献 [13] 提出了用部分耦合随机梯度算法估计模型参数的方法, 好于标准的随机梯度算法. 文献 [14] 认为不可能从均匀采样系统完全恢复到连续系统, 但可以从非均匀采样系统恢复, 并且讨论了非均匀采样系统的相关问题, 包括模型的构建、可控性、可观性、具有不同频率的单率模型计算、连续系统的恢复、非均匀采样系统参数辨识等. 文献 [15] 采用带有有色噪声的非均匀采样系统的状态空间模型, 针对信息向量中存在未知内部变量和不可测噪声, 提出了基于辅助模型的多新息广义增广随机梯度算法辨识方法. 文献 [16] 针对非均匀采样系统采用辅助模型进行了递推最小二乘辨识. 文献 [17] 利用提升技术推导了非均匀采样系统的提升状态空间模型, 利用最小二乘法辨识模型参数和状态, 将不可测的系统分解为子系统, 利用状态空间模型递阶辨识方法来辨识模型参数和状态. 文献 [18] 利用连续时间状态空间模型描述异步非均匀采样的多变量系统, 推导了模型参数、参数梯度和系统状态之间的相互递推关系, 构成了一种可迭代间隔的递推辨识算法, 在每次输出采样点上仅更新模型中受当前采样数据影响的参数. 文献 [19] 提出了非均匀采样数据系统的梯度迭代辨识方法. 文献 [20] 针对稀少量测数据系统和损失数据系统, 提出了基于辅助模型的多信息随机梯度辨识方法, 并研究了算法的收敛性. 文献 [21] 提出了基于梯度法利用克罗内克引理和鞅收敛原理估计稀少量测数据系统和损失数据系统的系统参数的方法.

对于多率系统的控制^[22], 文献 [23] 利用多项式变换技术得到双率系统的数学模型, 根据随机梯度算法估计系统模型参数, 在此基础上提出了双率系统的自适应控制算法, 证明了在持续激励下, 输出的跟踪误差收敛到零, 基于控制算法的参数估计实现了渐近最优控制, 保证了闭环系统的稳定性和全局收敛性. 文献 [24] 利用多项式变换技术得到 Hammerstein 非线性输出采样系统的数学模型, 提出了双率非线性系统的最小二乘自校正控制算法, 实现了渐近最优控制, 保证了闭环系统的稳定性和全局收敛性. 文献 [25] 对于输出采样周期数倍于输入采样周期的双率系统, 利用多项式变换技术得到系统的频域模型, 提出了这类双率采样数据系统的自适应控制算法.

作为多率状态估计的重要手段, 多率 Kalman 滤波技术也得到了研究者的重视. 多率 Kalman 滤波算法最早由 Kalman 等提出^[26], 并逐渐应用于各种实际过程的状态估计问题^[27-28]. 为了有效综合多种不同频率的过程信息和观测数据, 多率 Kalman 滤波算法常被用来对数据中的冗余信息进行提取和融合, 以提高关键质量变量的估计精度以及过

程控制的质量. 文献 [29] 将多率 Kalman 滤波算法应用于软测量仪表的建立, 并采用提升技术选取最优增益. 文献 [30] 利用多率扩展 Kalman 滤波对重要的产品质量变量进行估计, 并结合非线性模型预测控制算法实现对苯乙烯聚合过程的控制. 文献 [31] 在已建立的软模型的基础上, 利用多率 Kalman 滤波算法对快速采样的软测量模型估计与慢速的现场化验数据进行综合, 提出输出融合的设计方法, 补偿软测量建模偏差, 以较好地改善多率系统下软仪表的估计精度和稳定性. 文献 [32] 研究了 Kalman 滤波应用于非均匀采样多率系统, 在非均匀采样多率系统的框架下, 研究了一步预测和滤波算法以及稳定性和收敛性的分析.

在文献 [33] 中, 利用多率 Kalman 滤波算法对化工过程中不同采样频率的软测量模型预估数据和现场观测数据进行融合, 能够有效地提取多源、多率观测数据中的信息, 实现对关键质量变量的快速和准确估计. 然而, 与标准滤波算法类似^[34], 多率 Kalman 滤波算法也存在滤波不稳定及发散的问题. 当滤波模型以及噪声统计参数与真实对象不一致时, 滤波估计可能存在误差, 甚至随着滤波过程的进行出现滤波发散现象. 这一问题在化工过程的应用中尤为突出. 在化工生产中, 由于反应过程的复杂性和时变性, 往往难以获知准确的对象模型, 或为降低计算负荷需要简化模型, 因此, 滤波所采用的模型通常与实际不符. 受到参数失配的影响, 滤波估值的精度和可靠性降低, 滤波器的实际稳定性难以保证, 多率 Kalman 滤波算法的效率和有效性都受到影响. 因此, 将多率 Kalman 滤波算法应用于化工过程的数据融合时, 对参数失配情况下的多率 Kalman 滤波的稳定性, 即滤波鲁棒性进行分析是十分必要的. 尽管早在上世纪 80 年代, 已有多位学者^[35-37] 通过分析周期滤波系统的 Riccati 方程的有解性以及周期解的稳定性问题, 对多率 Kalman 滤波算法的稳定性进行了研讨, 但此后关于这一算法的鲁棒性研究却鲜有报道.

本文基于多率 Kalman 滤波算法在化工应用中的特点, 研究该算法在模型失配下的稳定性, 即鲁棒性. 根据实际应用背景, 在给定的假设条件下, 通过对滤波误差式的推导, 试图给出模型失配情况下的多率 Kalman 滤波稳定/发散的基本判定方法与步骤, 并针对一类型系统, 进一步推导和分析滤波误差的详细变化规律, 给出明确的滤波过程稳定与发散的数学判据, 为算法的鲁棒性能分析提供指导. 通过仿真实例对各定理及推论进行验证及应用, 指出结论的合理性与实际适用性, 以指导多率 Kalman 滤波算法在实际中的应用.

1 多率采样系统

多率采样系统广泛存在于过程工业、信号处理、航空航天、地震观测/地质勘探和医学等领域中,例如:在某些情况下,执行器的损耗在系统设计中成为一个重要参数,不能频繁变化,使得被控对象的输入频率必须小于输出的采样频率,形成双率采样系统,如温室温度控制^[38]和磁盘驱动器系统中对磁头定位的控制^[39];而在过程工业中,多率系统研究具有现实目的和需求:复杂设备和生产线中的塔釜、容器和管道等都具有多个控制(测量)点,采样率不一样,用色谱分析仪对物料成分进行测量所需要的时间比测温度或压力所需要的时间要长很多,而人工采样化验分析所需要的时间更长,形成更为复杂的多率采样系统,并且在人工采样化验分析时,采样人员的工作失误往往造成采样间隔不均匀,关键数据缺失,形成非均匀采样系统和损失数据系统^[40-41].

文献[42]指出,多率系统可按采样间隔分为均匀和非均匀采样两类.对于均匀采样系统,对所有的采样周期都存在一个最小公倍数,即存在一个最小周期,使得所有采样周期都可以表示为最小周期的整数倍;对于非均匀采样系统,数据在时间轴上分布不均匀,例如对一个变量 x 的采样序列 $\{t_i^x\}$ 有 $t_1^x < t_2^x < \dots < t_n^x$,但不存在周期性,同时系统另一个变量 y , $\{t_i^y\}$ 和 $\{t_i^x\}$ 可以完全不同.非均匀采样较均匀采样更为复杂,是更为一般化的问题.本文如不特别指出,所指系统都是均匀采样的.

本文考虑均匀采样的多率线性离散系统:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= F_k \mathbf{x}(k) + \Gamma_k \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= H_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(k)$ 为状态向量, $\mathbf{y}(k)$ 为观测向量, F 与 H 分别表示状态矩阵和观测矩阵.由于化工过程中,输入变量 \mathbf{u} 的变化频率通常较低,而噪声频率相对较高,因此在系统(1)中,将输入信号与过程噪声统一由 $\mathbf{w}(\cdot)$ 表征.通常假设过程噪声 $\mathbf{w}(\cdot)$ 与观测噪声 $\mathbf{v}(\cdot)$ 均为零均值的服从高斯分布的独立白噪声,方差分别为

$$E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)] = Q(k), \quad E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)] = R(k)$$

由于各种观测数据的采样频率不同,观测向量 \mathbf{y} 的维数随着时间的变化而变化,并呈现出周期性变化的特性.相应的,观测矩阵 H 以及观测噪声方差阵 R 也周期性变化.

假设系统基本采样周期为 T_f , 各种不同观测的采样周期分别为 T_i ($i = 1, 2, \dots, l$), 且 T_i 为 T_f 的整数倍, 即 $T_i = n_i T_f, n_i \in \mathbf{N}$. 令 JT_f 表示各观测

数据的采样周期的最小公倍数, 则观测矩阵 H 以及观测噪声方差阵 R 均以 JT_f 为周期变化, 即

$$H_{k+J} = H_k, \quad R_{k+J} = R_k$$

其中, 在每个周期 JT_f 的不同采样时刻, 由于可获取的观测不同, 矩阵 H 及 R 可能各不相同. 以典型的双率系统为例, 观测矩阵及观测噪声方差阵可表示如下:

$$\begin{aligned} H_k &= \begin{cases} H_{1k}, & k = lJ + i, i = 1, \dots, J-1 \\ \begin{bmatrix} H_{1k} \\ H_{2k} \end{bmatrix}, & k = lJ \end{cases} \\ R_k &= \begin{cases} R_{1k}, & k = lJ + i, i = 1, \dots, J-1 \\ \begin{bmatrix} R_{1k} & 0 \\ 0 & R_{2k} \end{bmatrix}, & k = lJ \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

其中, l 表示正整数, H_{1k} 为快速采样的观测矩阵, H_{2k} 则为慢速采样的观测矩阵. 在不同时刻, 观测矩阵 H 以及噪声方差阵 R 分别由不同观测的矩阵参数构成.

对于规则采样的多率系统, 观测矩阵 H 及噪声方差 R 均为周期矩阵. 当系统矩阵 F_k, Γ_k 也周期性变化(周期不大于 JT_f , 且为 JT_f 的公约数)时, 整个多率采样系统构成周期系统, 周期为 JT_f . 显然, 定常系统是一个典型特例. 对多率周期系统进行 Kalman 滤波, 滤波过程也将具有周期性变化的特点^[43].

2 多率 Kalman 滤波算法

在多率采样系统中, 为了有效地利用各种观测信息, 采用 Kalman 滤波算法进行状态变量的最优/次优估计. 由于 Kalman 滤波算法具有逐步迭代、各时刻滤波操作相对独立的特点, 在不同采样时刻, 观测数据的数目可以各不相同, Kalman 滤波器只需根据观测数据的个数对当前滤波式中的矩阵维数进行变化, 就可以完成基于多采样速率观测的滤波估计. 由于各种观测数据具有多种不同的采样频率, 这一滤波过程常被称为多率 Kalman 滤波.

以系统(1)为真实对象系统, 假设多率 Kalman 滤波模型如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^M(k+1) &= F_k^M \mathbf{x}^M(k) + \Gamma_k^M \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= H_k^M \mathbf{x}^M(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (3)$$

根据滤波器的工作机理, 给出多率 Kalman 滤波算法的离散递推表达式, 如式(4)~(8)所示.

$$\hat{\mathbf{x}}^M(k+1|k) = F_k^M \hat{\mathbf{x}}^M(k|k) \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^M(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}^M(k+1|k) + K(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - H_{k+1}^M \hat{\mathbf{x}}^M(k+1|k)] \quad (5)$$

$$K(k+1) = P^M(k+1|k)(H_{k+1}^M)^T \times [H_{k+1}^M P^M(k+1|k)(H_{k+1}^M)^T + R_{k+1}^M]^{-1} \quad (6)$$

$$P^M(k+1|k) = F_k^M P^M(k|k)(F_k^M)^T + \Gamma_k^M Q_k(\Gamma_k^M)^T \quad (7)$$

$$P^M(k|k) = P^M(k|k-1) - P^M(k|k-1)(H_k^M)^T \times [H_k^M P^M(k|k-1)(H_k^M)^T + R_k^M]^{-1} H_k^M P^M(k|k-1) \quad (8)$$

其中, $K(k+1)$ 表示 Kalman 滤波在第 k 步的增益阵, $\hat{\mathbf{x}}^M(k+1|k)$ 表示 Kalman 一步预测值, $\hat{\mathbf{x}}^M(k+1|k+1)$ 为 Kalman 滤波输出估值. $P^M(k+1|k)$ 和 $P^M(k|k)$ 分别为 Kalman 计算过程的一步预测的误差方差阵和本步估计误差方差阵, 即:

$$P^M(k+1|k) = E \left\{ \left[\mathbf{x}^M(k+1) - \hat{\mathbf{x}}^M(k+1|k) \right] \times \left[\mathbf{x}^M(k+1) - \hat{\mathbf{x}}^M(k+1|k) \right]^T \right\} \quad (9)$$

$$P^M(k|k) = E \left[\mathbf{x}^M(k) - \hat{\mathbf{x}}^M(k|k) \right] \times \left[\mathbf{x}^M(k) - \hat{\mathbf{x}}^M(k|k) \right]^T \quad (10)$$

由递推式可以看出, 多率 Kalman 滤波与普通 Kalman 滤波过程十分相似. 但是, 由于滤波对象的特殊性——多率性, 多率 Kalman 滤波过程中的部分矩阵参数会发生周期性变化. 因而, 对多率滤波过程的讨论不能利用普通滤波的分析结论^[44], 需要根据其特殊性单独分析.

3 多率滤波的鲁棒性分析

在多率 Kalman 滤波算法中, 当被估系统满足周期可控/可观性或可稳/可检性条件时, 滤波器具

有稳定性. 然而, 这一结论是以滤波数学模型与真实对象模型精确一致为前提的. 在滤波模型存在失配情况下, 滤波输出与真实状态存在误差, 滤波的真实稳定性受到影响, 易出现滤波运算稳定收敛, 而实际滤波偏差却逐渐发散的情况. 因此, 要分析多率 Kalman 滤波算法在模型失配情况下的鲁棒性, 需讨论滤波的真实误差变化受模型失配因素的影响.

本文设定多率 Kalman 滤波模型存在加性失配, 即系统 (3) 中状态矩阵有 $F_k^M = F_k + \Delta F$; 而观测矩阵 H 、噪声矩阵 Γ 、过程噪声与观测噪声统计参数 R, Q 均准确无误. 以此为基础, 根据式 (4) ~ (8) 进行多率 Kalman 滤波.

3.1 基本假设

为了便于算法鲁棒性的分析, 首先给出一些基本定义与假设, 后续讨论均以此为基础.

定义 1. 在多率采样系统下, 定义“宽周期” T , 满足:

$$T = \text{lcm}(T_1, T_2, \dots, T_l)$$

其中, $\text{lcm}(\cdot)$ 表示最小公倍数函数; $T_i, i = 1, 2, \dots, l, l \in \mathbf{Z}^+$ 分别代表各种观测的采样周期.

假设 1. 多率采样系统 (1) 中存在且仅存在两种不同的采样频率 f_f 与 f_s , 分别对应采样周期 T_f 与 T_s , 满足:

$$T_s = J T_f, \quad J \in \mathbf{Z}^+$$

其中, T_f 与 T_s 分别表示快速采样和慢速采样的观测数据的采样周期.

系统 (1) 与 (3) 的基本采样周期为 T_f , 系统参数以 T_s 为周期变化, 即:

$$F_{k,\tau} = F_{k+i,\tau} \quad \text{且} \quad \Gamma_{k,\tau} = \Gamma_{k+i,\tau}, \quad i \neq 0$$

$$F_{k,\tau}^M = F_{k+i,\tau}^M \quad \text{且} \quad \Gamma_{k,\tau}^M = \Gamma_{k+i,\tau}^M, \quad i \neq 0$$

在单个宽周期 T 内, 各基本采样时刻的采样情况如下:

$$\mathbf{y}(k) = \begin{cases} \mathbf{y}_f(k), & k = 1, 2, \dots, J-1 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{y}_f(k) \\ \mathbf{y}_s(k) \end{bmatrix}, & k = J \end{cases}$$

对应

$$H_k = \begin{cases} H_{fk}, & k = 1, 2, \dots, J-1 \\ \begin{bmatrix} H_{fk} \\ H_{ok} \end{bmatrix}, & k = J \end{cases}$$

$$R_k = \begin{cases} R_{fk}, & k = 1, 2, \dots, J-1 \\ \begin{bmatrix} R_{fk} & 0 \\ 0 & R_{ok} \end{bmatrix}, & k = J \end{cases}$$

且

$$R_{fk} \gg R_{ok}$$

其中, \mathbf{y}_f 与 \mathbf{y}_s 分别表示快速观测数据与慢速观测数据; H_{fk} 与 H_{ok} 分别为快速观测和慢速观测数据的观测矩阵; R_{fk} 与 R_{ok} 分别为快速观测和慢速观测的观测噪声方差阵.

注 1.

1) 在假设 1 下, 双率采样系统 (1) 的宽周期 $T = T_s$;

2) 系统 (1) 与 (3) 均为周期系统, 周期为 T ;

3) 将第 k 个宽周期内的各采样时刻 τT_f ($\tau = 1, 2, \dots, J$) 分别用符号 (k, τ) ($\tau = 1, 2, \dots, J$) 表示, 则单个宽周期内的各时刻的数据采样情况可由图 1 表示. 由于系统的周期特性, 在各不同宽周期内, 观测数据的采样均服从图 1 所示的变化规律.

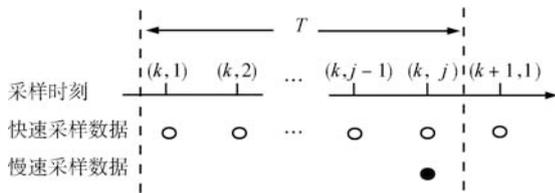


图 1 双率系统的观测数据采样示意图

Fig. 1 Sketch of data observation in bio-rate sampling system

假设 2. 基于模型 (3) 对系统 (1) 进行多率 Kalman 滤波, 滤波运算过程具有稳定性并已进入滤波运算稳态.

运算误差方差阵 $P^M(k|k)$ 及增益阵 $K(k)$ 分别有稳定周期解 $P_s^{M+}(\tau)$ 与 $K_s(\tau)$, 即:

$$\begin{cases} P^M[(k, \tau)|(k, \tau)] = \\ P^M[(k+i, \tau)|(k+i, \tau)] = P_s^{M+}(\tau) \\ K_s(k, \tau) = K_s(k+i, \tau) = K_s(\tau), \\ i \neq 0 \end{cases}$$

且满足:

$$P_s^{M+}(\tau) = \begin{cases} P_{sf}^{M+}(\tau), & \tau = 1, \dots, J-1 \\ P_{ss}^{M+}, & \tau = J \end{cases}$$

$$K_s(\tau) = \begin{cases} K_{sf}(\tau), & \tau = 1, \dots, J-1 \\ K_{ss}, & \tau = J \end{cases}$$

假设 3. 在假设 2 下, 对慢采样时刻的观测与滤波进行如下假设:

1) 在任意慢采样时刻 (k, J) ($k \in \mathbf{Z}^+$, $J < \infty$), 对于给定的任意实数 $\varepsilon > 0$ 以及对应的实数 $\delta(\varepsilon) > 0$, 存在慢速观测数据 $\mathbf{y}_s(k, J)$ 满足不等式:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{\mathbf{y}_s(k, J) - H_{sk,J}\mathbf{x}(k, J)\} \times \\ & \|\mathbf{y}_s(k, J) - H_{sk,J}\mathbf{x}(k, J)\|^T\} < \delta I \end{aligned}$$

使得多率滤波估值满足:

$$\left\| \mathbf{E}\{\hat{\mathbf{x}}^M[(k, J)|(k, J)]\} - \mathbf{E}[\mathbf{x}(k, J)] \right\| < \varepsilon$$

2) 存在一个慢采样时刻 $(k-1, J)$ ($k \in \mathbf{Z}^+$, $|J| < \infty$), 使得此时的滤波估值满足

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{E}\{\hat{\mathbf{x}}^M[(k-1, J)|(k-1, J)]\} - \right. \\ & \left. \mathbf{E}[\mathbf{x}(k-1, J)] \right\| = 0 \end{aligned}$$

3.2 滤波误差分析

在上述假设条件下, 分析在不同模型失配情况下的多率滤波误差的变化规律, 进而为滤波过程的鲁棒性判断提供依据.

根据滤波的特点, 本文选取滤波估值与真实状态的误差相对于真实状态值的比例, 作为衡量滤波误差情况的参数, 简称“滤波偏差比”. 由于滤波模型失配, 运算得到的 $\hat{\mathbf{x}}^M(k|k)$ 并非真实状态 $\mathbf{x}(k)$ 的估值, 故运算误差方差阵 $P^M(k|k)$ 不能用于衡量滤波过程的稳定/发散情况. 又在实际过程中, 滤波误差的大小受到状态 $\mathbf{x}(k)$ 的影响, 其自身的数值不能完全表征滤波估值偏离真实状态的程度. 因此, 考虑到上述因素, 本文采用滤波偏差比表征滤波的实际偏差情况.

令滤波估计误差 $\tilde{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}^M(k|k)$, 预测误差 $\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}^M(k|k-1)$, 将递推式 (3) ~ (5) 代入 $\tilde{\mathbf{x}}(k|k)$, 可得:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k|k) &= \mathbf{x}(k) - \left\{ \hat{\mathbf{x}}^M(k|k-1) + \right. \\ & \left. K(k) [\mathbf{y}(k) - H_k^M \hat{\mathbf{x}}^M(k|k-1)] \right\} = \\ & [I - K(k)H_k^M] \tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) - K(k)\mathbf{v}(k) = \\ & [I - K(k)H_k^M] [F_{k-1}^M \tilde{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \\ & \Delta F_{k-1} \mathbf{x}(k-1) + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}(k-1)] - K(k)\mathbf{v}(k) \end{aligned}$$

令 $A_k^* = [I - K(k)H_k]$, 则估值误差表达式为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k|k) &= A_k^* [F_{k-1}^M \tilde{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \\ &\quad \Delta F_{k-1} \mathbf{x}(k-1) + \Gamma_{k-1}^M \mathbf{w}(k-1)] - \\ &\quad K(k) \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (11)$$

同理可得:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) &= F_{k-1}^M \tilde{\mathbf{x}}(k-1|k-1) - \\ &\quad \Delta F_{k-1} \mathbf{x}(k-1) + \Gamma_{k-1}^M \mathbf{w}(k-1) \end{aligned} \quad (12)$$

根据假设 3 中第 2) 步, 在第 $k-1$ 个宽周期的慢采样时刻, 观测数据足够精确, 使得:

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{\mathbf{x}}^M[(k-1, J) | (k-1, J)] \right\} = \mathbb{E}[\mathbf{x}(k-1, J)]$$

故在第 k 个宽周期的起始时刻, 有:

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{\mathbf{x}}^M[(k, 0) | (k, 0)] \right\} = \mathbb{E}[\mathbf{x}(k, 0)]$$

即估值误差均值满足 $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}(k, 0)] = 0$. 以此为基础, 第 k 个宽周期内的滤波偏差比 $\frac{\|\mathbb{E}[\mathbf{e}(k, \tau)]\|}{\|\mathbb{E}[\mathbf{x}(k, \tau)]\|}$ 的推导如下.

令

$$\mathbf{e}(k, i) = \tilde{\mathbf{x}}[(k, i) | (k, i)],$$

$$i = 1, \dots, J-1, J$$

将式 (1) 和式 (3) 代入式 (11), 迭代递推可得:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{e}(k, \tau)] &= A^*(k, \tau) F_{k, \tau-1}^M \mathbb{E}[\mathbf{e}(k, \tau-1)] - \\ &\quad A^*(k, \tau) \Delta F_{k, \tau-1} \mathbb{E}[\mathbf{x}(k, \tau-1)] = \\ &\quad A^*(k, \tau) F_{k-1}^M \left\{ A^*(k, \tau-1) F_{k, \tau-2}^M \mathbb{E}[\mathbf{e}(k, \tau-2)] - \right. \\ &\quad \left. A^*(k, \tau-1) \Delta F_{k, \tau-2} \mathbb{E}[\mathbf{x}(k, \tau-2)] \right\} - \\ &\quad A^*(k, \tau) \Delta F_{k, \tau-1} \mathbb{E}[\mathbf{x}(k, \tau-1)] = \\ &\quad \left[\prod_{i=0}^{\tau-1} (A^*(k, \tau-i) F_{k, \tau-i-1}^M) \right] \mathbb{E}[\mathbf{e}(k, 0)] - \\ &\quad \sum_{i=0}^{\tau-1} \left\{ \prod_{j=0}^{\tau-i-2} (A^*(k, \tau-j) F_{k, \tau-j-1}^M) \times \right. \\ &\quad \left. A^*(k, i+1) \Delta F_{k, i} \mathbb{E}[\mathbf{x}(k, i)] \right\} \end{aligned}$$

又 $\mathbb{E}[\mathbf{e}(k, 0)] = 0$, 上式化简为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{e}(k, \tau)] &= \\ &\quad - \left\{ \sum_{i=0}^{\tau-1} \left[\left(\prod_{j=0}^{\tau-i-2} (A^*(k, \tau-j) F_{k, \tau-j-1}^M) \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. A^*(k, i+1) \Delta F_{k, i} \left(\prod_{l=\tau-i-1}^{\tau} F_{k, \tau-l} \right) \right] \right\} \mathbb{E}[\mathbf{x}(k, 0)] \end{aligned} \quad (13)$$

由式 (1) 推导可知:

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}(k, \tau)] = \left(\prod_{i=1}^{\tau} F_{k, \tau-i} \right) \mathbb{E}[\mathbf{x}(k, 0)] \quad (14)$$

故在第 k 个宽周期内, 各采样时刻的滤波偏差比的表达式为式 (15) (见本页底部).

式 (15) 中, $A^*(k, i) = I - K(k, i) H_{k, i}$, 表征滤波运算对于滤波模型的信任程度. 根据假设 2, 滤波运算已进入稳态, 式 (15) 中 $A^*(k, i)$ 采用稳态值 $A^*(i)$, 在快采样时刻与慢采样时刻具有不同的表达式:

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbb{E}[\mathbf{e}(k, \tau)]\|}{\|\mathbb{E}[\mathbf{x}(k, \tau)]\|} &= \\ &\quad \frac{\left\| \left\{ \sum_{i=0}^{\tau-1} \left[\left(\prod_{j=0}^{\tau-i-2} (A^*(k, \tau-j) F_{k, \tau-j-1}^M) \right) A^*(k, i+1) \Delta F_{k, i} \left(\prod_{l=\tau-i-1}^{\tau} F_{k, \tau-l} \right) \right] \right\} \mathbb{E}[\mathbf{x}(k, 0)] \right\|}{\left\| \left(\prod_{i=1}^{\tau} F_{k, \tau-i} \right) \mathbb{E}[\mathbf{x}(k, 0)] \right\|}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tau = 1, 2, \dots, J$$

$$A^*(i) = \begin{cases} A_{sf}^*(i) = I - K_{sf}(i)H_{k,i}, & i = 1, \dots, J-1 \\ A_{ss}^* = I - K_{ss}H_s, & i = J \end{cases} \quad (16)$$

3.3 滤波稳定与发散的基本判定方法

由于模型失配, 多率 Kalman 滤波的估计结果与真值存在不同程度的误差. 误差可能稳定有界, 也可能趋于无穷大. 滤波误差趋于无穷大意味着滤波失去稳定性, 滤波过程必然发散. 然而, 滤波误差稳定有界也不能保证滤波结果的可靠性. 在实际应用中, 当滤波偏差较大时, 滤波估值很可能已失去了原有作用, 与滤波误差向无穷大发散时的输出一样, 难以用于实际应用. 因而, 将这种情况也称为滤波发散. 为了区分两种类型的发散, 定义如下:

1) 真发散: 滤波误差随着时间的增长而趋向于无穷大, 滤波过程失去稳定性;

2) 应用发散: 滤波误差趋向于有界的稳态值, 但已经超出最大的误差允许范围, 使得滤波结果难以应用于实际过程.

当滤波误差不存在上述两类发散现象时, 可认定滤波过程稳定, 滤波输出估值可靠.

根据第 3.2 节对第 k 个宽周期内的多率滤波偏差比式的推导, 可得到任意采样时刻的滤波偏差比值. 通过对滤波偏差比大小及变化趋势的判断, 即能确定滤波过程的稳定或发散情况. 下面给出多率 Kalman 滤波稳定与发散的基本判定步骤:

1) 确定滤波 F_k^M 、对象模型 F_k 以及滤波初始状态 $E[\mathbf{x}(k, 0)]$;

2) 求解参数 A^* 的稳态周期解 $A^*(\tau)$;

3) 根据式 (15) 求解各宽周期内的不同采样时刻的滤波偏差比;

4) 判断整个滤波过程中滤波偏差比是否有界. 若有界, 转入 5); 否则, 判定滤波过程“真发散”;

5) 根据对滤波估计误差允许范围的限定, 判断滤波偏差比的上界是否超限. 若在允许范围内, 则判定滤波稳定, 输出可靠; 否则, 判定滤波过程“应用发散”.

在上述步骤中, 参数 $A^*(\tau)$ 是确定滤波偏差比的关键, 下面给出它的求解方法.

由式 (6) ~ (8) 的变换形式可知:

$$(P^M(k|k))^{-1} = (P^M(k|k-1))^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \quad (17)$$

将式 (7) 代入上式, 则:

$$(P^M(k|k))^{-1} = (F_{k-1}^M P(k-1|k-1) (F_{k-1}^M)^T + (\Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^T))^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \quad (18)$$

在假设 2 条件下, 滤波运算稳定时, 运算误差方差阵 $P^M(k|k)$ 及预测误差方差阵 $P^M(k|k-1)$ 均具有稳定周期解, 分别表示为 $P_s^{M+}(\tau)$ 与 $P_s^{M-}(\tau)$. 式 (18) 可改写为如下形式:

$$(P_s^{M+}(\tau))^{-1} = (F_{\tau-1}^M P_s^{M+}(\tau) F_{\tau-1}^{M^T} + \Gamma_{\tau-1} Q_{\tau-1} \Gamma_{\tau-1}^T)^{-1} + H_{\tau}^T R_{\tau}^{-1} H_{\tau}, \quad \tau = 1, 2, \dots, J \quad (19)$$

由式 (19), 通过求解矩阵等式, 可得 $P_s^{M+}(\tau)$. 进而, 根据式 (7) 可进一步求得 $P_s^{M-}(\tau)$.

同样, 由式 (8) 的变换, $P_s^{M+}(\tau)$ 与 $P_s^{M-}(\tau)$ 之间有如下关系:

$$P_s^{M+}(\tau) = [I - K_{\tau} H_{\tau}] P_s^{M-}(\tau) \quad (20)$$

而根据前文已知, 滤波运算周期稳定, A^* 具有周期解 $A^*(\tau) = I - K_{\tau} H_{\tau}$, 可得:

$$P_s^{M+}(\tau) = A^*(\tau) P_s^{M-}(\tau) \quad (21)$$

将式 (19) 求解的 $P_s^{M+}(\tau)$ 及 $P_s^{M-}(\tau)$ 代入式 (21), 即可得周期稳态值 $A^*(\tau)$. 由此, 参数 A^* 在各采样时刻的取值均可确定.

利用上述方法求得的 A^* , 根据式 (15), 即可确定在各宽周期内的不同采样时刻的滤波偏差比值的大小. 通过对滤波偏差比变化规律的分析, 就得到了在特定的模型失配下的多率 Kalman 滤波的稳定与发散情况, 进而可以明确模型失配等因素对滤波算法鲁棒性的影响.

3.4 典型系统的滤波稳定与发散分析

针对应用中的一类典型系统, 具体分析滤波误差的变化规律, 并给出明确的滤波稳定与发散的判定定理.

定义典型系统如下:

1) 被估状态变量的数目为 1, 即对象系统为一阶系统;

2) 研究对象为定常系统, 模型参数 F^M , F , H 以及噪声统计参数 R , Q 等均采用确定常值.

在实际应用中, 由于化工过程中各种被估的关键质量变量的变化机理各不相同, 往往需要独立分析和计算, 因而被估状态变量的数目可以设置为 1, 对不同的变量分别进行状态估计. 此外, 由于化工动态比较缓慢, 在一定的时间内, 可以将对象视为局部线性的定常系统. 因此, 将被研究系统作上述简化不失一般性.

在上述典型系统下, 对滤波偏差比的计算式 (15) 化简并整理, 满足 $E[\mathbf{x}(k, 0)] \neq 0$ 时, 式 (15) 转化为如下形式:

$$\left| \frac{\mathbf{E}[\mathbf{e}(k, \tau)]}{\mathbf{E}[\mathbf{x}(k, \tau)]} \right| = \begin{cases} \left| \sum_{i=1}^{\tau} \left[(A_{sf}^*)^{\tau-i+1} \Delta F (F^M)^{\tau-i} F^{i-\tau-1} \right] \right|, & \tau = 1, 2, \dots, J-1 \\ (A_{ss}^* F^M F^{-1}) \sum_{i=1}^{\tau-1} \left[(A_{sf}^*)^{\tau-i} \Delta F (F^M)^{\tau-i-1} F^{i-\tau} \right] + A_{ss}^* \Delta F F^{-1}, & \tau = J \end{cases} \quad (22)$$

令

$$\xi(\tau) = \left| \frac{\mathbf{E}[\mathbf{e}(k, \tau)]}{\mathbf{E}[\mathbf{x}(k, \tau)]} \right|$$

$$D_f = \frac{A_{sf}^* F^M}{F}$$

式 (22) 改写为下式:

$$\xi(\tau) = \begin{cases} \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \left| \sum_{i=0}^{\tau-1} D_f^i \right|, & \tau = 1, 2, \dots, J-1 \\ \left| \frac{A_{ss}^* F^M}{F} \left[\frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \left(\sum_{i=0}^{\tau-2} D_f^i \right) \right] + \frac{A_{ss}^* \Delta F}{F} \right|, & \tau = J \end{cases} \quad (23)$$

根据式 (23), 对第 k 个宽周期内的滤波偏差比 $\xi(\tau)$ 的变化规律进行分析, 得到如下结论.

定理 1. 若假设 1~3 成立, $\Delta F = 0$ ($F \neq 0, F^M \neq 0$), 则基于模型 (3) 的多率 Kalman 滤波偏差比满足:

$$\xi(k, \tau) \equiv 0, \quad \tau = 1, 2, \dots, J, \forall k \in \mathbf{N}$$

定理 2. 若假设 1~3 成立, $\Delta F \neq 0$ ($F \neq 0, F^M \neq 0$), 则在第 k 个宽周期的快采样区间 M (定义集合 $M: [1, J-1]$), 基于滤波模型 (2) 的多率 Kalman 滤波的偏差比 $\xi(\tau)$ ($\tau \in M$) 随时间的变化规律如下:

1) 当 $D_f > 0$ 或 $D_f < -2$ 时, $\xi(\tau)$ 满足:

a) 若 $\tau_1, \tau_2 \in M$ 且 $\tau_1 > \tau_2$, 则:

$$\xi(\tau_1) > \xi(\tau_2) > 0$$

b) $\max[\xi(\tau)] = \xi(J-1) =$

$$\left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \left| \sum_{i=0}^{J-2} \left(\frac{A_{sf}^* F^M}{F} \right)^i \right|, \quad \tau \in M$$

c) $\lim_{J \rightarrow \infty} \xi(\tau) =$

$$\begin{cases} \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \frac{1}{|1 - D_f|}, & D_f \in (0, 1) \\ \infty, & D_f \in (-\infty, -2) \cup [1, \infty) \end{cases}, \quad \tau \rightarrow J$$

2) 当 $-1 < D_f < 0$ 时, $\xi(\tau)$ 满足:

a)

$$\begin{cases} \xi(2k) < \xi(2k+1) < \xi(2k-1) \\ \xi(2k) < \xi(2k+2) < \xi(2k+1) \end{cases},$$

$\forall k \in \mathbf{N}$ 且 $2k, 2k \pm 1, 2k + 2 \in M$.

b)

$$\max[\xi(\tau)] = \xi(1) = \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right|, \quad \tau \in M$$

c)

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \xi(\tau) = \xi_{cs} = \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \frac{1}{|1 - D_f|}, \quad \tau \rightarrow J$$

3) 当 $-2 < D_f < -1$ 时, $\xi(\tau)$ 满足:

a) $\exists \tau_0$ ($\tau_0 \in \mathbf{Z}^+$), 对于 $\forall \tau \in M, \forall k \in \mathbf{N}$, 当 $2k + 3 < \tau_0$ 且 $2k + 2 < J$, 有:

$$\begin{cases} \xi(2k+1) > \xi(2k) & \xi(2k+1) > \xi(2k-1) \\ \xi(2k) < \xi(2k+2) & \xi(2k+2) < \xi(2k+1) \end{cases}$$

当 $\tau \geq 2k + 3$, 有:

$$\xi(\tau) > \xi(\tau-1)$$

b)

$$\max[\xi(\tau)] = \begin{cases} \xi(l), & J \leq \tau_0 \\ \xi(J-1), & J > \tau_0 \end{cases}, \quad \tau \in M$$

其中, $l = 2 \text{round}(\frac{J}{2}) - 1$, $\text{round}(\cdot)$ 表示向下取整.

c) $\lim_{J \rightarrow \infty} \xi(\tau) = \infty, \tau \rightarrow J$

4) 当 $D_f = 0$ 时, 若 $F^M \neq 0$, 则:

$$\xi(\tau) \equiv 0, \quad \tau \in M$$

5) 当 $D_f = -1$ 时, $\xi(\tau)$ 满足:

a)

$$\begin{cases} \xi(2k) = 0 \\ \xi(2k+1) = a_0 \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbf{N}$, 且 $2k, 2k+1 \in M$. 其中, 常数

$$a_0 = \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| > 0$$

b) $\max[\xi(\tau)] = a_0, \tau \in M$

6) 当 $D_f = -2$ 时, $\xi(\tau)$ 满足:

a) $\xi(1) = \xi(2) > 0$;

b) 若 $\tau_1, \tau_2 \in [2, J-1]$ 且 $\tau_1 > \tau_2$, 则 $\xi(\tau_1) > \xi(\tau_2) > 0$;

$$c) \max [\xi(\tau)] = \xi(J - 1) = \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \times \left| \sum_{i=0}^{J-2} \left(\frac{A_{sf}^* F^M}{F} \right)^i \right|, \quad \tau \in M;$$

$$d) \lim_{J \rightarrow \infty} \xi(\tau) = \infty, \tau \rightarrow J.$$

证明. 根据式 (23), 在第 k 个宽周期内, 快采样区间的滤波偏差比 $\xi(\tau)$ 为

$$\xi(\tau) = \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \left| \sum_{i=0}^{\tau-1} D_f^i \right|, \quad \tau = 1, 2, \dots, J - 1$$

当参数 D_f 取值范围不同时, $\xi(\tau)$ 随自变量 τ 的变化趋势也有所不同. 采用数学归纳法分别对 D_f 在不同区间的 $\xi(\tau)$ 的变化特性进行证明. 具体证明过程参见附录 A. \square

定理 3. 若假设 1 ~ 3 成立, $\Delta F \neq 0$ ($F \neq 0, F^M \neq 0$), 则在第 k 个宽周期的慢采样时刻 $\tau = J$, 基于滤波模型 (3) 的多率 Kalman 滤波有如下特点:

- 1) 参数 A^* 的稳态解满足: $A_{ss}^* < A_{sf}^*$;
- 2) 存在 $y_s(k, J)$, 满足 $R_0 < \delta_0$, 使得 $\xi(J) < \xi(\tau)$, $\tau = 1, 2, \dots, J - 1$, 其中, $\delta_0 > 0$ 为一个确定的实数;
- 3) 当 $R_0 \rightarrow 0$, 有 $\xi(J) \rightarrow 0$.

证明. 在慢采样时刻, 可同时获取慢速观测数据和快速观测数据共同滤波, 观测矩阵与观测噪声方差阵 R_s 维数变化, 导致 A^* 与 $\xi(J)$ 均发生突变. 具体证明步骤见附录 A. \square

注 2. 由定理 2 已知, 在多率滤波过程的快采样时刻, 受到模型失配的影响, 滤波偏差比随着滤波进行并有规律地变化. 当到达慢采样时刻, 由于采集了多种观测数据, 滤波对于模型的依赖度随之降低, 此时参数 A^* 会突然骤减, 使慢采样时刻的滤波偏差比小于快采样时刻的偏差比. 且慢采样观测中的噪声越小, 即 R_0 越小, 慢采样数据对于滤波偏差的校正作用越明显. 因此, 在慢采样点, 若能保证观测数据的精度, 则滤波误差必然趋近于零. 这一直观结论与定理 3 相符, 同时从侧面验证了假设 3 的合理性.

定理 4. 若假设 1 ~ 3 成立, $F \neq 0, F^M \neq 0$, 且对于任意慢采样时刻 (k, J) ($k \in \mathbf{Z}^+, J < \infty$), 观测 $\mathbf{y}_s(k)$ 均满足:

$$R_0 < \delta_0$$

其中, $\delta_0 > 0$ 为一个确定的极小的实数. 则在整个滤波稳定运算过程中, 有:

- 1) 基于模型 (3) 的多率 Kalman 滤波具有周期性, 周期为 T ;
- 2) 滤波偏差比 $\xi(\tau)$ 具有周期性, 周期为 T , 即

$$\xi(\tau) = \xi(k, \tau) = \xi(k + i, \tau),$$

$$\forall k, i \in \mathbf{N}, \tau = 1, 2, \dots, J$$

且各宽周期内 $\xi(\tau)$ 的变化规律服从定理 1 ~ 3 给定规律.

注 3. 根据假设 1 ~ 3 及定理 3 易知, 在慢采样时刻存在足够精确的观测数据的情况下, 滤波偏差比 $\xi(\tau)$ 在整个滤波时域中具有周期性, 且服从定理 1 ~ 3 中给定的变化规律. 结合假设 1, 显然多率滤波过程也具有周期性. 证明略.

定理 1 ~ 4 给出了多率 Kalman 滤波在整个滤波过程中滤波偏差比 $\xi(\tau)$ 的变化规律. 已知 $\xi(\tau)$ 为非负数, 通过分析其上界即可对滤波过程的稳定与发散情况进行判断. 下面给出多率 Kalman 滤波过程的稳定与发散判定定理.

定理 5. 若假设 1 ~ 3 成立, F^M ($F^M \neq 0$), F ($F \neq 0$), ΔF ($\Delta F \neq 0$) 及 A^* 有界, 多率 Kalman 滤波偏差比的允许上界为 δ_0 ($\delta_0 > 0$), 则:

- 1) 当 $D_f \in [-1, 0)$, 若

$$\left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \leq \delta_0$$

则多率 Kalman 滤波周期稳定, 不发散; 反之, 滤波过程“应用发散”.

- 2) 当 $D_f \in (0, 1)$

a) 若

$$\left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \frac{F}{F - A_{sf}^* F^M} \leq \delta_0$$

则多率 Kalman 滤波周期稳定, 不发散;

b) 若

$$\left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \frac{F}{F - A_{sf}^* F^M} > \delta_0$$

则当

$$\left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \left| \sum_{i=0}^{J-2} \left(\frac{A_{sf}^* F^M}{F} \right)^i \right| \leq \delta_0$$

且 J 有限时, 多率 Kalman 滤波周期稳定, 不发散; 否则, 滤波过程“应用发散”.

- 3) 当 $D_f \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$ 且 J 有限, 若满足:

$$\max [\xi(\tau)] \leq \delta_0, \quad \tau = 1, 2, \dots, J$$

则多率 Kalman 滤波周期稳定, 不发散. 否则, 滤波过程“应用发散”.

定理 6. 若假设 1 ~ 3 成立,

$$D_f \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty),$$

$$F^M \neq 0, F \neq 0$$

则当 $J \rightarrow \infty$ 时, 多率 Kalman 滤波过程“真发散”.

定理 5 和定理 6 提出了在各种不同情况下针对典型系统的多率 Kalman 滤波的稳定与发散判据.

这些结论有助于判定滤波过程的稳定性并适当地选取滤波参数, 使多率滤波器在确定的误差范围内良好地工作. 同时, 对于其他非典型的多率系统, 若可以转化为这类典型系统的形式, 上述结论同样具有参考价值.

4 仿真验证与应用

4.1 仿真验证

下面采用仿真实验的方式对前文给出的各定理进行验证.

考虑如下典型系统, 一个双率采样的定常系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k) + w(k) \\ y(k) &= Hx(k) + v(k) \end{aligned} \quad (24)$$

其中, 观测矩阵

$$H = \begin{cases} 1, & k = lJ + i, \quad i = 1, \dots, J-1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, & k = lJ \end{cases}$$

其余模型参数待定. 滤波模型采用模型 (3) 的形式, 状态矩阵 $F^M = F + \Delta F$.

1) 构造滤波参数, 对定理 1 ~ 4 进行验证.

在 $R_f = 0.01$, $Q = 0.0001$ 下, 选取不同组合的参数进行多率 Kalman 滤波. 滤波参数的选取有两方面考虑: 保证参数 D_f 值分别位于滤波偏差比变化趋势不同的各区间内, 考察各种情况下的实际偏差情况; 同时, 确保假设 1 ~ 3 成立, 便于真实滤波结果与理论分析的对比.

在表 1 所示的各组合滤波参数下, 分别进行双率 Kalman 滤波. 实际滤波结果与理论分析对比情况如下.

表 1 仿真滤波参数配置

Table 1 Filter parameter setting during simulation

参数组合条件	F	F^M	R_0	J
$\Delta F = 0$	0.8	0.8	10^{-4}	10
$\Delta F \neq 0$	—	—	—	—
$0 < D_f < 1$	0.98	0.3	10^{-5}	10
$D_f \geq 1$	0.76	0.8	10^{-5}	10
$-2 < D_f < -1$	0.6	-0.8	10^{-6}	10
$D_f \leq -2$	0.3	-0.8	10^{-7}	5
$D_f = -1$	0.78	-0.8	10^{-5}	10
$-1 < D_f < 0$	0.9	-0.3	10^{-5}	10

当 $\Delta F = 0$ 时, 观测到滤波过程的实际偏差比始终保持为趋于零的极小值, 这与定理 1 中理论分析的零值是基本一致, 定理 1 结论得到验证.

当 $\Delta F \neq 0$ 时, 各种不同 D_f 取值范围下的实际滤波偏差比变化情况由图 2 给出. 将图中的实际滤波结果与定理 2 和定理 3 的结论对比可知: 在单个宽周期的快采样区间, 滤波偏差比确实按照定理 2 指出的变化规律变化; 同时, 在慢采样点, 滤波偏差比迅速减小, 与定理 3 结论一致. 此外, 由图 2 也可以看出, 在滤波运算进入稳定后 (图中即为从第二个宽周期开始), 滤波偏差比呈现周期性的变化, 相应滤波过程也具有周期性, 故定理 4 得到验证. 进一步, 对定理 2 和定理 3 中的滤波偏差比计算式进行验证. 单个宽周期内, 实际的滤波偏差比 $\xi(\tau)$ 与理论计算值的对比如图 3 所示. 可见, 由推导得到的滤波偏差比公式计算得到的偏差值与实际偏差基本一致.

2) 利用表 1 中的滤波参数组合, 分析各种情况下滤波偏差比的最大值随参数 J 的变化情况, 验证滤波发散判定定理 5 和定理 6.

由于滤波方程中存在随机变量, 因此在每一组参数 J 下, 均进行 100 次 Monte Carlo 实验统计运算结果. 滤波偏差比 $\xi(\tau)$ 的最大值 $\Omega(J, A^*, \Delta F, F, F^M)$ 随着参数 J 的变化如图 4 所示. 由于 $D_f \in [1, \infty)$ 时, Ω 的变化情况与 $[-\infty, -2)$ 十分相似, 此处不再重复给出.

由图 4 可知, 仿真结论与前文分析一致. 当 $D_f \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$, 随着 J 增大, 偏差上界逐渐增大, 趋向于无穷; 当 $D_f \in (0, 1)$, 随着 J 的增大, 尽管滤波偏差比递增, 但存在确定、有限的上界; 当 $D_f \in [-1, 0)$, 滤波偏差比恒有界, 且其上界不随参数 J 变化.

由于定理 5 和定理 6 是基于定理 2 和定理 3 得到的关于滤波发散的判定性结论, 通过上述各种验证可知, 定理 5 和定理 6 成立. 由图 4 也可看出, 在实际应用中, 当对于滤波偏差上限有所限制时, 在不同 D_f 取值下, 对于参数 J 的要求是不同的, 可以通过上界限制求得 J 的取值上限, 确保滤波过程稳定, 估值的精度满足实际需求.

4.2 仿真应用

通过仿真实例, 对本文提出的滤波稳定与发散判据在化工软测量输出融合过程^[19-20]中的一类典型应用进行说明.

考虑系统 (24), 给定模型参数以及噪声相关参数: $F = 0.9$, $F^M = 0.7$, $R_f = 0.01$, $Q = 0.0001$, $R_0 = 0.00001$.

滤波误差允许上限 $\delta_0 \leq 0.87$, 快慢观测的采样周期比 $J \geq 8$, 且 J 只能取正整数.

在上述参数下, 进行多率 Kalman 滤波, 估计 x 的状态值. 要求在保证滤波不发散的同时, 求解使得代价函数 $C(\delta_0, J)$ 最小的滤波参数 J 与 δ_0 . 代价函

数的计算式如下:

$$C(\delta_0, J) = \sum \left[w_0 \delta_0 + \frac{w_1}{J} \right]$$

其中, 代价系数 $w_0 = 1$, $w_1 = 10$, 表示在正常取值范围下, 参数 J 所占比重稍大于 δ_0 .

这一优化求解问题体现了化工过程中一种典型的参数选取问题. 在多率滤波过程中, 随着参数 J 的减小, 慢采样数据的观测频率提高, 滤波偏差比变化幅度减小, 滤波估值越容易满足的应用需求. 因此, 为了保证滤波稳定, 提高滤波估计的可靠性, 应当尽量选取较小的 J . 然而, 在实际应用中, 受到技术、资金或环境等因素的限制, 慢速观测的采样频率往往不能随意地大幅度提升, 且 J 不能低于一定的限值. 滤波估值可靠性的提高与参数 J 的选取是存在矛盾的. 因此, 在实际的滤波参数选取过程中, 通常需要对 δ_0 和 J 进行权衡, 要求在提高输出可靠性的

同时, 尽可能控制对技术、资金等各种资源的需求, 即表征为代价函数 $C(\delta_0, J)$ 的最小化.

对上述优化问题进行求解, 首先需明确当前模型失配以及滤波偏差比变化情况.

根据第 3.3 节的参数求解方法, 可得运算误差方差阵与预测误差方差阵的稳态解 $P_{sf}^{M+}(\tau)$ 与 $P_{sf}^{M-}(\tau)$, 有:

$$P_{sf}^{M+} = 0.00018894$$

$$P_{sf}^{M-} = 0.00019258$$

代入

$$P_{sf}^{M+} = A_{sf}^* P_{sf}^{M-}$$

有 $A_{sf}^* = 0.98111$, 进而可得 $D_f = 0.7631$. 可知, D_f 属于 $(0, 1)$ 区间, 双率滤波后的滤波偏差比存在确定、有限的上界.

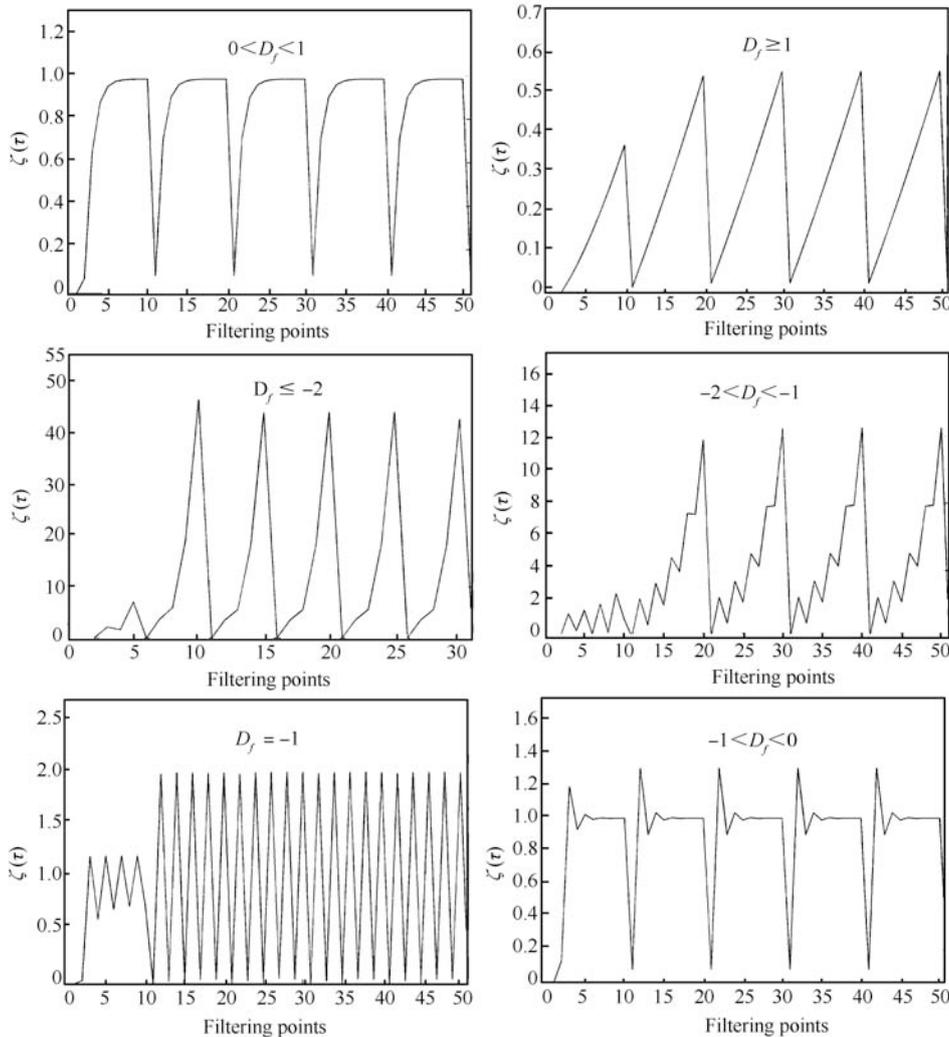


图 2 $\Delta F \neq 0$ 情况下的实际滤波偏差比变化趋势

Fig. 2 Trends of practical filtering error ratio under $\Delta F \neq 0$

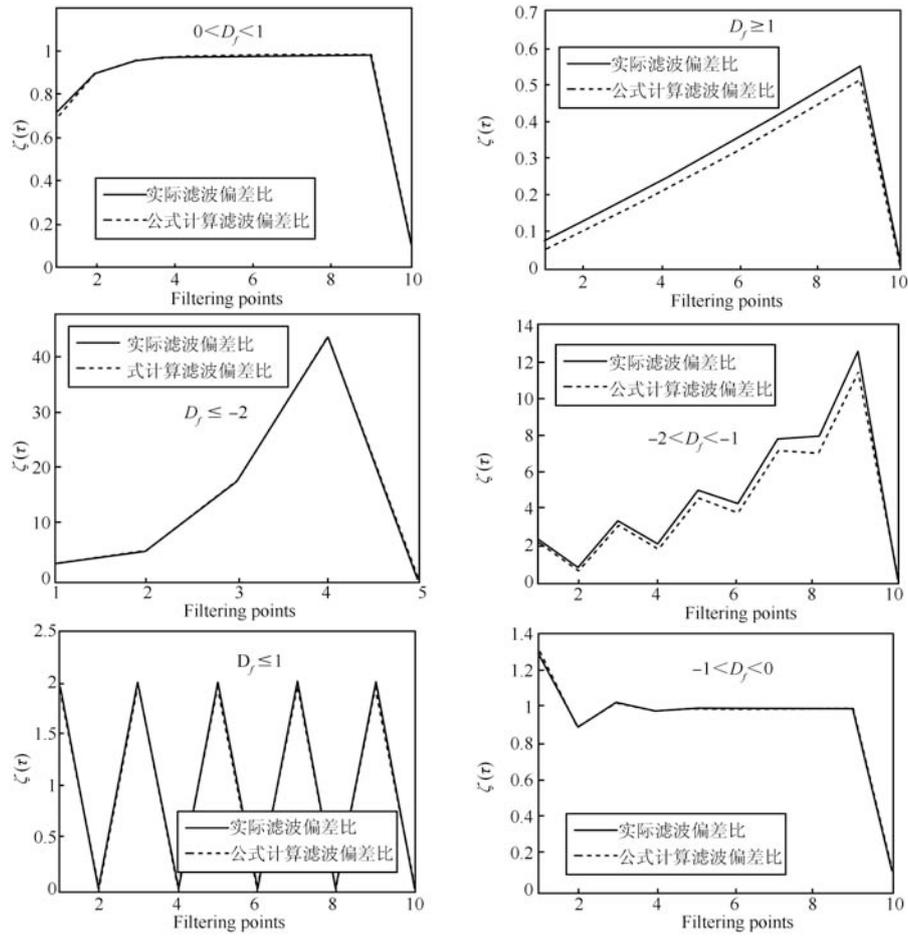


图 3 单个宽周期内滤波偏差比实际值与计算值对比

Fig. 3 Comparison of practical and calculation error values in a single wide-period

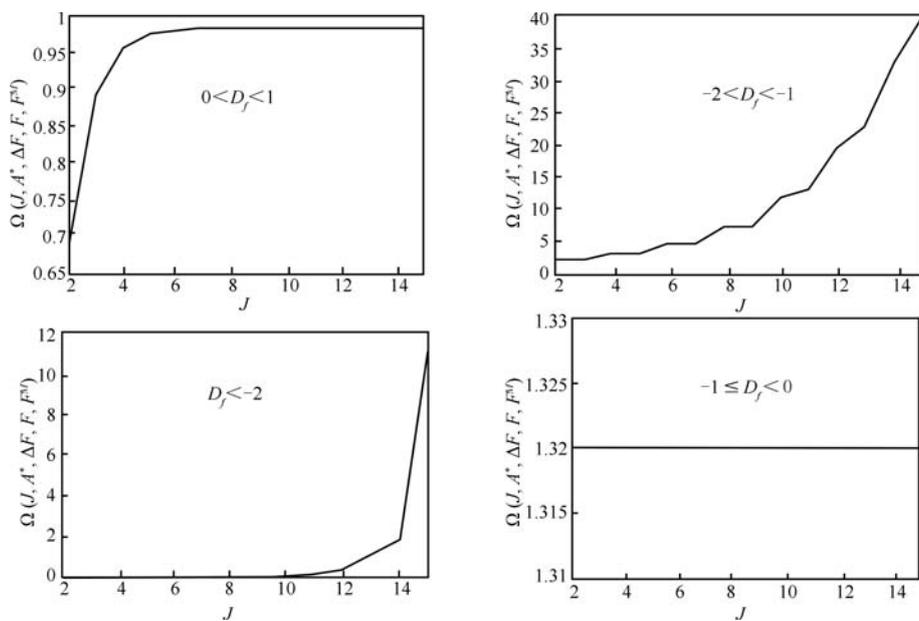


图 4 滤波偏差比 $\xi(\tau)$ 的上界随 J 的变化趋势

Fig. 4 Changing trends of $\xi(\tau)$'s upper level with the increasing of J

根据定理 2 可知, 滤波误差上界的极限值为

$$\left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \frac{F}{F - A_{sf}^* F^M} = 0.9196$$

显然大于 δ_0 的允许上限. 因此, 为了保证滤波过程不发散, 需要限制采样周期比 J 的取值上限. 通过公式计算可得, 在不同的误差允许上限 δ_0 下的 J 取值上限 J_{\max} 的变化曲线, 如图 5 所示. 由图可知, 若保证滤波不发散, 要求 $J < 12$, 又存在约束 $J \geq 8$, 故 J 仅能在阴影区取值, 即 $8 \leq J \leq 11$.

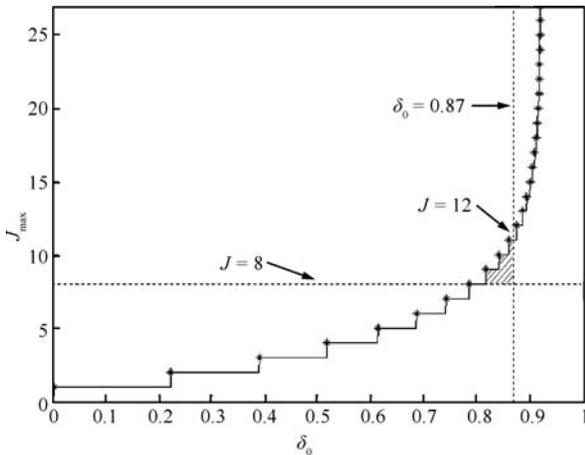


图 5 J_{\max} 随 δ_0 的变化趋势

Fig. 5 Changing trend of J_{\max} with the increasing of δ_0

在保证滤波不发散的情况下, 为使代价函数 $C(\delta_0, J)$ 最小化, 需要确定 $C(\delta_0, J)$ 随参数 δ_0 与 J 的变化规律. 图 6 以代价值等值曲线的形式给出 $C(\delta_0, J)$ 的变化情况. 其中, 实线为代价等值曲线. 每条曲线上的点均为等代价值点, 且越靠近图形的右上方, 等值线所代表的代价值越小. 短虚线表示滤波稳定条件, 该曲线下方为滤波稳定区域, 其中的代价等值曲线所对应的参数取值才是保证滤波稳定的参数解. 由图 6 可以看出, 随着 δ_0 增大, 可选取的 J 的上限也逐渐增大; 同时, 随着 J 的增大, 代价值逐渐减小.

在本问题中, 由于存在约束 $0 < \delta_0 \leq 0.87$ 且 $J \geq 8$, 由图可知, 可行的参数与代价值范围为两条长虚直线和短虚曲线所包围的区域. 在此区域内, 最小代价值的等值曲线必定对应最大的 J 取值. 而存在约束“ J 只能取正整数”且 $J \leq 11$, 故 $J = 11$ 为该区域 J 最大可行解. 与 $J = 11$ 相交的代价等值线对应的代价值就是可实现的最小代价值, 图中即为 $C = 1.769$. 等值线 $C = 1.769$ 所对应的滤波参数就是最优滤波参数, 即 $\delta_0 = 0.86$, $J = 11$.

由此得到在各种约束下, 保证滤波稳定的可行的最优滤波参数选取方案: $\delta_0 = 0.86$, $J = 11$. 该参数使得滤波代价函数最小, 既保证了滤波估值的可

靠性满足应用需求, 也降低了滤波算法的应用成本.

通过这个实例, 对本文提出的滤波稳定/发散判定定理在滤波参数的选取问题中的应用进行了说明. 尽管对象系统较理想化, 且代价函数采用了比较简单的表达形式, 与实际应用情况可能存在差异, 然而本实例反映了应用中的典型问题, 具有代表性, 对于指导算法的应用具有一定意义.

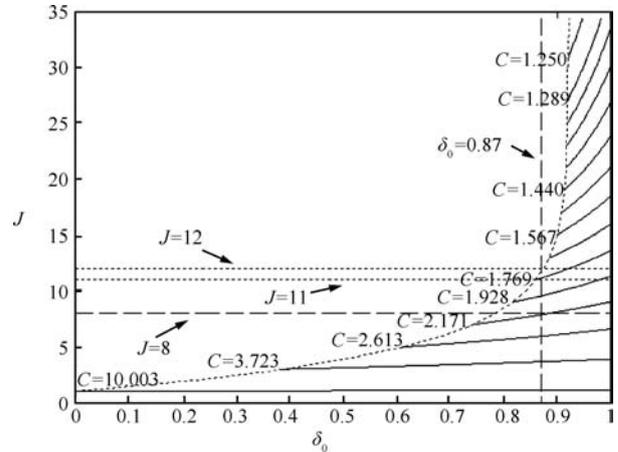


图 6 代价函数 $C(\delta_0, J)$ 等值线及参数选取示意图

Fig. 6 Diagram of the $C(\delta_0, J)$ isolines and the parameter selection

5 结论

针对滤波模型存在加性失配的情况, 根据化工过程应用的特点, 分析了多率 Kalman 滤波在不同模型失配情况下的误差变化情况, 给出了判断滤波过程稳定/发散的基本方法. 特别针对一种典型的线性双率采样系统, 推导了滤波偏差比的变化规律, 提出了明确的滤波稳定与发散的判定定理. 通过仿真对结论进行了验证与应用, 表明本文所提出的多率 Kalman 滤波算法的稳定与发散判定方法具有代表性, 对于多率滤波算法的实际应用以及进一步的性能分析具有指导意义.

同时, 通过对算法鲁棒性分析方法的研究可知, 一方面, 多率 Kalman 滤波算法与常规 Kalman 滤波算法相似, 其鲁棒性能与对象模型、模型失配程度等因素相关; 另一方面, 由于系统的多频率特性, 这一算法的鲁棒性还具有其独特性, 与各种观测的采样频率密切相关 (本文中即表现为“多率采样周期比”). 因此, 要明确这类多率滤波算法的鲁棒性, 需要考虑多种因素, 综合分析.

附录 A

定理 2 的证明. 定理 2 中, 结论 (4) 和 (5) 显而易见, 证明略. 下面给出结论 (1) ~ (3) 以及式 (6) 的证明过程.

1) 当 $D_f > 0$ 时, 显然 $\xi(\tau)$ 为 τ 的单增函数.

当

$$D_f = \frac{A^* F^M}{F} < -2$$

时, 采用数学归纳法进行证明.

令

$$a_0 = \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right|, g(\tau) = \sum_{i=0}^{\tau-1} D_f^i, \text{ 则}$$

$$\xi(\tau) = a_0 \left| \sum_{i=0}^{\tau-1} D_f^i \right| = a_0 |g(\tau)|, \\ \tau = 1, 2, \dots, J-1$$

根据假设 2 可知, 在稳态滤波过程中, 参数 a_0 为确定的正常数.

$k = 1$ 时, $\xi(1) = a_0 > 0$.

$k = 2$ 时, $\xi(2) = a_0 |1 + D_f|$. 因为 $1 + D_f < -1$, 所以 $\xi(2) > a_0 = \xi(1)$.

⋮

假设, $k = 2n - 1$ (n 为任意正自然数) 时, $g(2n - 1) > 0$ 且 $\xi(2n - 1) > \xi(2n - 2)$ 成立. $k = 2n$ (n 为任意正自然数) 时, $g(2n) < 0$ 且 $\xi(2n) > \xi(2n - 1)$ 成立. 那么, $k = 2n + 1$ 时, $\xi(2n + 1) = a_0 |g(2n + 1)|$.

由第 $2n$ 步已知, $\xi(2n) > \xi(2n - 1)$, 因为

$$\left| \sum_{i=0}^{2n-1} D_f^i \right| > \left| \sum_{i=0}^{2n-2} D_f^i \right|$$

即 $|g(2n)| > |g(2n - 1)|$.

又由第 $2n - 1, 2n$ 步已知, $g(2n - 1) > 0, g(2n) < 0$ 所以有

$$-\sum_{i=0}^{2n-1} D_f^i > \sum_{i=0}^{2n-2} D_f^i$$

即

$$D_f^{2n-1} < -2 \sum_{i=0}^{2n-2} D_f^i$$

因为

$$D_f^{2n} > -2 \sum_{i=1}^{2n-1} D_f^i > -2 \sum_{i=0}^{2n-1} D_f^i$$

所以

$$g(2n + 1) > |g(2n)|$$

故

$$\xi(2n + 1) = a_0 |g(2n + 1)| > \xi(2n)$$

成立.

$k = 2n + 2$ 时,

$$\xi(2n + 2) = a_0 |g(2n + 2)|$$

由第 $2n + 1$ 步已知

$$D_f^{2n} > -2 \sum_{i=1}^{2n-1} D_f^i$$

所以

$$D_f^{2n+1} < -2 \sum_{i=2}^{2n} D_f^i$$

又

$$1 + D_f < -1$$

从而

$$-2(1 + D_f) > 2$$

所以

$$D_f^{2n+1} < -2 \sum_{i=2}^{2n} D_f^i - 2(1 + D_f)$$

即

$$g(2n + 2) < -g(2n + 1)$$

所以

$$|g(2n + 2)| > |g(2n + 1)|$$

故

$$\xi(2n + 2) > \xi(2n + 1)$$

成立.

综上所述, $\xi(k + 1) > \xi(k)$ (n 为任意正自然数) 得证.

根据上述证明, 当 $D_f < -2$ 时, $\xi(\tau)$ 为 τ 的单增函数, 故在定义域 M 内, $\xi(\tau)$ 随着时间递增且有最大值 $\xi(J - 1)$.

由式 (23) 可知, $D_f = 1$ 时,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \xi(\tau) = \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^{\tau-1} D_f^i \right| = \\ \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\tau) = \infty$$

$D_f \neq 1$ 时

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \xi(\tau) = \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| \frac{1 - D_f^\tau}{1 - D_f} \right| \\ = \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F(1 - D_f)} \right| \lim_{\tau \rightarrow \infty} |1 - D_f^\tau|$$

若 $|D_f| < 1$ 时, 则 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} D_f^\tau = 0$, 即有

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \xi(\tau) = \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F(1 - D_f)} \right|$$

若 $|D_f| > 1$, 则 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \xi(\tau) = \infty$.

因此, 在 $D_f \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ 区间内, 有

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \xi(\tau) = \begin{cases} \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \frac{1}{|1 - D_f|}, & D_f \in (0, 1) \\ \infty, & D_f \in (-\infty, -2) \cup [1, \infty) \end{cases}$$

当 $J \rightarrow \infty$ 且 $\tau \rightarrow J$ 时, 有 $\tau \rightarrow \infty$, 故 $\xi(\tau)$ 服从如上极限. 结论 1) 得证.

2) 首先, 采用数学归纳法讨论 $g(k)$ 在区间 $(-2, -1)$ 与 $(-1, 0)$ 的正负情况.

当 $k = 1$ 时,

$$g(1) = 1 > 0$$

当 $k = 2$ 时,

$$g(2) = 1 + D_f$$

当 $D_f \in (-1, 0)$ 时,

$$1 + D_f > 0, g(2) > 0$$

当 $D_f \in (-2, -1)$ 时,

$$-1 < 1 + D_f < 0, g(2) < 0$$

\vdots

假设 $k = 2n - 1$ (n 为任意正自然数) 时, 当 $D_f \in (-1, 0)$ 时,

$$g(2n - 1) > 0$$

当 $D_f \in (-2, -1)$ 时,

$$g(2n - 1) > 0$$

$k = 2n$ (n 为任意正自然数) 时,

当 $D_f \in (-1, 0)$ 时,

$$g(2n) > 0$$

当 $D_f \in (-2, -1)$ 时,

$$g(2n) < 0$$

那么, 当 $k = 2n + 1$ 时,

$$g(2n + 1) = \sum_{i=0}^{2n} D_f^i$$

若 $D_f \in (-1, 0)$, 则

$$g(2n + 1) = g(2n) + D_f^{2n}$$

由第 $2n$ 步已知, $g(2n) > 0$, 所以

$$g(2n + 1) > 0$$

成立.

若 $D_f \in (-2, -1)$, 则

$$g(2n + 1) = g(2n - 1) + D_f^{2n-1} + D_f^{2n}$$

$$D_f^{2n-1} + D_f^{2n} = D_f^{2n-1}(D_f + 1) > 0$$

又由第 $2n - 1$ 步, 已知 $g(2n - 1) > 0$, 所以

$$g(2n + 1) > 0$$

成立.

当 $k = 2n + 2$ 时,

$$g(2n + 2) = \sum_{i=0}^{2n+1} D_f^i(2n) + D_f^{2n} + D_f^{2n+1}$$

若 $D_f \in (-1, 0)$, 因为

$$D_f^{2n} + D_f^{2n+1} = D_f^{2n}(D_f + 1) > 0$$

由第 $2n$ 步已知, $g(2n) > 0$, 所以

$$g(2n + 2) > 0$$

成立.

若 $D_f \in (-2, -1)$, 因为

$$D_f^{2n} + D_f^{2n+1} = D_f^{2n}(D_f + 1) < 0$$

又由第 $2n$ 步已知, $g(2n) < 0$, 所以

$$g(2n + 2) < 0$$

成立.

综上可得, 当 $D_f \in (-1, 0)$ 时

$$g(k) > 0, \quad \forall k \in M$$

当 $D_f \in (-2, -1)$

$$\begin{cases} g(k) > 0, & k = 2n - 1 \\ g(k) < 0, & k = 2n \end{cases},$$

n 为任意正自然数

根据 $g(k)$ 的变化, 证明结论 2), 步骤如下:

当 $k = 2n + 1$, n 为任意正自然数时,

$$\xi(2n + 1) = a_0 |g(2n + 1)|$$

因为

$$g(2n + 1) > 0$$

所以

$$\xi(2n + 1) = a_0 [g(2n) + D_f^{2n}] > \xi(2n)$$

成立. 又

$$g(2n + 1) = g(2n - 1) + D_f^{2n} + D_f^{2n-1}$$

根据 $g(k)$ 的性质, 有

$$g(2n - 1) > 0 \quad \text{且} \quad g(2n + 1) > 0$$

而

$$D_f^{2n} + D_f^{2n-1} < 0$$

所以

$$0 < g(2n + 1) < g(2n - 1)$$

即

$$\xi(2n + 1) < \xi(2n - 1)$$

成立. 故

$$\xi(2n) < \xi(2n + 1) < \xi(2n - 1)$$

得证.

当 $k = 2n + 2$ (n 为任意正自然数) 时,

$$\xi(2n + 2) = a_0 |g(2n + 2)|$$

$$g(2n + 2) = g(2n) + D_f^{2n} + D_f^{2n+1}$$

根据 $g(k)$ 的性质,

$$g(2n) > 0$$

而

$$D_f^{2n} + D_f^{2n+1} > 0$$

所以

$$g(2n + 2) > g(2n) > 0$$

即

$$\xi(2n + 2) > \xi(2n)$$

成立. 又

$$g(2n + 2) = g(2n + 1) + D_f^{2n+1}$$

根据 $g(k)$ 的性质

$$g(2n + 1) > 0 \quad \text{且} \quad g(2n + 2) > 0$$

而 $D_f^{2n+1} < 0$, 所以

$$g(2n + 2) < g(2n + 1)$$

即

$$\xi(2n + 2) < \xi(2n + 1)$$

成立. 故

$$\xi(2n) < \xi(2n + 2) < \xi(2n + 1)$$

得证.

综上所述

$$\begin{cases} \xi(2n) < \xi(2n + 1) < \xi(2n - 1) \\ \xi(2n) < \xi(2n + 2) < \xi(2n + 1) \end{cases},$$

n 为任意正自然数

得证. 因而, 当 $-1 < D_f < 0$ 时, $\xi(\tau)$ 随 τ 的增大而振荡收敛, 且在定义域 M 内, $\xi(\tau)$ 的最大值为首项 $\xi(1)$.

根据结论 1) 的推导, 当 $-1 < D_f < 0$ 时,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \xi(\tau) = \left| \frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \right| \frac{1}{|1 - D_f|}$$

因此, 当 $J \rightarrow \infty$ 时, $\xi(\tau)$ ($\tau \rightarrow J$) 将趋于稳态收敛值 ξ_{cs} . 结论 2) 得证.

3) 根据结论 2) 的证明, 可知当 $D_f \in (-2, -1)$, 有

$$\begin{cases} g(k) > 0, & k = 2n - 1 \\ g(k) < 0, & k = 2n \end{cases},$$

n 为任意正自然数

当 $k = 2n + 1$, n 为任意正自然数时,

$$\xi(2n + 1) = a_0 g(2n + 1) = a_0 \sum_{i=0}^{2n} D_f^i$$

因为

$$\begin{aligned} D_f^{2n} + 2(D_f^{2n-1} + D_f^{2n-2} + \dots + D_f + 1) = \\ D_f^{2n-2}(D_f + 1)^2 + D_f^{2n-4}(D_f + 1)^2 + \dots + \\ (D_f + 1)^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

所以

$$g(2n + 1) > -g(2n)$$

根据 $g(k)$ 性质, 易得

$$\xi(2n + 1) > \xi(2n)$$

成立. 又

$$\xi(2n + 1) - \xi(2n - 1) = a_0(D_f^{2n} + D_f^{2n-1}) > 0$$

所以

$$\xi(2n + 1) > \xi(2n - 1)$$

成立. 故

$$\xi(2n + 1) > \xi(2n) \quad \text{且} \quad \xi(2n + 1) > \xi(2n - 1)$$

得证.

当 $k = 2n + 2$ (n 为任意正自然数) 时,

$$\xi(2n + 2) = a_0 g(2n + 2) = a_0 \sum_{i=0}^{2n+1} D_f^i$$

$$\xi(2n + 2) - \xi(2n) = -a_0(D_f^{2n} + D_f^{2n+1}) > 0$$

所以

$$\xi(2n + 2) > \xi(2n)$$

成立. 而

$$\begin{aligned} \xi(2n + 2) - \xi(2n + 1) = \\ -[D_f^{2n+1} + 2(D_f^{2n} + D_f^{2n-1} + \dots + D_f + 1)] = \\ -[(D_f^{2n+1} + 2D_f^{2n} + D_f^{2n-1}) + \\ D_f^{2n-1} + 2(D_f^{2n-2} + \dots + D_f + 1)] = \\ -(D_f^{2n+1} + 2D_f^{2n} + D_f^{2n-1}) + \\ [\xi(2n) - \xi(2n - 1)] \end{aligned}$$

令

$$D_0 = D_f^{2n+1} + 2D_f^{2n} + D_f^{2n-1}$$

则

$$\begin{aligned} \xi(2n + 2) - \xi(2n + 1) = \\ -D_0 + [\xi(2n) - \xi(2n - 1)] \end{aligned}$$

若 $\xi(2n) - \xi(2n - 1) > 0$,

则

$$\xi(2n + 2) - \xi(2n + 1) > 0$$

成立;

若 $\xi(2n) - \xi(2n - 1) \leq 0$, 由于 $D_f \in (-2, -1)$, $|D_0|$ 变化率高于 $|\xi(2n) - \xi(2n - 1)|$ 的变化率, 故随着 n 增大, 必然存在 n_0 , 使得 $|D_0| > |\xi(2n_0) - \xi(2n_0 - 1)|$, 即

$$\xi(2n_0 + 2) - \xi(2n_0 + 1) > 0$$

$$\text{且} \quad \xi(2n_0) - \xi(2n_0 - 1) \leq 0$$

故 $n < n_0$ 时, 有

$$\xi(2n) < \xi(2n + 2) < \xi(2n + 1)$$

$n > n_0$ 时, 有

$$\xi(2n) < \xi(2n + 1) < \xi(2n + 2)$$

令

$$\tau_0 = 2n_0 + 2$$

综上所述, 若 τ_0 在定义域 M 内, 则当 $\tau < \tau_0$, $\xi(\tau)$ 随 τ 的增大而振荡增大, 且最大值为最大奇数项取值; 当 $\tau \geq \tau_0$, $\xi(\tau)$ 随 τ 的单调递增, 最大值为末项取值. 若 τ_0 在定义域 M 外, 则 $\xi(\tau)$ 始终随 τ 的增大而振荡递增.

同时, 根据结论 1) 的推导, 当 $-2 < D_f < -1$ 时, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \xi(\tau) = \infty$. 故当 $J \rightarrow \infty$ 时, $\xi(\tau)$ ($\tau \rightarrow J$) 也趋于无穷. 结论 3) 得证.

4) 当 $D_f = -2$ 时, 显然 $\xi(1) = \xi(2) = a_0 > 0$.

当 $\tau \in [2, J - 1]$, $\xi(\tau)$ 随 τ 变化规律的证明步骤与 $D_f < -2$ 情况类似, 证明略. \square

定理 3 的证明. 在慢采样时刻, 观测矩阵 H_s 扩维为 $\begin{bmatrix} H_f \\ H_o \end{bmatrix}$, 观测噪声方差阵 R_s 扩维为 $\begin{bmatrix} R_f & 0 \\ 0 & R_o \end{bmatrix}$. 根据式 (23), 慢采样时刻的滤波偏差比为

$$\xi(J) = \left| \frac{A_{ss}^* F^M}{F} \left[\frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \left(\sum_{i=0}^{\tau-2} D_f^i \right) \right] + \frac{A_{ss}^* \Delta F}{F} \right|$$

其中, 参数 $A_{ss}^* = I - K_{ss} H_s$.

1) 由式 (6), 增益阵 K_{ss} 表达为

$$K_{ss} = P^{M-} H_s^T [H_s P^{M-} H_s^T + R_s]^{-1} \quad (A1)$$

其中, P^{M-} 表示稳态运算中得到的滤波误差预测方差阵的稳态解.

将式 (A1) 代入 A_{ss}^* 计算式中, 有

$$\begin{aligned} A_{ss}^* &= 1 - P^{M-} H_s^T [H_s P^{M-} H_s^T + R_s]^{-1} H_s = \\ &= 1 - P^{M-} \frac{H_f^2 R_o + H_o^2 R_f}{H_f^2 R_o P^{M-} + H_o^2 R_f P^{M-} + R_o R_f} = \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{R_o R_f}{(H_f^2 R_o + H_o^2 R_f) P^{M-}}} < \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{R_f}{H_f^2 P^{M-}}} \end{aligned} \quad (A2)$$

而

$$\begin{aligned} A_{sf}^* &= 1 - K_{sf} H_f = \\ &= 1 - P^{M-} \frac{H_f^2}{H_f^2 P^{M-} + R_f} = \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{R_f}{H_f^2 P^{M-}}} \end{aligned} \quad (A3)$$

故 $A_{ss}^* < A_{sf}^*$, 结论 1) 得证.

2) 令

$$\varepsilon = \min \left| \frac{E[\mathbf{e}(k, \tau)] E[\mathbf{x}(k, J)]}{E[\mathbf{x}(k, \tau)]} \right|, \quad \tau = 1, 2, \dots, J-1$$

则根据假设 3, 必然存在慢速观测数据 $y_s(k, J)$ 以及实数 $\delta(\varepsilon)$, 满足

$$E\{[y_s(k, J) - H_{sk, J} x(k, J)] \times [y_s(k, J) - H_{sk, J} x(k, J)]^T\} < \delta(\varepsilon)$$

即

$$R_0 < \delta(\varepsilon)$$

使得

$$|E[\mathbf{e}(k, J)]| < \varepsilon$$

成立.

由 $|E[\mathbf{e}(k, J)]| < \varepsilon$, 可知

$$|E[\mathbf{e}(k, J)]| < \left| \frac{E[\mathbf{e}(k, \tau)] E[\mathbf{x}(k, J)]}{E[\mathbf{x}(k, \tau)]} \right|,$$

$$\tau = 1, 2, \dots, J-1$$

即

$$\xi(J) < \xi(\tau), \quad \tau = 1, 2, \dots, J-1$$

令 $\delta_0 = \delta(\varepsilon)$, 结论 2) 得证.

3) 在慢采样时刻 $\tau = J$, 前一快采样时刻的滤波偏差比 $\xi(J-1)$ 为确定值, 则慢采样时刻滤波偏差比可表示为

$$\xi(J) = C_0 |A_{ss}^*| \quad (A4)$$

其中

$$C_0 = \left| \frac{F^M}{F} \left[\frac{A_{sf}^* \Delta F}{F} \left(\sum_{i=0}^{\tau-2} D_f^i \right) \right] + \frac{\Delta F}{F} \right| > 0$$

由式 (6) ~ (8) 易知, A_{ss}^* 具有正定性, 故

$$\xi(J) = C_0 A_{ss}^* \quad (A5)$$

可知 $\xi(J)$ 为参数 A_{ss}^* 的单调函数. 根据式 (A2), 随着 R_o 增大, A_{ss}^* 递增, 则当 $R_o \rightarrow 0$ 时, 有 $A_{ss}^* \rightarrow 0$. 而 $\xi(J)$ 又随 A_{ss}^* 单调递增, 由式 (A5) 可知, $A_{ss}^* \rightarrow 0$, $\xi(J) \rightarrow 0$. \square

References

- 1 Ding Feng, Chen Tong-Wen. Modeling and identification of multirate systems. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(1): 105-122
- 2 Ding F, Chen T W. Combined parameter and output estimation of dual-rate systems using an auxiliary model. *Automatica*, 2004, **40**(10): 1739-1748
- 3 Ding F, Chen T W. Identification of dual-rate systems based on finite impulse response models. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2004, **18**(7): 589-598
- 4 Ding F, Chen T W. Parameter estimation of dual-rate stochastic systems by using an output error method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(9): 1436-1441
- 5 Ding J, Shi Y, Wang H, Ding F. A modified stochastic gradient based parameter estimation algorithm for dual-rate sampled-data systems. *Digital Signal Processing*, 2010, **20**(4): 1238-1247
- 6 Ding F, Liu P X, Yang H Z. Parameter identification and inter sample output estimation for dual-rate systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2008, **38**(4): 966-975
- 7 Ding F, Chen T W. Hierarchical identification of lifted state-space models for general dual-rate systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2005, **52**(6): 1179-1187

- 8 Ding Feng, Chen Tong-Wen, Xiao De-Yun. State-space modeling and identification of general dual-rate stochastic systems. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(5): 652–663
(丁锋, 陈通文, 萧德云. 一般双率随机系统状态空间模型及其辨识. 自动化学报, 2004, **30**(5): 652–663)
- 9 Han L L, Sheng J, Ding F, Shi Y. Auxiliary model identification method for multirate multi-input systems based on least squares. *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, **50**(7–8): 1100–1106
- 10 Han L L, Ding F. Identification for multirate multi-input systems using the multi-innovation identification theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, **57**(9): 1438–1449
- 11 Han L L, Ding F. Parameter estimation for multirate multi-input systems using auxiliary model and multi-innovation. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2010, **21**(6): 1079–1083
- 12 Liu X G, Lu J. Least squares based iterative identification for a class of multirate systems. *Automatica*, 2010, **46**(3): 549–554
- 13 Ding F, Liu G, Liu P X. Partially coupled stochastic gradient identification methods for non-uniformly sampled systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(8): 1976–1981
- 14 Ding F, Qiu L, Chen T W. Reconstruction of continuous-time systems from their non-uniformly sampled discrete-time systems. *Automatica*, 2009, **45**(2): 324–332
- 15 Xie L, Liu Y J, Yang H Z, Ding F. Modelling and identification for non-uniformly periodically sampled-data systems. *IET Control Theory and Applications*, 2010, **4**(5): 784–794
- 16 Liu Y J, Xie L, Ding F. An auxiliary model based recursive least-squares parameter estimation algorithm for non-uniformly sampled multirate systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2009, **223**(4): 445–454
- 17 Ding Feng, Chen Tong-Wen, Xiao De-Yun. Identification of non-uniformly periodically sampled multirate systems. *Acta Electronica Sinica*, 2004, **32**(9): 1414–1420
(丁锋, 陈通文, 萧德云. 非均匀周期采样多率系统的一种辨识方法. 电子学报, 2004, **32**(9): 1414–1420)
- 18 Ni Bo-Yi, Xiao De-Yun. A recursive identification method for non-uniformly sampled systems. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(12): 1520–1527
(倪博溢, 萧德云. 非均匀采样系统的一种递推辨识方法. 自动化学报, 2009, **35**(12): 1520–1527)
- 19 Xie L, Yang H Z. Gradient based iterative identification for nonuniform sampling output error systems. *Journal of Vibration and Control*, 2011, **17**(3): 471–478
- 20 Xie L, Yang H Z, Ding F. Recursive least squares parameter estimation for non-uniformly sampled systems based on the data filtering. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, **54**(1–2): 315–324
- 21 Ding F, Liu G, Liu X P. Parameter estimation with scarce measurements. *Automatica*, 2011, **47**(8): 1646–1655
- 22 Wu Yao, Luo Xiong-Lin. Progress of multi-rate digital control technique in chemical industry. *Chemical Industry and Engineering Progress*, 2008, **27**(9): 1342–1347
(吴瑶, 罗雄麟. 化工多采样率数字控制技术研究进展. 化工进展, 2008, **27**(9): 1342–1347)
- 23 Ding F, Chen T W. A gradient based adaptive control algorithm for dual-rate systems. *Asian Journal of Control*, 2006, **8**(4): 314–323
- 24 Ding F, Chen T W, Iwai Z. Adaptive digital control of Hammerstein nonlinear systems with limited output sampling. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, **45**(6): 2257–2276
- 25 Ding F, Chen T W. Least squares based self-tuning control of dual-rate systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2004, **18**(8): 697–714
- 26 Kalman R E, Bertram J E. A unified approach to the theory of sampling systems. *Journal of the Franklin Institute*, 1959, **267**(5): 405–436
- 27 Assis A J, Filho R M. Soft sensors development for online bioreactor state estimation. *Computers and Chemical Engineering*, 2000, **24**(2–7): 1099–1103
- 28 Nishimura T. Spectral factorization in periodically time-varying systems and application to navigation problems. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1972, **9**(7): 540–546
- 29 Sahebsara M, Chen T, Shah S L. Optimal fast-rate soft-sensor design for multi-rate processes. In: Proceedings of the American Control Conference. Minneapolis, USA: IEEE, 2006. 976–981
- 30 Prasad V, Schley M, Russo L P, Bequette B W. Product property and production rate control of styrene polymerization. *Journal of Process Control*, 2002, **12**(3): 353–372
- 31 Wu Y, Luo X L. A design of soft sensor based on data fusion. In: Proceedings of the International Conference on Information Engineering and Computer Science. Wuhan, China: IEEE, 2009. 3442–3445
- 32 Li W H, Shah S L, Xiao D Y. Kalman filters in non-uniformly sampled multirate systems: for FDI and beyond. *Automatica*, 2008, **44**(1): 199–208

- 33 Wu Y, Luo X L. A novel calibration approach of soft sensor based on multirate data fusion technology. *Journal of Process Control*, 2010, **20**(10): 1252–1260
- 34 Fitzgerald R. Divergence of the Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, **16**(6): 736–747
- 35 Kano H. Periodic solutions of matrix Riccati equations in discrete time-invariant systems. *International Journal of Control*, 1983, **38**(1): 27–45
- 36 Lennartson B. Periodic solutions of Riccati equations applied to multirate sampling. *International Journal of Control*, 1988, **48**(3): 1025–1042
- 37 Bittanti S, Colaneri P, Guardabassi G. Periodic solutions of periodic Riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, **29**(7): 665–667
- 38 Arvanitis K, Paraskevopoulos P, Vernardos A. Multirate adaptive temperature control of greenhouses. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2000, **26**(3): 303–320
- 39 Phan D T. The design and modeling of multirate digital control systems for disk drive applications. In: Proceedings of the Asia-Pacific Workshop on Advances in Motion Control. Singapore, Singapore: IEEE, 1993. 189–205
- 40 Li W, Han Z, Shah S L. Subspace identification for FDI in systems with non-uniformly sampled multirate data. *Automatica*, 2006, **42**(4): 619–627
- 41 Raghavan H, Tangirala A, Gopaluni R, Shah S L. Identification of chemical processes with irregular output sampling. *Control Engineering Practice*, 2006, **14**(5): 467–480
- 42 Ni Bo-Yi, Xiao De-Yun. A survey on identification of multirate sampled systems. *Control Theory and Applications*, 2009, **26**(1): 62–68
(倪博溢, 萧德云. 多采样率系统的辨识问题综述. 控制理论与应用, 2009, **26**(1): 62–68)
- 43 Friedland B. Sampled-data control systems containing periodically varying members. In: Proceedings of the 1st IFAC World Congress, Moscow: 1961. 361–367
- 44 Bittanti S, Guardabassi G. Optimal periodic control and periodic systems analysis: an overview. In: Proceedings of the 25th IEEE Conference on Decision and Control. Athens, Greece: IEEE, 1986. 1417–1423



吴 瑶 中国石油大学(北京)自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为多率系统分析, 软测量理论与技术.

E-mail: meiji5833@gmail.com

(WU Yao Ph.D. candidate at the Research Institute of Automation, China University of Petroleum, Beijing. Her research interest covers multirate system analysis, theory and technology of soft sensor.)



罗雄麟 中国石油大学(北京)自动化研究所教授. 主要研究方向为多率系统分析, 智能控制, 预测控制. 本文通信作者.

E-mail: luoxl@cup.edu.cn

(LUO Xiong-Lin Professor at the Research Institute of Automation, China University of Petroleum, Beijing. His research interest covers multirate system analysis, intelligent control, and model predictive control. Corresponding author of this paper. Corresponding author of this paper.)