

# 受控拉格朗日函数方法综述

吴凡<sup>1</sup> 耿志勇<sup>1</sup>

**摘要** 受控拉格朗日函数 (Controlled Lagrangians, CL) 方法是一种以能量观点设计简单力学系统镇定控制律的方法. 自 1997 年正式提出以来, CL 法在理论及应用上都得到了发展. 理论上包括研究 CL 法的可行性, 针对特定类系统简化 CL 法设计, 利用 CL 法解决镇定之外的控制问题. 应用上主要是将 CL 法用于多种实际力学系统, 尤其是欠驱动力学系统的控制. 本综述将介绍 CL 法的主要思想与理论; 回顾各控制研究团队所作理论与应用推广; 讨论关于 CL 法一些尚存的问题以及未来研究方向.

**关键词** 简单力学系统, 能量整形, 匹配, 非线性镇定

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2012.00145

## A Survey for Controlled Lagrangian Method

WU Fan<sup>1</sup> GENG Zhi-Yong<sup>1</sup>

**Abstract** The method of controlled Lagrangian (CL) has been developed to stabilize simple mechanical systems based on energy shaping. Since the introduction of this controller design methodology in 1997, many theoretical developments and practical applications have been reported in the literature. The theoretical developments include a series of criteria for its applicability, special shortcuts that are useful when dealing with particular classes of systems, and the incorporation of additional features to handle control scenarios other than just stabilization. On the application side, the method has been applied to a wide variety of practical mechanical control systems, especially under actuated systems. The purpose of this survey is to review the fundamental idea and theory of this controller design methodology, research developments achieved by different research groups, as well as to discuss the current open problems and future research directions.

**Key words** Simple mechanical systems, energy shaping, matching, nonlinear stabilization

“所有的线性系统总是相似的, 每个非线性系统都呈现各自不同的非线性”, 一个控制学家可以如此引用列夫·托尔斯泰. 非线性系统的控制律设计一直是控制界研究的核心问题. 线性控制理论在线性系统中的成功应用不可能在非线性的控制中重现, 人们找不到可以处理各种非线性的通用的控制律设计方法. 非线性力学系统是一类有明确物理背景的非线性系统, 其动态行为与系统的能量直接相关. 从能量的观点来考虑力学系统的控制, 常常能利用系统本身的物理性质, 使控制律设计得到简化且具有物理含义, 提高控制性能. 在力学系统镇定中常用的耗散控制, 正是受启发于阻尼注入的思想.

简单力学系统, 其拉格朗日函数为动能减势能 (能量为动能加势能), 是一类有着广泛应用背景的力学系统. 受控拉格朗日函数方法是一种针对简单力学系统, 基于能量观点的控制律设计方法, 其通过反馈赋予闭环系统新的能量函数, 同时保持系统

的拉格朗日结构, 这种思想称为“能量整形 (Energy shaping)”. 根据控制目标, 能量整形使得闭环能量函数具有期望的性质. 以镇定为例, 一个最基本的要求就是闭环能量函数在期望平衡点处取极值. 能量整形最早由 Takegaki 等<sup>[1]</sup> 提出, 其利用反馈重塑势能, 并用于机械臂的控制. 这种思想随后在哈密尔顿框架下得到发展, Schaft<sup>[2]</sup> 使用辛几何研究了力学系统的能量整形, 展示了几何力学在控制中的作用. 在拉格朗日框架下, Bloch 等<sup>[3]</sup> 使用黎曼几何研究了能量整形, 针对一类欠驱动简单力学系统设计了动能整形镇定算法, 将其命名为“受控拉格朗日函数 (Controlled Lagrangians, CL) 方法”.

与传统的控制方法相比, 基于能量整形的 CL 法具有物理含义, 不依赖于一些纯粹技术上的方法, 如线性化、高增益控制等. CL 法利用而非抵消、压制系统的非线性来辅助控制. 从已有镇定简单力学系统实例来看 (从各类车-摆实验系统到水下舰艇, 卫星等实际系统), 基于能量整形的镇定所获得的稳定性在系统相空间的收敛域较其他方法都要大. 整形后的闭环能量函数, 可以作为期望平衡点的李雅普诺夫函数, 用于分析稳定性, 计算收敛域大小, 进一步研究鲁棒稳定性.

对于全驱动简单力学系统, 利用 CL 法定定是容易的, 因为通过反馈可以任意整形能量, 从而镇定

收稿日期 2011-05-16 录用日期 2011-10-24  
Manuscript received May 16, 2011; accepted October 24, 2011  
国家自然科学基金 (11072002, 10832006) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (11072002, 10832006)  
本文责任编辑 丛爽  
Recommended by Associate Editor CONG Shuang  
1. 北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室 北京 100871  
1. State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems, Peking University, Beijing 100871

任意平衡点. 然而对于欠驱动系统, 企图通过反馈任意整形能量是困难的. 因此, 不是所有的欠驱动系统都可以由 CL 法镇定. CL 法能够成功应用的关键在于找到一族可行的闭环能量函数, 即存在反馈能构造出这些能量函数. 这归结为求解一组非线性偏微分方程 (Partial differential equations, PDEs), 方程组的解给出了所有可行闭环能量函数, 只有其中存在具有期望性质的能量函数, CL 法才能成功应用. 求解 PDEs 是应用 CL 法不可回避的环节, 也是限制其适用范围及推广的主要因素.

自从 1997 年提出以来, CL 法不断得到发展. 在理论上, 主要包括针对特定类系统简化 PDEs 的求解<sup>[4]</sup>; 研究 CL 法的可行性<sup>[5-7]</sup>; 设法增加控制自由度, 拓宽 CL 法适用范围, 并提高控制性能<sup>[8-9]</sup>; 以及应用到镇定之外的控制问题, 如轨迹跟踪<sup>[10]</sup>; 协调控制多个力学系统, 如姿态同步<sup>[11]</sup>、编队运动<sup>[12]</sup>. 在应用上, CL 法的有效性及其优点已在一系列用于研究欠驱动控制的测试平台上得到成功验证, 如 Furuta 摆<sup>[13-14]</sup>、非完整车-转子系统<sup>[15]</sup>、杂技机器人 (Acrobat)、摆动机器人 (Pendubot)<sup>[16]</sup>. CL 法还应用到了内驱动空间飞船的姿态控制, 垂直起降飞机的控制<sup>[17]</sup>, 以及内置滑块驱动的水下舰艇控制<sup>[18]</sup>.

本文安排如下: 第 1 节给出 CL 法所需要的几何力学知识; 第 2 节介绍 CL 法中的核心理论: 匹配与镇定, 以及 CL 法在控制几类特定系统时有效的设计简化途径; 第 3 节介绍 CL 法在协调控制多个力学系统中的应用; 第 4 节讨论 CL 法的尚存问题以及未来研究方向; 第 5 节总结全文.

## 1 预备知识

CL 法的理论基础是几何力学, 其中分析方法主要来源于微分几何与李群理论. 我们假设读者了解黎曼几何和李群中的基本概念, 仅概要介绍 CL 法所需的预备知识, 涉及定义及符号参考文献 [19].

### 1.1 力学系统的拉格朗日描述

本文所考虑力学系统的构形空间为一有限维光滑流形  $Q$ , 维数是  $n$ . 记  $TQ$ ,  $T^*Q$  分别为  $Q$  的切丛和对偶切丛. 构形  $q \in Q$  的局部坐标记为  $(q^1, \dots, q^n)$ ;  $TQ$  上的局部坐标记为  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ , 表示系统的一对构形/速度;  $T^*Q$  上的局部坐标记为  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ , 表示系统的一对构形/动量.

为描述力学系统的动能, 需要赋予构形流形一个度量.  $Q$  上一个黎曼度量  $g$  在每个  $q \in Q$  的切空间  $T_qQ$  上定义了一个正定内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ :

$T_qQ \times T_qQ \rightarrow \mathbf{R}$ , 对于任意  $\mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q \in T_qQ$ ,

$$\langle \mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q \rangle = g(\mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q) = g_{ij}(\mathbf{q})v^i w^j$$

式中,  $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ ,  $\mathbf{v}_q = v^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ ,  $\mathbf{w}_q = w^j \frac{\partial}{\partial q^j}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). 本文使用 Einstein 求和表示惯例, 即表达式中出现相同指标意味着针对该指标求和. 度量张量  $g$  的局部坐标是一个  $n$  阶对称矩阵  $[g_{ij}(\mathbf{q})]$ . 以下我们直接用  $[g_{ij}]$  表示  $g$ , 隐含度量依赖于构形.

对于力学系统, 黎曼度量  $g$  代表了动能度量. 系统在  $\mathbf{v}_q$  处的动能表示为

$$K(\mathbf{v}_q) = \frac{1}{2}g(\mathbf{v}_q, \mathbf{v}_q) = \frac{1}{2}g_{ij}v^i v^j$$

动能度量在  $TQ, T^*Q$  间诱导出两个映射, 将系统的速度与动量联系起来. 定义 Flat 映射  $g^\flat: TQ \rightarrow T^*Q$ ,

$$g(\mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q) = \langle g^\flat \mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q \in T_qQ$$

其中,  $\langle \cdot, \cdot \rangle: T_q^*Q \times T_qQ \rightarrow \mathbf{R}$  是切空间与对偶切空间的自然偶对 (Natural pairing) 作用.  $g^\flat$  与  $g$  具有相同的矩阵表示  $[g_{ij}]$ . 定义 Sharp 映射  $g^\sharp: T^*Q \rightarrow TQ$  为  $g^\flat$  的逆映射,

$$\langle \mathbf{p}_q, \mathbf{w}_q \rangle = g(g^\sharp \mathbf{p}_q, \mathbf{w}_q), \quad \forall \mathbf{p}_q \in T_q^*Q, \mathbf{w}_q \in T_qQ$$

若  $[g_{ij}]$  可逆,  $g^\sharp$  表示为  $[g_{ij}]^{-1}$ , 按惯例记作  $[g^{ij}]$ .

力学系统的拉格朗日函数是定义在切丛上的实值函数  $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ . 如果其具有动能减势能的形式  $L = K - V$ , 则称为简单力学系统, 记作  $(Q, g, V)$ .

根据哈密尔顿最小作用原理, 受控力学系统的动力学方程由欧拉-拉格朗日方程给出:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \mathbf{F}(q, \dot{q}) + \mathbf{u} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{F}: TQ \rightarrow T^*Q$  代表系统所受非保守的广义力,  $\mathbf{u}: U \rightarrow W \subset T^*Q$  代表控制,  $U$  是  $\mathbf{u}$  的定义域,  $W$  描述了控制驱动结构. 当  $\dim(W) < \dim(T^*Q)$  时, 称系统是欠驱动的. CL 法研究如何利用反馈  $\mathbf{u}(q, \dot{q}): TQ \rightarrow W$  来改变系统行为.

当子对偶切丛  $W$  可积时 (指其零化子切丛  $W^\perp \subset TQ$  是 Frobenius 可积的), 可选取局部坐标  $(q^1, \dots, q^m, \dots, q^n)$ ,  $m = \dim(W)$ , 使得  $W = \text{span}\{dq^1, \dots, dq^m\}$ , 则式 (1) 可写为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= F_i, \quad i = m+1, \dots, n \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} &= F_j + u_j, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

后续章节将针对形如式(2)的系统介绍CL法, 以便于清晰地体现设计思路.

## 1.2 李群及对称性

李群作为一类特殊的流形, 具有丰富的结构性质, 也是研究系统对称性的数学工具.

考虑一个力学系统, 李群  $G$  作用在构形流形  $Q$  上, 记作  $\Phi: G \times Q \rightarrow Q$  (有关李群及其作用的基本概念可参见文献 [19] 第 5 章. 本文专用  $G$  表示李群). 过  $q \in Q$  的群作用轨道, 即  $G$ -轨道, 定义为在群作用下从  $q$  能达到的所有构形组成的集合:  $\text{Orb}(q) = \{\Phi(g, q) : g \in G\}$ .

记  $G$  的李代数为  $\mathfrak{g}$ , 任意  $\xi \in \mathfrak{g}$  由指数映射  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  生成一个单参数子群  $\exp(t\xi), t \in \mathbf{R}$ . 通过群对流形作用, 该子群诱导出一个  $Q$  上的向量场:

$$\xi_Q(q) = \left. \frac{d}{dt} \Phi(\exp(t\xi), q) \right|_{t=0}, \quad \forall q \in Q$$

称  $\xi_Q$  为对应  $\xi$  的无穷小生成元. 直观上, 无穷小生成元描述的是系统沿群作用方向的无穷小运动.

一个力学系统关于  $G$  对称, 是指其拉格朗日函数在  $G$ -作用下不变, 即对任意  $g \in G, (q, \mathbf{v}_q) \in TQ$ :

$$L(\Phi_g(q), T_q\Phi_g(\mathbf{v}_q)) = L(q, \mathbf{v}_q)$$

式中,  $T_q\Phi_g$  代表群作用  $\Phi_g(q) = \Phi(g, q)$  在  $q$  处的切映射, 其局部表示是  $\Phi(g, q)$  在  $q$  处的雅可比矩阵.

在许多力学系统中,  $G$ -不变性等价于拉格朗日函数不依赖于  $G$ -变量 ( $G$ -轨道的局部坐标变量), 此时又称系统关于  $G$ -变量循环 (Cyclic). 具有李群对称性的简单力学系统是 CL 法主要研究对象.

## 2 CL 法介绍

### 2.1 能量整形的思想

我们借用一个简单实例<sup>[8]</sup> 来示意如何通过能量整形实现镇定. 考虑一维实空间上的简单力学系统 ( $\mathbf{R}, g = 1, V = \beta x^2/2$ ),  $\beta < 0$ , 拉格朗日函数为

$$L(x, \dot{x}) = K(x, \dot{x}) - V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\beta x^2$$

系统的能量为  $E(x, \dot{x}) = \dot{x}^2/2 - \beta x^2/2$ . 易见, 平衡点  $(x_e, \dot{x}_e) = (0, 0)$  对应动能的极小值, 势能的极大值, 因此是一个不稳定的鞍点, 常见的倒立摆即属于这类系统. 开环系统的受控欧拉-拉格朗日 (Euler-Lagrangian, EL) 方程为

$$\ddot{x} + \beta x = u \quad (3)$$

假设存在一个反馈控制  $u(x, \dot{x})$ , 使得闭环系统是对应于如下拉格朗日函数的简单力学系统:

$$L_c(x, \dot{x}) = K(x, \dot{x}) - V_c(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\tilde{\beta}x^2, \quad \tilde{\beta} > 0$$

称式中  $V_c$  取代原势能  $V$  为势能整形. 平衡点  $(x_e, \dot{x}_e)$  变为受控能量  $E_c(x, \dot{x}) = \dot{x}^2/2 + \tilde{\beta}x^2/2$  的极小点, 且能量  $E_c$  守恒, 因此稳定. 为了得到控制律, 写出闭环 EL 方程:  $\ddot{x} + \tilde{\beta}x = 0$ . 与式 (3) 对比, 得到势能整形镇定控制  $u_{ps} = (\beta - \tilde{\beta})x$ .

类似地, 利用拉格朗日函数:

$$L_c(x, \dot{x}) = K_c(x, \dot{x}) - V(x) = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\beta x^2, \quad \alpha < 0$$

可得动能整形镇定控制  $u_{ks} = (\beta - \frac{\beta}{\alpha})x$ .

下面, 我们针对一般简单力学系统, 尤其是在欠驱动情形下, 介绍 CL 法如何通过能量整形实现镇定.

### 2.2 受控拉格朗日函数

考虑一个简单力学系统  $(Q, g, V)$ , 李群  $G$  自由, 正则地作用在  $Q$  上, 称商空间  $S = Q/G$  (即  $G$ -轨道的集合) 为形状空间. 为了理解 CL 法中的能量整形, 有必要先描述系统的速度与动能.

在构形  $q \in Q$  处, 切向量  $\mathbf{v}_q \in T_qQ$  可以分解为两分量之和. 分量一与经过  $q$  的  $G$ -轨道  $\text{Orb}(q)$  相切, 分量二与分量一度量  $g$ -正交. 称  $T_q\text{Orb}(q)$  为  $T_qQ$  的垂直子空间, 记为  $V_qQ$ ; 与其  $g$ -正交的子空间称为水平子空间, 记为  $H_qQ$ . 记切向量  $\mathbf{v}_q$  在  $V_qQ, H_qQ$  上的投影分别为  $\text{Ver}\mathbf{v}_q, \text{Hor}\mathbf{v}_q$ , 对于任意  $\mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q \in T_qQ$  有:

$$g(\mathbf{v}_q, \mathbf{w}_q) = g(\text{Hor}\mathbf{v}_q, \text{Hor}\mathbf{w}_q) + g(\text{Ver}\mathbf{v}_q, \text{Ver}\mathbf{w}_q) \quad (4)$$

式 (4) 唯一确定了切向量  $\mathbf{v}_q$  的分解:

$$\mathbf{v}_q = \text{Hor}\mathbf{v}_q + \text{Ver}\mathbf{v}_q$$

李群  $G$  在  $Q$  上自由, 正则地作用, 定义了一个主纤维丛  $(Q, \pi, S = Q/G)$ , 其中映射  $\pi: Q \rightarrow S$  称为投影映射. 在一点  $x \in S$  的局部坐标邻域  $\mathcal{U}$  内,  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$  同胚于  $G \times \mathcal{U}$ , 定义  $G$  的局部坐标为  $\theta^a$  ( $a = 1, \dots, m$ ),  $S$  的局部坐标为  $x^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ), 则速度局部表示为  $\mathbf{v}_q = (\dot{x}^\alpha, \dot{\theta}^a)$ , 动能局部写为

$$\begin{aligned} K(\mathbf{v}_q) &= \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + g_{ab}\dot{\theta}^a\dot{\theta}^b + \frac{1}{2}g_{ab}\dot{\theta}^a\dot{\theta}^b = \\ &\frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\alpha a}g^{ab}g_{b\beta})\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + \\ &\frac{1}{2}g_{ab}(\dot{\theta}^a + g^{ac}g_{c\alpha}\dot{x}^\alpha)(\dot{\theta}^b + g^{bd}g_{d\beta}\dot{x}^\beta) \end{aligned}$$

根据式 (4),  $\mathbf{v}_q$  在局部坐标下分解为

$$\begin{aligned} \text{Ver}\mathbf{v}_q &= (0, \dot{\theta}^a + g^{ab}g_{ab}\dot{x}^\alpha) \\ \text{Hor}\mathbf{v}_q &= (\dot{x}^\alpha, -g^{ab}g_{ab}\dot{x}^\alpha) \end{aligned} \quad (5)$$

当且仅当  $g_{ab} = 0$  时,  $\text{Ver}\mathbf{v}_q = (0, \dot{\theta}^a)$ ,  $\text{Hor}\mathbf{v}_q = (\dot{x}^\alpha, 0)$ . 直观上, 上述分解将速度沿群作用方向以及形状方向分为两部分.

速度分解可以借助力学联络<sup>[20]</sup> 来表示. 力学联络是一个垂直映射  $\mathcal{A} : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$ , “垂直”是指该映射是线性且零化切向量的水平分量:

$$\mathcal{A}(\text{Hor}\mathbf{v}_q) = \mathbf{0}, \mathcal{A}(\mathbf{v}_q) = \mathcal{A}(\text{Ver}\mathbf{v}_q) \in \mathfrak{g}, \forall \mathbf{v}_q \in T_qQ$$

由力学联络诱导的无穷小生成元  $\mathcal{A}(\mathbf{v}_q)_Q(q)$  的局部坐标是  $(0, \dot{\theta}^a + g^{ab}g_{ab}\dot{x}^\alpha)$ . 对于任一切向量  $\mathbf{v}_q \in T_qQ$ , 力学联络给出其垂直分量  $\text{Ver}\mathbf{v}_q$  对应的李代数中的向量, 水平空间  $H_qQ$  则由力学联络的核 (Kernel) 空间给出.

基于速度分解, 系统动能可以写成子空间上动能之和的形式:

$$K(\mathbf{v}_q) = \frac{1}{2}g(\text{Hor}\mathbf{v}_q, \text{Hor}\mathbf{v}_q) + \frac{1}{2}g(\text{Ver}\mathbf{v}_q, \text{Ver}\mathbf{v}_q) \quad (6)$$

如果把等式 (6) 右端看成是在切空间  $T_qQ$  上对动能“形状”的描述, 动能整形则具体体现为通过反馈改变切空间的分解以及作用在其上的度量. Bloch 首先将切空间分解的受控改变用于动能整形.

**定义 1**<sup>[4]</sup>. 记  $\tau : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$  是一水平映射, 即该映射是线性且零化切向量的垂直分量. 构形  $q$  处的  $\tau$ -水平空间  $\text{Hor}_\tau$  是由形如:

$$\text{Hor}_\tau\mathbf{v}_q = \text{Hor}\mathbf{v}_q - \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)$$

切向量构成的子空间, 称  $\mathbf{v}_q \mapsto \text{Hor}_\tau\mathbf{v}_q$  为  $\tau$ -水平投影. 类似地, 由:

$$\text{Ver}_\tau\mathbf{v}_q = \text{Ver}\mathbf{v}_q + \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)$$

确定的映射  $\mathbf{v}_q \mapsto \text{Ver}_\tau(\mathbf{v}_q)$  称为  $\tau$ -垂直投影.

**注 1.** 无穷小生成元  $\tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)$  是垂直空间中的切向量, 虽然垂直投影经过  $\tau$ -修改而改变, 但  $q$  处的垂直空间不变, 仍为与  $G$ -轨道相切的子空间.

**注 2.** 定义 1 实质是通过修改力学联络, 改变了切空间的分解, 目的是使得整形后的动能仍具有子空间动能的可加性. 根据水平映射  $\tau$  零化垂直向量的性质, 原力学联络  $\mathcal{A}$  附加映射  $\tau$  后仍是一个力学联络:  $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{A} + \tau$ .  $\tau$ -水平空间正是  $\mathcal{A}_\tau$  的核空间, 用来定义新的速度分解:  $\mathbf{v}_q = \text{Hor}_\tau\mathbf{v}_q + \text{Ver}_\tau\mathbf{v}_q$ .

为改变动能“形状”, 还需在切空间上重新定义度量. 动能整形归结为如下三方面:

- 1) 选择水平映射  $\tau : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$ , 改变切空间分解;
  - 2) 改变作用在新的水平空间上的度量  $g \rightarrow g_\sigma$ ;
  - 3) 改变作用在垂直空间上的度量  $g \rightarrow g_\rho$ .
- 因此, 动能式 (6) 整形为

$$\begin{aligned} K_c(\mathbf{v}_q) &= \frac{1}{2}g_\sigma(\text{Hor}_\tau\mathbf{v}_q, \text{Hor}_\tau\mathbf{v}_q) + \\ &\frac{1}{2}g_\rho(\text{Ver}_\tau\mathbf{v}_q, \text{Ver}_\tau\mathbf{v}_q) \end{aligned} \quad (7)$$

**定义 2**<sup>[4]</sup>. 利用式 (7), 定义受控拉格朗日函数:

$$L_c(\mathbf{v}_q) = K_c(\mathbf{v}_q) - (V(q) + \tilde{V}(q)) \quad (8)$$

其中,  $\tilde{V}(q)$  是用于势能整形的人工势能函数.

为了便于反馈设计, 往往希望在新的动能度量下,  $\tau$ -水平空间与垂直空间仍具有度量正交性. 基于此, Bloch<sup>[4]</sup> 对  $g_\sigma$  提出了两点假设: 1) 在原水平空间  $H_qQ$  上  $g_\sigma = g$ ; 2)  $H_qQ$  与  $V_qQ$  是  $g_\sigma$  正交的, 即:

$$\begin{aligned} g_\sigma(\text{Hor}_\tau\mathbf{v}_q, \text{Hor}_\tau\mathbf{v}_q) &= g(\text{Hor}\mathbf{v}_q, \text{Hor}\mathbf{v}_q) + \\ &g_\sigma(\tau(\mathbf{v}_q)_Q(q), \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)) \end{aligned}$$

在该假设下, 经过并不复杂的代数推导, Bloch 证明了 CL 函数 (8) 可写为

$$\begin{aligned} L_c(\mathbf{v}_q) &= \frac{1}{2}g(\mathbf{v}_q + \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q), \mathbf{v}_q + \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)) + \\ &\frac{1}{2}g_\sigma(\tau(\mathbf{v}_q)_Q(q), \tau(\mathbf{v}_q)_Q(q)) + \\ &\frac{1}{2}\varpi(\text{Ver}_\tau(\mathbf{v}_q), \text{Ver}_\tau(\mathbf{v}_q)) - V'(q) \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $\varpi = g_\rho - g$ ,  $V'(q) = V(q) + \tilde{V}(q)$ .

总的说来, 动能整形就是通过反馈引入三组整形参数来分别修改水平速度分量的指定、形状空间上的动能度量以及群空间上的动能度量. 势能整形就是通过反馈修改原势能函数. 因此, 能量整形共需引入 4 组整形参数.

### 2.3 反馈整形镇定设计

CL 方法的目标是镇定系统不稳定的 (相对) 平衡点, 其将期望的闭环系统构造成对应受控拉格朗日函数  $L_c$  的自由简单力学系统, 从而闭环能量  $E_c = K_c + V'$  守恒. 以  $E_c$  为李雅普诺夫函数, 指导整形参数的选取, 使得  $E_c$  在期望 (相对) 平衡点取极值. 利用李雅普诺夫直接法<sup>[21]</sup>, 可以判断闭环系统在该 (相对) 平衡点处稳定.

综上, 反馈整形镇定设计包含两个含义: 1) 匹配, 即选取整形参数, 使得闭环系统方程具有 EL 方程形式; 2) 综合, 即选取匹配的整形参数, 使得闭环

能量函数具备需要的性质. 下面, 首先介绍如何由受控拉格朗日函数  $L_c$  构造期望的闭环系统.

记系统构形局部坐标为

$$\mathbf{q} = [q^k] = \begin{bmatrix} [x^\alpha] \\ [\theta^a] \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n$$

为便于区分, 形状变量的指标使用希腊字母, 群变量的指标使用英文字母. 假设控制仅施加在群变量上, 具有英文指标的变量表示其与控制直接相关.

对于无外力欠驱动简单力学系统, 式 (2) 写成:

$$M\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} [V_{,\alpha}] \\ [V_{,a}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [u_a] \end{bmatrix} \quad (10)$$

$M$  是动能度量  $g$  的矩阵表示, 称为惯量矩阵;  $C$  是对应  $M$  的哥氏力与离心力矩阵; 势能  $V$  下标中的逗号表示偏微分运算,  $V_{,\alpha}$  表示  $V$  关于  $\theta^\alpha$  的偏导数.

若匹配成功 (下一节将专门介绍匹配), CL 方法给出反馈整形控制  $u_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , 以及一个形如式 (9) 的 CL 函数  $L_c$ , 其矩阵形式表示为

$$L_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M_c \dot{\mathbf{q}} - V'(\mathbf{q})$$

CL 函数  $L_c$  对应的自由 EL 方程:

$$M_c \ddot{\mathbf{q}} + C_c \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} [V'_{,\alpha}] \\ [V'_{,a}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (11)$$

即为受控闭环系统方程.

构造李雅普诺夫函数:

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M_c \dot{\mathbf{q}} + V'(\mathbf{q})$$

在匹配的整形参数  $M_c, V'$  中甄选, 使得  $E_c$  在给定平衡点处取极值, 以满足稳定性的充分条件. 这即为综合设计, 而整形参数的甄选正是反馈控制  $u_a$  中控制增益的确定.

对于具有对称性的力学系统, 除了能量这个守恒量外, 还具有其他守恒量, 比如线动量、角动量守恒. 李雅普诺夫函数可以构造成系统任何守恒量的组合, 只要其满足守恒. 这就增加了李雅普诺夫函数构造的自由度, 以便于综合设计.

平衡点的渐近稳定性可以通过施加反馈阻尼获得. 在受控方向上施加反馈阻尼  $u_a^{\text{diss}}$ , 闭环方程为

$$M_c \ddot{\mathbf{q}} + C_c \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} [V'_{,\alpha}] \\ [V'_{,a}] \end{bmatrix} = M_c M^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [u_a^{\text{diss}}] \end{bmatrix} \quad (12)$$

闭环能量  $E_c$  的变化率满足:

$$\frac{d}{dt} E_c = \dot{\mathbf{q}}^T M_c M^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [u_a^{\text{diss}}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

若  $E_c$  已在平衡点处取极小 (大) 值, 选择反馈阻尼使得  $E_c$  非增 (减). 一类候选的反馈阻尼可构造为

$$[u_a^{\text{diss}}] = [0_{m \times r}, I_{m \times m}] M M_c^{-1} R \dot{\mathbf{q}}$$

其中,  $r = \dim[x^\alpha]$  代表无控制直接施加的系统状态变量个数.  $m = \dim[\theta^a] = n - r$  代表控制直接施加的系统状态变量个数.  $R$  为定号的阻尼系数矩阵. 利用 LaSalle 不变原理可以判断平衡点的渐近稳定性.

目前, 针对水下航行器、空间飞行器等实际力学系统的镇定问题, CL 方法均获得了渐近稳定性<sup>[4, 18, 22-23]</sup>. 本文作者在其基础上, 针对多个水下航行器的协调控制, 也获得了协同运动的渐近稳定性<sup>[24-25]</sup>. 李茂青针对欠驱动垂直起降飞机, 利用 CL 方法获得了几乎全局渐近稳定性<sup>[17]</sup>.

需要强调, 系统所受物理阻尼不一定对镇定有利. Woolsey<sup>[22]</sup> 研究发现, 对于整形后闭环动能度量负定的系统, 欠驱动方向上的物理阻尼 (如摩擦力) 对镇定有利. 而驱动方向上的物理阻尼却起镇定作用, 但可以被反馈阻尼抵消. 因此, CL 方法对系统中存在的物理阻尼有一定的鲁棒性.

## 2.4 匹配

匹配是指选择能量整形参数  $M_c, V'$  中的  $\tau, g_\sigma, g_\rho, \tilde{V}$ , 并构造反馈控制, 使得闭环方程与对应  $L_c$  的 EL 方程等价, 即两者描述相同的动态过程. 为确保反馈控制的存在性 (尤其在欠驱动情形下), 参数  $\tau, g_\sigma, g_\rho, \tilde{V}$  所必须满足的条件称为匹配条件. 由于方程 (10) 中显含  $u_a$ , 匹配同时也得到了反馈控制律.

从闭环方程 (11) 中求解  $\ddot{\mathbf{q}}$ , 代入开环方程 (10) 中得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [u_a] \end{bmatrix} = M M_c^{-1} \left[ -C_c \dot{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} [V'_{,\alpha}] \\ [V'_{,a}] \end{bmatrix} \right] + C \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} [V_{,\alpha}] \\ [V_{,a}] \end{bmatrix} \quad (14)$$

匹配条件由方程组 (14) 前  $r$  个方程给出. 这是关于参数  $\tau, g_\sigma, g_\rho, \tilde{V}$  的非线性偏微分方程组, 求解这组 PDEs 获得匹配的闭环动能度量  $M_c$  与闭环势能函数  $V'$ , 进而由方程组 (14) 的后  $m$  行求得能量整形控制  $u_a$ .

## 2.5 匹配的简化与求解

匹配是 CL 方法设计的核心. 一般说来, 求解 PDEs 是困难的. 一些学者<sup>[5, 7, 26]</sup> 以几何手段分析了匹配 PDEs 的可积性及其解的性质, 试图得到匹配条件可解及能量整形可镇定的判据. 虽然目前只

针对若干类力学系统得到了相关判断条件,但这些从几何角度出发的研究加深了人们对能量整形本质的理解。

另一方面,针对具体力学系统,在合理假设下,可以利用其结构性质简化匹配条件. Bloch 等<sup>[4,27]</sup>针对特定类力学系统,通过限制闭环垂直动能量度  $g_\rho$  的选取,使得匹配 PDEs 退化常微分方程组或代数方程组. Viola 等<sup>[28]</sup>和 Li 等<sup>[29]</sup>针对一类具有单个欠驱动变量的力学系统,解决了匹配条件的求解问题. Chang<sup>[30]</sup>通过增加“力整形”,松弛了匹配条件的约束,使得能够与原系统匹配的系统更广,并针对若干类力学系统给出了一系列可匹配,可镇定判据。

本节将综述两类情形下匹配的简化与求解. 第一类针对具有循环变量的力学系统进行对称性保留的匹配,目标是镇定系统的相对平衡点(稳态运动);第二类是打破对称性的匹配,目标是镇定系统的平衡点. 这两类情形所包括的力学系统涵盖了欠驱动控制研究中的典型系统,如平面/斜面上的车-摆,旋转臂-倒立摆,以及许多工程应用中的常见系统,如内置驱动转子的飞船和水中航行器等系统。

### 2.5.1 具有循环变量的匹配

Bloch 等<sup>[3]</sup>首先研究了一类具有直接受控循环变量的力学系统的动能整形,其拉格朗日函数可写为

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \theta^a) = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + g_{ab}\dot{x}^a\dot{\theta}^b + \frac{1}{2}g_{ab}\dot{\theta}^a\dot{\theta}^b - V(x^\alpha)$$

其中,度量  $g$  与势能  $V$  均不依赖于  $\theta^a$ , 变量  $\theta^a$  为  $L$  的循环变量。

Bloch 在动能整形中保留  $\theta^a$ -循环性,以便于构造反馈控制及后续的镇定设计. 利用 CL 函数 (9):

$$L_c(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \dot{\theta}^a) = L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \dot{\theta}^a + \tau_\alpha^a \dot{x}^\alpha) + \frac{1}{2}\sigma_{ab}\tau_\alpha^a\tau_\beta^b\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + \frac{1}{2}\varpi_{ab}\left(\dot{\theta}^a + (g^{ac}g_{c\alpha} + \tau_\alpha^a)\dot{x}^\alpha\right) \times \left(\dot{\theta}^b + (g^{bd}g_{d\beta} + \tau_\beta^b)\dot{x}^\beta\right) \quad (15)$$

$\sigma_{ab}, \rho_{ab}$  为度量矩阵  $[g_\sigma], [g_\rho]$  中对应变量  $\theta^a$  的元素,  $\varpi_{ab} = \rho_{ab} - g_{ab}$ ,  $\tau_\alpha^a \dot{x}^\alpha$  为  $\tau$  的局部坐标。

利用  $L$  及  $L_c$  函数的  $\theta^a$ -循环性, 方程 (14) 可写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = MM_c^{-1} \left[ -C_c \dot{q} - \begin{bmatrix} [V_{,\alpha}] \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right] + C\dot{q} + \begin{bmatrix} [V_{,\alpha}] \\ -[u_a] \end{bmatrix} \quad (16)$$

原则上, 方程 (16) 的上半部分确定了所有匹配的闭环能量函数, 通过求解这组 PDE 以确定匹配条件. 这种匹配方式的优点是整形参数的选择具有最大自由度, 从而整形控制也具有最大自由度, 缺点是需要求解 PDEs. 另一种很自然的想法就是牺牲整形参数选择的自由度来简化 PDEs 的求解, 这种匹配方式不可避免地带来控制律设计上的保守性. 由于涉及到惯量矩阵, 势函数的偏微分, 通过选择整形参数使得某些偏微分项, 以及难以处理项的系数为零, PDEs 可退化常微分方程组或代数方程组. 当然, 这需要根据力学系统的结构特性加以确定。

Bloch 证明了如下 4 个充分条件确保存在欠驱动控制  $u_a$ , 使得式 (16) 右端为零。

$$\begin{aligned} \text{GM-1: } & \tau_\alpha^b = -\sigma^{ab}g_{b\alpha}; \\ \text{GM-2: } & \sigma^{bd}(\sigma_{ad,\alpha} + g_{ad,\alpha}) = 2g^{bd}g_{ad,\alpha}; \\ \text{GM-3: } & \varpi_{ab,\alpha} = 0; \\ \text{GM-4: } & \tau_{\alpha,\delta}^b - \tau_{\delta,\alpha}^b + \rho^{ba}\varpi_{ac}(\zeta_{\alpha,\delta}^c - \zeta_{\delta,\alpha}^c) - \rho^{ba}g_{ac,\delta}\rho^{cd}\varpi_{da}\zeta_\alpha^a - \rho^{ba}g_{ac,\alpha}\tau_\delta^a = 0, \\ & \zeta_\alpha^a = g^{ac}g_{c\alpha}. \end{aligned}$$

称 GM-1 ~ GM-4 为“一般匹配条件”. 由于  $L$  与  $L_c$  都关于  $\theta^a$  循环, 施加在  $\theta^a$  上的反馈控制  $u_a$  计算如下:

$$u_a = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^a} = \frac{d}{dt} \left\{ (g_{ab} - \rho_{ab}) \dot{\theta}^b - (\rho_{ac}(g^{cd} - \sigma^{cd})g_{d\beta} - g_{a\beta}) \dot{x}^\beta \right\} \quad (17)$$

反馈控制 (17) 依赖于加速度项, 由于已获得对应  $L, L_c$  的 EL 方程, 且两者匹配, 可以消去  $\ddot{x}^\alpha, \ddot{\theta}^a$  获得仅需要反馈位置、速度的控制。

如果力学系统的开环动能量度满足一定条件, 通过选择适当能量整形参数, 可简化一般匹配条件。

整形方式 1:  $g_\rho = g$ .

一般匹配条件退化为如下三个充分条件, 称为“第一匹配条件”<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned} \text{M-1: } & \tau_\alpha^a = -\sigma^{ab}g_{b\alpha}; \\ \text{M-2: } & \sigma^{ab}(\sigma_{bc,\alpha} + g_{bc,\alpha}) = 2g^{ab}g_{bc,\alpha}; \\ \text{M-3: } & \tau_{\alpha,\beta}^a - \tau_{\beta,\alpha}^a - g^{ab}g_{bc,\alpha}\tau_\beta^c = 0. \end{aligned}$$

在第一匹配条件下, 反馈控制 (17) 变为

$$u_a = -\frac{d}{dt}(g_{ab}\sigma^{bc}g_{c\alpha}\dot{x}^\alpha) \quad (18)$$

若再对开环动能量度以及参数  $\sigma_{ab}, \tau_\alpha^a$  作一些假设, 第一匹配条件进一步简化为“简化匹配条件”<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned} \text{SM-1: } & \sigma_{ab} = \sigma g_{ab}, \sigma \text{ 是常数}; \\ \text{SM-2: } & g_{ab,\alpha} = 0; \\ \text{SM-3: } & \tau_\alpha^b = -\frac{1}{\sigma}g^{ab}g_{a\alpha}; \\ \text{SM-4: } & g_{\alpha a,\beta} = g_{\beta a,\alpha}. \end{aligned}$$

在简化匹配条件下, 反馈控制 (18) 变为

$$u_a = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} (g_{\alpha\alpha} \dot{x}^\alpha) \quad (19)$$

满足简化匹配条件的力学系统是一类不受陀螺力的系统, 如车-摆, 球-摆. 以车-摆为例, 开环动能度量满足 SM-2, SM-4, 按照 SM-1, SM-3 进行匹配, 匹配 PDEs 简化为代数方程. 整形后动能度量只含有一个参数  $\sigma$ , 从控制角度讲, 这就是控制增益, 调节  $\sigma$  以满足镇定要求.

在整形方式 1 下, 以满足第一匹配条件 M-1~M-3 的受控力学系统为例, 反馈控制由式 (18) 给出, 其中  $\sigma_{ab}$  为待设计控制参数, 以确保闭环系统稳定性. Bloch 等<sup>[4]</sup> 给出如下稳定性的充分条件.

**定理 1.** 若函数:

$$\frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\alpha} (\sigma^{ab} - g^{ab}) g_{b\beta}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + V(x^\alpha)$$

的海森阵在给定平衡点处定号, 则闭环系统在该平衡点处稳定.

整形方式 2:  $\rho^{ab} = g^{ab} - \sigma^{ab}$ .

控制式 (17) 简化为  $u_a = \frac{d}{dt} ((\rho_{ab} - g_{ab}) \dot{\theta}^b)$ .

Woolsey 利用整形方式 2, 解决了旋转臂-倒立摆的镇定问题<sup>[17]</sup>. Euler-Poincaré 系统也适用于方式 2. Euler-Poincaré 系统除了具有施加控制的循环变量, 其拉格朗日函数也不依赖于形状变量. 比如安装有内驱转子的刚体系统, 构形空间为  $Q = SO(3) \times G$ , 前者代表刚体的姿态, 后者代表转子的角度. 系统的拉格朗日函数既关于  $G$ -循环, 又关于群  $SO(3)$  对称. 目标是通过控制转子运动, 来控制刚体的姿态. 这与通过控制车的运动来镇定摆的位置的车-摆系统, 在驱动方式上构成互补. Euler-Poincaré 系统的开环动能度量是定常的, 为了使闭环系统保留这种性质, 动能整形参数  $\rho_{ab}$  也选为常数. GM-1~GM-4 简化为“Euler-Poincaré 匹配条件”<sup>[27]</sup>:

EP-1:  $\tau_\alpha^b = -\sigma^{ab} g_{b\alpha}$ ;

EP-2:  $\sigma^{ab} + \rho^{ab} = g^{ab}$ ,  $\rho_{ab}$  为常数.

在保留对称性的匹配情形下, 能实现相对平衡点的镇定. 对于  $\theta^a$  是循环变量的情形, 可以镇定相对平衡点  $(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \dot{\theta}^a) = (x_e^\alpha, 0, \dot{\theta}_e^a)$ . 对于 Euler-Poincaré 系统, 可以镇定相对平衡点  $(\dot{x}^\alpha, \dot{\theta}^a) = (\dot{x}_e^\alpha, \dot{\theta}_e^a)$ . 尽管稳态速度  $\dot{x}_e^\alpha, \dot{\theta}_e^a$  可以指定为零, 但系统最终静止构形无法指定.

### 2.5.2 破坏对称性的匹配

为了镇定系统的平衡点, 需要利用势能整形打破对称性. Bloch 等<sup>[23]</sup> 在开环系统不具有循环变量的情形下, 研究了匹配及镇定问题.

Bloch 沿用开环动能度量  $g$  不依赖于  $\theta^a$  的假设, 但不再假设  $\frac{\partial V}{\partial \theta^a} = 0$ , 并将假设  $g_\rho = g$  松弛为

$g_\rho = \rho g_{ab}$ , 其中  $\rho$  是常数. CL 函数写为

$$L_c(\mathbf{v}_q) = \tilde{L}(\mathbf{v}_q) + \frac{1}{2} (\rho - 1) g_{ab} (\dot{\theta}^a + g^{ac} g_{\alpha c} \dot{x}^\alpha + \tau_\alpha^a \dot{x}^\alpha) \times (\dot{\theta}^b + g^{bd} g_{\beta d} \dot{x}^\beta + \tau_\beta^b \dot{x}^\beta) - \tilde{V}(x^\alpha, \theta^a) \quad (20)$$

其中

$$\tilde{L}(\mathbf{v}_q) = L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \theta^a, \dot{\theta}^a + \tau_\alpha^a \dot{x}^\alpha) + \frac{1}{2} \sigma g_{ab} \tau_\alpha^a \tau_\beta^b \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

关于变量  $\theta^a$  的开环 EL 方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^a} \right) + \frac{\partial V}{\partial \theta^a} = u_a \quad (21)$$

相应的闭环 EL 方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_c}{\partial \dot{\theta}^a} \right) + \frac{\partial V}{\partial \theta^a} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta^a} = 0 \quad (22)$$

在满足简化匹配条件 SM-1~SM-4 的前提下, 可以得到反馈控制:

$$u_a = -\frac{d}{dt} (g_{ab} \tau_\alpha^b \dot{x}^\alpha) + \frac{\rho - 1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta^a} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta^a} \quad (23)$$

匹配条件应确保开环  $x^\alpha$ -EL 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (24)$$

在控制式 (23) 间接作用下, 与闭环  $x^\alpha$ -EL 方程 (25) 等价.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L_c}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (25)$$

Bloch 证明了 SM-1~SM-4 及 PDEs 式 (26) 确保匹配,

$$-\left( \frac{\partial V}{\partial \theta^a} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta^a} \right) \left( -\frac{1}{\sigma} + \frac{\rho - 1}{\rho} \right) g^{ad} g_{\alpha d} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (26)$$

而 PDEs 式 (26) 解  $\tilde{V}$  的存在性又等价于条件:

$$\text{SM-5: } \frac{\partial^2 V}{\partial x^\alpha \partial \theta^a} g^{ad} g_{\beta d} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^\beta \partial \theta^a} g^{ad} g_{\alpha d}$$

若  $V(x^\alpha, \theta^a) = V_1(x^\alpha) + V_2(\theta^a)$ , 则 SM-5 满足. 而且在 SM-2 与 SM-4 下, Bloch 指出形状空间  $S$  的一个开子集  $\mathcal{U}$  上总存在函数  $h(x^\alpha)$  满足:

$$\frac{\partial h^\alpha}{\partial x^\alpha} = \left( \frac{\rho - 1}{\rho} - \frac{1}{\sigma} \right) g^{ac} g_{\alpha c} \times h^\alpha(x_e^\alpha) = 0$$

选择新的构形局部坐标:

$$(x^\alpha, y^\alpha) = (x^\alpha, \theta^\alpha + h^\alpha(x^\alpha))$$

则任意函数  $\tilde{V}(y^\alpha)$  均是 PDEs 式 (26) 的解, 可作为整形势能. 以斜面上的车-摆系统为例, SM-1 ~ SM-5 满足, CL 方法可以实现摆向上竖直, 车停在斜面上指定位置的镇定.

**注 3.** 上述两类情形下匹配的共同点是闭环系统为自由拉格朗日系统. 若在闭环系统中引入保守力, 闭环能量仍然守恒, 闭环动能度量及势能函数的选择范围会更大. 对于满足一般匹配或简化匹配的系统, 在闭环系统中引入适当陀螺力将增加控制自由度, 可在镇定之外改善系统动态性能<sup>[8]</sup>.

### 3 CL 法在协调控制多个力学系统中的应用

近年来, 多个力学系统间的协调控制成为研究热点, 其动机来源于实际工程应用. 比如利用多个带有探测器的卫星构成编队, 进行外太空探测. 协调控制目标是同步各卫星的运动, 使得多个探测器的共同使用能大大提高探测精度. 在水下, 携带传感器的无人航行器用于构建传感器网络, 采集洋流信息或搜寻海底资源. 协调控制目标是实时控制各航行器的相对位置与姿态, 使得整个传感器网络在动态的外部干扰下 (如水流作用), 以及未知的外部环境中能最优地采集有用信息.

在协调控制中, 力学系统间存在信息交互. 个体根据接收信息 (如与邻近个体的相对构形、速度) 决策自身运动, 使得群体获得预期的协调行为 (如姿态、速度同步、编队运动等). 针对由多个质点模型构成的网络, 文献 [31] 等把研究重点放在个体间的互联拓扑结构以及群体的协调行为上, 利用图论工具将整个网络建模成有向图模型, 设计了一系列基于一致性思想的协调控制算法, 解决了趋同、入编、编队运动等协调问题.

如果协调目标涉及到相对姿态, 质点模型就勉为其难了. 一些学者基于三维空间中的刚体模型, 开展了姿态协调研究, 比如卫星的姿态同步问题<sup>[32]</sup>. 这类工作将卫星姿态局部参数化成欧拉角或姿态四元素, 利用主从 (Leader-follower) 模式, 将姿态同步问题转化为从对主的轨迹跟踪问题, 借助质点网络模型的协调控制算法实现姿态同步. 然而这类工作存在两个主要缺陷: 1) 卫星姿态的坐标表示不是唯一的, 得到的协调控制存在奇异; 2) 控制没有充分利用系统的姿态动力学特性, 存在控制代价大, 收敛域小等问题.

为了利用力学系统的动力学特性, 发挥个体最大机动性, 一些学者尝试着以能量的观点来研究协调问题, 其依据是能量的加和性, 将存在信息交互的多个力学系统看成是一个能量为个体能量之和的力

学系统 (如 EL 系统).

文献 [33] 首先采用动能整形研究了移动式机器人编队的运动规划问题. 文中构造了编队的动能度量, 可由一个参数修改. 该度量确定了一个路径优化指标, 在该指标下, 编队不但能实现最短路径规划, 而且通过调节参数还能实现队形变化. 文献 [12] 研究了刚体网络的协调运动, 作者在网络中引入仅依赖于刚体间相对构形的人工势能, 其在同步姿态及给定相对位置处取极值. 引入人工势能后的网络是一个具有对称性的哈密顿系统, 作者证明了当个体动力学稳定时, 网络动力学具有表征为协调运动的相对平衡点, 并且是稳定的. 文献 [34] 将该结果推广到个体含有不稳定动力学的情形, 主要策略是利用动能整形镇定个体, 配合人工势能实现协调, 镇定了水下舰艇群沿不稳定轴向的同步运动.

从物理上讲, 由控制引入的人工势能, 所起的作用类似于在个体间施加了作用力与反作用力. 这样, 多个力学系统的动态行为变得与多体动力学相似, 协调控制因此转化为针对多体动力学的控制. 基于能量整形 (如 CL 法) 的协调控制不涉及姿态的局部参数化, 并能充分利用个体动力学特性, 具有大收敛域.

利用 CL 法设计协调控制的特点是能够综合考虑个体动力学与协调. 当个体动力学带有不稳定模式或欠驱动时, 该特点尤显重要, 这在文献 [11] 中得到体现. 该文研究了平面上车-摆网络的同步控制. 若独立考虑镇定与同步, 会利用 CL 法定定单个车-摆系统, 再基于车的相对位置设计人工势能. 但仿真结果表明, 如此得到的控制无法实现稳定同步. 实际上, 当作者针对整个车-摆网络构造 CL 函数时, 整形势能是同时依赖于车的相对位置与摆的相对角度的函数, 结合车-摆动能整形, 才能证明同步运动的稳定性. 在许多工程应用中, 比如多个卫星的姿态同步、多个无人机的协调运动规划, 个体动力学的稳定性至关重要, 而且与群体协调性有着很强的耦合. 利用 CL 法设计协调控制, 是解决这类问题的一种有效方法.

根据已发表的文献, 利用 CL 法设计协调控制主要集中在全驱动情形. 对于欠驱动情形, 目前只有文献 [11]. 虽然 CL 法在镇定欠驱动力学系统中具有独特优势, 但其可行性 (即匹配条件的可解性, 以及解的稳定性), 尤其是能否应用到给定网络的协调控制中是不容易判断的.

仍以平面上的车-摆网络为例, 虽然单个车是欠驱动的, 但是需要协调的变量 (车的相对位置) 是控制直接作用的方向. 另外, 单个车-摆系统满足简化匹配条件, 可以猜测利用 CL 法设计协调控制是可行的. 对于稍复杂的力学系统网络, 目前尚未见到判断 CL 法可行的完备结果. 主要难点归结于欠驱

动对可构造人工势能的限制. 文献 [6] 利用微分几何工具研究了在动能整形完成后, 势能整形的可行性, 用公式表示为

$$g_{ol}^b g_{cl}^\# dV_{cl} - dV_{ol} \subset W \quad (27)$$

其中,  $g_{ol}$ ,  $g_{cl}$  分别是开环与闭环动能度量,  $V_{ol}$ ,  $V_{cl}$  分别是开环与闭环势能函数,  $W$  是控制丛代表控制驱动方向. 在协调控制中,  $V_{cl}$  包含人工势能, 关系式 (27) 表明只有当闭环势场力 (经过动能度量作用) 包含在由各个体的控制输入以及开环势场力构成的对偶切丛内, 人工势能才能通过控制实现. 给定一个力学系统网络, 根据协调目标以及式 (27), 能否构造出可行的人工势能是 CL 法设计协调控制的关键. 考虑到协调中只关注相对构形, 与控制单个力学系统相比: 1) 势能整形 (27) 是否具有额外设计自由度? 2) 如何利用额外自由度简化匹配设计? 目前针对这两个问题还未见完备的解答, 需要进行深入研究.

#### 4 尚存问题及未来研究方向

关于 CL 法一些尚未解决的问题, 以及未来研究方向包括:

1) 匹配条件的可解性及能量整形的可镇定性. 尽管针对特定力学系统, 许多研究表明可以找到匹配的简化途径, 但是我們希望能通过研究匹配 PDEs, 深刻认识能量整形的本质, 从而能得到一个更系统化的设计方法. 匹配条件可解并不意味着镇定可实现, 只有其解集中存在满足稳定性条件的解, 才能得到相应的镇定控制, 这涉及到能量整形的可镇定性判定. 最近的研究<sup>[7, 35-36]</sup> 已经开始关注这一方向, 主要针对线性简单力学系统, 线性可控且具有单个欠驱动变量的简单力学系统, 得到了可匹配、可镇定的判据. 上述工作应用了仿射微分几何, 以及偏微分方程的几何理论来分析能量整形中的匹配 PDEs. 对于一般简单力学系统, 如何利用这些几何工具计算所有匹配的闭环动能度量、闭环势能函数, 并在闭环势能函数中寻找稳定解, 进而给镇定问题一个完备的解集描述; 或给出匹配条件无镇定解的判据, 都是尚未解决并值得深入研究的问题.

2) 跟踪. CL 法通常用于 (相对) 平衡点的镇定, 轨迹跟踪是 CL 法还未能有效解决的问题. Bloch 等<sup>[23]</sup> 尝试着使用 CL 法解决车-摆系统的跟踪问题, 设计思想是构造一个时变的势能函数, 使其极值点跟踪期望轨迹, 将跟踪问题转化为镇定问题. 对于期望轨迹的加速度为常值的情形, 相应的控制设计得到简化, 仿真结果表明该设计思想的可行性. 类似地, Zenkov 等<sup>[10]</sup> 通过构造时变 CL 函数, 研究了具有对称性力学系统的匀加速轨迹跟踪问题. 针对实际力学系统, Woolsey 等<sup>[37]</sup> 通过势能整形解决了一

类欠驱动水下航行器的轨迹跟踪问题. 但是, 针对一般构形流形上的力学系统, 任意指定轨迹, 构造时变 CL 函数会涉及到流形上不同构形, 以及不同构形处切向量的比较. 这不能通过简单的减法获得相差量, 可以借鉴 Bullo 等<sup>[38]</sup> 定义的误差函数以及传输映射来刻画这些几何量的差别. Bullo<sup>[39]</sup> 考虑了全驱动力学系统的轨迹跟踪, 欠驱动力学系统的轨迹跟踪则更具挑战性. 利用 CL 法研究欠驱动力学系统的跟踪问题是对 CL 法的重要推广.

3) 运动规划. Frazzoli 等<sup>[40]</sup> 首先提出了拼接相对平衡点的运动规划思想, 这又给 CL 法提供了一个镇定之外的应用方向. 力学系统的相对平衡点是一种稳态运动 (匀速直线、圆周、螺旋运动等), 其特点是不需要或仅需简单的控制就能维持, 是一种低能耗的运动方式. Bhatta 等<sup>[41]</sup> 通过合理拼接水下滑翔艇的若干稳态运动, 实现了给定路径的近似跟踪, 其低能耗性适用于长期水下运动规划. Bhatta 的镇定、拼接设计依赖于特定对象, 若想推广到一般力学系统, 可以考虑 CL 法, 关键技术在于实现相对平衡点之间的切换. 一个自然的想法就是镇定每个相对平衡点, 并使得切换前的相对平衡点位于切换后相对平衡点的收敛域内. 另一种想法是在两个相对平衡点间规划出一条轨迹, 以跟踪方式解决切换问题. 力学系统的运动规划是一种带有漂移项的运动规划, 这对规划轨迹的可行性提出了很高的要求. 相对平衡点之间的切换必须考虑漂移项的影响, 能否在统一的 CL 法框架下实现相对平衡点的镇定与切换, 是将 CL 法应用到运动规划中需要研究和解决的问题.

4) 鲁棒性能分析. 主要是研究未建模动力学对闭环系统性能的影响. Woolsey<sup>[22]</sup> 已经研究了能量整形后闭环系统稳定性对物理阻尼影响的鲁棒性. 但对于未建模动力学, 尤其是未建模的欠驱动力学对闭环性能的影响还不清楚. 这方面研究将有助于回答一个系统究竟可以欠驱动到什么程度仍能被 CL 法定镇的问题, 并将 CL 法推广到无穷维力学系统 (比如柔性机械臂) 的控制.

5) 研究 CL 法与其他能量整形控制方法的联系. 哈密尔顿框架下的能量整形控制设计方法: 互联及阻尼分配的无源化 (Interconnection and damping assignment passivity-based control, IDA-PBC) 控制<sup>[42]</sup> 已应用到简单力学系统之外的物理系统 (电动机、感应发电机、功率整流器、磁悬浮系统、电力系统) 的控制<sup>[43-46]</sup>. 这主要是由于 IDA-PBC 是针对端口受控的哈密尔顿系统提出的, 能够包含的物理系统更广. 但从本质上讲, 哈密尔顿力学系统与拉格朗日力学系统, CL 法与 IDA-PBC 法都是等价的<sup>[47]</sup>. 深入研究 CL 法与 IDA-PBC 法在控制器综合中的关联, 比如在受控闭环系统的结构与能量函

数的构造方面,在能量整形匹配条件的求解方面的联系,尝试将 CL 法应用延伸到广泛一类可由 EL 方程描述的实际系统,这既是验证,又是促进 CL 法自身发展的有效途径。

6) 探索 CL 法与最优控制的联系. 由于描述力学系统动态行为的 EL 方程是通过对其拉格朗日函数实施哈密尔顿最小作用原理得到的,因此,CL 法设计出的控制律具有在一定度量下的最优性. 如何将这种思想体现在一般非线性系统的控制设计中是一个值得思考的问题. 一般非线性系统不再具有能量、动能度量、势能等概念,我们需要构造一个既能反映系统演化规律,又能衡量一定性能指标的量,称之为待整形量,并借此确定一个期望的动态系统作为整形目标. 这类似于构造李亚普诺夫函数(广义能量函数)进行镇定设计,只是待整形量还应具有衡量系统性能的功能. 构造待整形量没有通用的办法,需依靠我们对受控系统结构的认识和利用。

## 5 总结

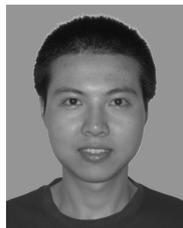
本综述在几何力学框架下,介绍了一种基于能量观点的控制律设计方法:受控拉格朗日函数方法;列举了自提出至今,各研究团队对 CL 法所作的多方面理论及应用的推广;讨论了 CL 法现存的问题,以及未来研究方向。

每个非线性系统都是不同的,虽然找不到通用的控制律设计方法,但可以摸索出科学的方法论来指导设计. CL 法在控制简单力学系统中的成功应用,正体现了这样一种方法论,它带领非线性系统的控制从线性化、高增益时代步入了一个学会尊重、利用,并与非线性共存的时代。

## References

- 1 Takegaki M, Arimoto S. A new feedback method for dynamic control of manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1981, **103**(2): 119–125
- 2 Schaft V D A J. Stabilization of Hamiltonian systems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1986, **10**(10): 1021–1035
- 3 Bloch A M, Leonard N E, Marsden J E. Stabilization of mechanical systems using controlled Lagrangians. In: Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, USA: IEEE, 1997. 2356–2361
- 4 Bloch A M, Leonard N E, Marsden J E. Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems I: the first matching theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(12): 2253–2269
- 5 Lewis A D. Notes on energy shaping. In: Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Nassau, Bahamas: IEEE, 2004. 4818–4823
- 6 Lewis A D. Potential energy shaping after kinetic energy shaping. In: Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, USA: IEEE, 2006. 3339–3344
- 7 Gharesifard B, Lewis A D, Mansouri A R. A geometric framework for stabilization by energy shaping: sufficient conditions for existence of solutions. *Communications in Information and Systems*, 2008, **8**(4): 353–398
- 8 Reddy C K. Practical Challenges in the Method of Controlled Lagrangians [Ph. D. dissertation], Virginia Polytechnic Institute and State University, USA, 2005
- 9 Long D, Zenkov D V. Relaxed matching for stabilization of relative equilibria of mechanical systems. In: Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, USA: IEEE, 2007. 6238–6243
- 10 Zenkov D V, Bloch A M, Marsden J E. Controlled Lagrangian methods and tracking of accelerated motions. In: Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, USA: IEEE, 2003. 533–538
- 11 Nair S N, Leonard N E. Stable synchronization of mechanical system networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2008, **47**(2): 661–683
- 12 Nair S N, Leonard N E. Stable synchronization of rigid body networks. *Networks and Heterogeneous Media*, 2007, **2**(4): 595–624
- 13 Machleidt K, Kroneis J, Liu S. Stabilization of the Furuta pendulum using a nonlinear control law based on the method of controlled Lagrangians. In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics. Vigo, Spain: IEEE, 2007. 2129–2134
- 14 Freidovich L, Shiriaev A, Gordillo F, Gomez-Estern F, Aracil J. Partial-energy-shaping control for orbital stabilization of high-frequency oscillations of the Furuta pendulum. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, **17**(4): 853–858
- 15 Zenkov D V, Bloch A M, Marsden J E. Flat nonholonomic matching. In: Proceedings of the American Control Conference. Anchorage, USA: IEEE, 2002. 2812–2817
- 16 Li Mao-Qing. Stabilization controller design of Pendubot based on controlled Lagrangians. *Control and Decision*, 2010, **25**(5): 663–668  
(李茂青. 基于受控拉格朗日函数的 Pendubot 镇定控制器设计. 控制与决策, 2010, **25**(5): 663–668)
- 17 Li Mao-Qing. Control design for planar vertical takeoff-and-landing aircraft based on controlled Lagrangians. *Control Theory and Applications*, 2010, **27**(6): 688–694  
(李茂青. 基于受控拉格朗日函数的垂直起降飞机控制器设计. 控制理论与应用, 2010, **27**(6): 688–694)
- 18 Reddy C K, Woolsey C A. Energy shaping for vehicles with point mass actuators. In: Proceedings of the American Control Conference. Minneapolis, USA: IEEE, 2006. 4291–4296
- 19 Bullo F, Lewis A D. *Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems*. New York: Springer, 2005
- 20 Marsden J E. *Lectures on Mechanics*. New York: Cambridge University Press, 1992
- 21 Khalil H K. *Nonlinear Systems (Third Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 2002
- 22 Woolsey C A. Energy Shaping and Dissipation: Underwater Vehicle Stabilization Using Internal Rotors [Ph. D. dissertation], Princeton University, USA, 2001
- 23 Bloch A M, Chang D E, Leonard N E, Marsden J E. Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems II: potential shaping. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(10): 1556–1571
- 24 Wu F, Geng Z Y. Energy shaping for coordinating internally actuated vehicles. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2011, **1**(2): 023002.1–023002.5

- 25 Wu F, Geng Z Y. Stabilization of coordinated motion for underwater vehicles. *Acta Mechanica Sinica*, 2011, **27**(3): 438–444
- 26 Auckly D, Kapitanski L. On the  $\lambda$ -equations for matching control laws. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002, **41**(5): 1372–1388
- 27 Bloch A M, Leonard N E, Marsden J E. Controlled Lagrangians and the stabilization of Euler-Poincare mechanical systems. *International Journal on Robust and Nonlinear Control*, 2001, **11**(1): 191–214
- 28 Viola G, Ortega R, Banavar R, Acosta J A, Astolfi A. Total energy shaping control of mechanical systems: simplifying the matching equations via coordinate changes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(6): 1093–1099
- 29 Li M Q, Huo W. Controller design for mechanical systems with underactuation degree one based on controlled Lagrangians method. *International Journal of Control*, 2009, **82**(9): 1747–1761
- 30 Chang D E. The method of controlled Lagrangians: energy plus force shaping. In: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control Held Jointly with the 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China, 2009. 3329–3334
- 31 Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1465–1476
- 32 VanDyke M C, Hall C D. Decentralized coordinated attitude control of a formation of spacecraft. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2006, **29**(5): 1101–1109
- 33 Belta C, Kumar V. Motion generation for formations of robots: a geometric approach. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Seoul, Korea: IEEE, 2001. 1245–1250
- 34 Hansmann H, Leonard N E, Smith T R. Symmetry and reduction for coordinated rigid bodies. *European Journal of Control*, 2006, **12**(2): 176–194
- 35 Gharesifard B. A Geometric Approach to Energy Shaping [Ph.D. dissertation], Queen's University, Canada, 2009
- 36 Chang D E. Stabilizability of controlled Lagrangian systems of two degrees of freedom and one degree of under-actuation by the energy-shaping method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(8): 1888–1893
- 37 Woolsey C A, Teych L. Cross-track control of a slender, underactuated AUV using potential shaping. *Ocean Engineering*, 2009, **36**(1): 82–91
- 38 Bullo F, Murray R M. Tracking for fully actuated mechanical systems: a geometric framework. *Automatica*, 1999, **35**(1): 17–34
- 39 Bullo F. Nonlinear Control of Mechanical Systems: a Riemannian Geometry Approach [Ph.D. dissertation], California Institute of Technology, USA, 1999
- 40 Frazzoli E. Robust Hybrid Control for Autonomous Vehicle Motion Planning [Ph.D. dissertation], Massachusetts Institute of Technology, USA, 2001
- 41 Bhatta P. Nonlinear Stability and Control of Gliding Vehicles [Ph.D. dissertation], Princeton University, USA, 2006
- 42 Ortega R, Spong M W, Gomez-Estern F, Blankenstein G. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(8): 1218–1233
- 43 Ortega R, Canseco E G. Interconnection and damping assignment passivity-based control: a survey. *European Journal of Control*, 2004, **10**(5): 432–450
- 44 Yu H S, Zou Z W, Tang Y L. Speed control of PMSM based on energy-shaping and PWM signal transformation principle. In: Proceedings of the International Conference on Electrical Machines and Systems. Wuhan, China: IEEE, 2008. 3166–3170
- 45 Donaire A, Junco S. Energy shaping, interconnection and damping assignment, and integral control in the bond graph domain. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 2009, **17**(1): 152–174
- 46 Battle C, Doria-Cerezo A, Espinosa-Perez G, Ortega R. Simultaneous interconnection and damping assignment passivity-based control: the induction machine case study. *International Journal of Control*, 2009, **82**(2): 241–255
- 47 Chang D E. Controlled Lagrangian and Hamiltonian Systems [Ph.D. dissertation], California Institute of Technology, USA, 2002



吴凡 北京大学力学与空天技术系博士。主要研究方向为力学系统的非线性控制。本文通信作者。

E-mail: wufan@pku.edu.cn

(WU Fan Ph.D. in the Department of Mechanics and Aerospace Engineering, Peking University. His main research interest is nonlinear control of mechanical systems. Corresponding author of this paper.)



耿志勇 北京大学力学与空天技术系教授。主要研究方向为鲁棒与非线性控制，力学系统的非线性控制。

E-mail: zygen@pku.edu.cn

(GENG Zhi-Yong Professor in the Department of Mechanics and Aerospace Engineering, Peking University. His research interest covers robust

and nonlinear control, nonlinear control of mechanical systems.)