

含未知参数的自校正融合 Kalman 滤波器及其收敛性

陶贵丽^{1,2} 邓自立¹

摘要 对于带未知模型参数和噪声方差的多传感器系统, 基于分量按标量加权最优融合准则, 提出了自校正解耦融合 Kalman 滤波器, 并应用动态误差系统分析 (Dynamic error system analysis, DESA) 方法证明了它的收敛性. 作为在信号处理中的应用, 对带有色和白色观测噪声的多传感器多维自回归 (Autoregressive, AR) 信号, 分别提出了 AR 信号模型参数估计的多维和多重偏差补偿递推最小二乘 (Bias compensated recursive least-squares, BCRLS) 算法, 证明了两种算法的等价性, 并且用 DESA 方法证明了它们的收敛性. 在此基础上提出了 AR 信号的自校正融合 Kalman 滤波器, 它具有渐近最优性. 仿真例子说明了其有效性.

关键词 多传感器信息融合, 自校正融合, 偏差补偿最小二乘法, 收敛性, 动态误差系统分析方法, Kalman 滤波器

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00109

Self-tuning Fusion Kalman Filter with Unknown Parameters and Its Convergence

TAO Gui-Li^{1,2} DENG Zi-Li¹

Abstract For the multisensor systems with unknown model parameters and noise variances, a self-tuning decoupled fused Kalman filter is presented based on the optimal fusion rule weighted by scalars for components. Its convergence is proved by using the dynamic error system analysis (DESA) method. As an application to signal processing, the multidimensional and multiple bias compensated recursive least-squares (BCRLS) algorithms for estimating the AR parameters are presented for the multisensor multidimensional autoregressive (AR) signal with white and colored measurement noises. The equivalence between the two BCRLS algorithms is proved. The convergence of the two BCRLS algorithms is proved by DESA method. Further more, a self-tuning fused Kalman filter for the AR signal is presented, which has asymptotic optimality. A simulation example shows the effectiveness.

Key words Multisensor information fusion, self-tuning fusion, bias compensated least-squares (BCRLS) method, convergence, dynamic error system analysis (DESA) method, Kalman filter

近年来, 多源信息融合技术广泛应用于高技术领域, 包括军事、国防、精确制导、GPS 定位、遥感、机器人、图像和信号处理等^[1]. 而基于 Kalman 滤波的融合估计, 有两种融合方法: 集中式和分布式融合方法^[2-3]. 集中式融合方法合并多传感器所有观测方程为一个扩维观测方程, 然后, 与状态方程联立可获得全局最优融合状态估计, 但它的缺点是承担大量的计算负担, 且容错性差. 分布式融合方法用组合局部估值器可获得全局最优融合状态估计^[3], 或用加权局部估值器可获得全局次优融合状态估计^[4]. 其优点是可减小计算负担, 便于故障诊断与分离. 在

线性最小方差意义下, 文献 [4-5] 提出了按矩阵、对角阵和标量加权的最佳信息融合准则, 其中, 按对角阵加权最优融合准则等效于对分量按标量加权准则, 实现了状态分量的解耦融合估计.

到目前为止, 现有的信息融合 Kalman 滤波主要集中在已知模型参数和噪声方差的系统, 这限制了它的实际应用. 在很多应用中, 模型参数和噪声方差是完全或部分未知的. 这种系统的滤波称为自校正滤波^[6-9] 或鲁棒 Kalman 滤波^[10-12]. 文献 [13-16] 分别基于现代时间序列分析方法和 Kalman 滤波方法, 报道了几种自校正加权融合滤波器, 其中, 文献 [16] 允许状态转移阵中含有未知参数. 文献 [17-19] 分别提出了自校正观测融合 Kalman 滤波器和自校正解耦融合 Kalman 预报器. 但它们的缺点是仅噪声方差未知, 而模型参数是已知的.

自校正滤波的原理是: 将未知模型参数和噪声方差的在线辨识器代入到最优滤波器中引出自校正滤波器. 它的一个关键问题是辨识问题; 另一个关键问题是辨识器和自校正滤波器的收敛性问题.

文献 [13-14] 提出了自校正滤波器的收敛性分析方法即动态误差系统分析 (Dynamic error system

收稿日期 2010-11-17 录用日期 2011-09-07
Manuscript received November 17, 2010; accepted September 7, 2011

国家自然科学基金 (60874063), 黑龙江省教育厅科学技术研究项目 (11553101), 黑龙江大学自动控制重点实验室项目资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60874063), Science and Technology Research Foundation of Heilongjiang Education Administrator (11553101), and Automatic Control Key Laboratory of Heilongjiang University

本文责任编辑 韩崇昭
Recommended by Associate Editor HAN Chong-Zhao

1. 黑龙江大学自动化系 哈尔滨 150080 2. 黑龙江科技学院计算机与信息工程学院 哈尔滨 150027

1. Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin 150080 2. Computer and Information Engineering College, Heilongjiang Institute of Science and Technology, Harbin 150027

analysis, DESA) 方法, 并提出了按一个实现收敛的新概念, 它比以概率 1 收敛更弱. 文献 [19–20] 提出了自校正 Riccati 方程和 Lyapunov 方程的收敛性分析方法即动态方差误差系统分析 (Dynamic variance error system analysis, DVESA) 方法.

为了克服假设模型参数已知或仅假设状态转移阵中含有未知参数的局限性, 本文对于一般带未知模型参数和噪声方差的多传感器系统, 提出了分量按标量加权自校正融合 Kalman 状态滤波器, 并应用 DESA 方法证明了其收敛性, 即自校正融合 Kalman 滤波器按一个实现收敛于最优融合 Kalman 滤波器, 因此, 它具有渐近最优性.

作为在信号处理中的应用, 本文对带有有色和白色观测噪声的多传感器多维自回归 (Autoregressive, AR) 信号, 当 AR 信号模型参数和噪声方差未知, 但有色和白色观测噪声的模型参数和噪声方差已知时, 分别提出了 AR 参数估计的多维和多重偏差补偿递推最小二乘 (Bias compensated recursive least-squares, BCRLS) 算法, 不仅证明了两种 BCRLS 算法的等价性, 而且用 DESA 方法证明了它们的收敛性. 同系统辨识中 Ljung^[21] 提出的收敛性分析的常微分方程 (Ordinary differential equation, ODE) 方法相比, ODE 方法原理是将参数估计收敛性问题转化为常微分方程的稳定性问题. 而 DESA 方法原理是将收敛性问题转化为差分方程 (动态误差系统) 稳定性问题. 进一步提出了上述多维 AR 信号的具有渐近最优性的自校正融合 Kalman 滤波器.

1 最优分量按标量加权融合 Kalman 滤波器

考虑带 L 个传感器的线性离散时不变随机系统

$$\mathbf{x}(t+1) = \Phi(\theta)\mathbf{x}(t) + \Gamma(\theta)\mathbf{w}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{H}_i(\theta)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (2)$$

其中, $t \geq 0$ 是离散时间, 状态 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, 观测 $\mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i}$, $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^r$ 和 $\mathbf{v}_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i}$ 分别是输入和观测白噪声. 状态转移阵 Φ , 观测阵 \mathbf{H}_i 和输入噪声转移阵 Γ 中包含未知参数向量或矩阵 θ . 当 θ 已知时, 定义 $\Phi(\theta) = \Phi$, $\mathbf{H}_i(\theta) = \mathbf{H}_i$, $\Gamma(\theta) = \Gamma$.

假设 1. $\mathbf{w}(t)$ 和 $\mathbf{v}_i(t)$ 分别是带零均值、方差为 \mathbf{Q}_w 和 \mathbf{Q}_{v_i} 的不相关白噪声, 即

$$\mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{v}_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T(k) & \mathbf{v}_j^T(k) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{v_i} \delta_{ij} \end{bmatrix} \delta_{tk} \quad (3)$$

其中, $\delta_{tt} = 1$, $\delta_{tk} = 0$ ($t \neq k$), \mathbf{E} 为均值号, Γ 表示转置.

假设 2. 当 θ 已知时, Φ 是非奇异阵, (Φ, \mathbf{H}_i) 是完全可观测, (Φ, Γ) 是完全可控对.

假设 3. 参数向量或矩阵 θ 是未知的, 噪声方差阵 \mathbf{Q}_w 和 \mathbf{Q}_{v_i} ($i = 1, \dots, L$) 是完全或部分未知的. Φ , \mathbf{H}_i 和 Γ 中的每个未知元素都是关于 θ 的连续函数.

假设 4. 观测数据 $\mathbf{y}_i(t)$ (观测随机过程 $\mathbf{y}_i(t)$ 的一个实现) 关于 t 是有界的, 即 $\|\mathbf{y}_i(t)\| \leq c_i, \forall t \geq 0$, 其中, $\|\cdot\|$ 表示向量的范数, c_i 为常数, $i = 1, 2, \dots, L$.

引理 1^[22]. 对于带已知模型参数和噪声方差的多传感器系统 (1) 和 (2), 在假设 1 和 2 下, 对第 i 个传感器, 有状态 $\mathbf{x}(t)$ 的局部最优时变 Kalman 滤波器为

$$\hat{\mathbf{x}}_i(t|t) = \Psi_i(t)\hat{\mathbf{x}}_i(t-1|t-1) + \mathbf{K}_i(t)\mathbf{y}_i(t) \quad (4)$$

$$\Psi_i(t) = [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_i(t)\mathbf{H}_i]\Phi \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_i(t) = \Sigma_i(t|t-1)\mathbf{H}_i^T(\mathbf{H}_i\Sigma_i(t|t-1)\mathbf{H}_i^T + \mathbf{Q}_{v_i})^{-1} \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_i(t|t) = [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_i(t)\mathbf{H}_i]\Sigma_i(t|t-1) \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i(0|0) = \boldsymbol{\mu}_0, \quad \mathbf{P}_i(0|-1) = \mathbf{P}_0 \quad (8)$$

其中, 预报误差方差阵 $\Sigma_i(t|t-1)$ 满足最优 Riccati 方程

$$\begin{aligned} \Sigma_i(t+1|t) = & \Phi[\Sigma_i(t|t-1) - \Sigma_i(t|t-1)\mathbf{H}_i^T \times \\ & (\mathbf{H}_i\Sigma_i(t|t-1)\mathbf{H}_i^T + \mathbf{Q}_{v_i})^{-1}\mathbf{H}_i \times \\ & \Sigma_i(t|t-1)]\Phi^T + \Gamma\mathbf{Q}_w\Gamma^T \quad (9) \end{aligned}$$

局部滤波误差协方差阵 $\mathbf{P}_{ij}(t|t) = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{x}}_i(t|t)\tilde{\mathbf{x}}_j^T(t|t)]$, $i, j = 1, 2, \dots, L$, $\tilde{\mathbf{x}}_k(t|t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}_k(t|t)$, 满足 Lyapunov 方程

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ij}(t|t) = & \Psi_i(t)\mathbf{P}_{ij}(t-1|t-1)\Psi_j^T(t) + \\ & [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_i(t)\mathbf{H}_i]\Gamma\mathbf{Q}_w\Gamma^T[\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_j(t)\mathbf{H}_j]^T, \quad i \neq j \quad (10) \end{aligned}$$

其中, $i, j = 1, 2, \dots, L$, 且定义 $\mathbf{P}_{ii}(t|t) = \mathbf{P}_i(t|t)$.

引理 2^[13–14]. 对于带已知模型参数和噪声方差的多传感器系统 (1) 和 (2), 在假设 1 和 2 下, 有分量按标量加权最优解耦融合 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}_0(t|t)$ 为

$$\hat{\mathbf{x}}_0(t|t) = [\hat{x}_{01}(t|t), \dots, \hat{x}_{0n}(t|t)]^T \quad (11)$$

$$\hat{x}_{0i}(t|t) = \sum_{j=1}^L \omega_{ji}(t)\hat{x}_{ji}(t|t), \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

其中, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, $\hat{x}_{ji}(t|t)$ 是 $\mathbf{x}(t)$ 的局部最优 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}_j(t|t)$ 的第 i 个分量, 即 $\hat{\mathbf{x}}_j(t|t) = [\hat{x}_{j1}(t|t), \dots, \hat{x}_{jn}(t|t)]^T$, $\hat{x}_{0i}(t|t)$ 是 $\hat{\mathbf{x}}_0(t|t)$ 的第 i 个分量. 最优权 $\boldsymbol{\omega}_i(t) = [\omega_{1i}(t), \dots, \omega_{Li}(t)]$ 为

$$\boldsymbol{\omega}_i(t) = [\mathbf{e}^T (\mathbf{P}^{ii}(t|t))^{-1} \mathbf{e}]^{-1} \mathbf{e}^T (\mathbf{P}^{ii}(t|t))^{-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

其中, $\mathbf{e}^T = [1, \dots, 1]$, $L \times L$ 矩阵 $\mathbf{P}^{ii}(t|t)$ 定义为

$$\mathbf{P}^{ii}(t|t) = (P_{kj}^{ii}(t|t)) \quad (14)$$

$P_{kj}^{ii}(t|t)$ 是 $\mathbf{P}_{kj}(t|t)$ 的第 (i, i) 对角元素, $\mathbf{P}_{kj}(t|t)$ 通过式 (7) 和式 (10) 计算. 定义 $\hat{x}_{0i}(t|t) = x_i(t) - \hat{x}_{0i}(t|t)$, 融合误差方差 $P_{0i}(t|t) = E[\hat{x}_{0i}^2(t|t)]$ 为

$$P_{0i}(t|t) = [\mathbf{e}^T (\mathbf{P}^{ii}(t|t))^{-1} \mathbf{e}]^{-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

且有精度关系

$$P_{0i}(t|t) \leq P_{jj}^{ii}(t|t), \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, L \quad (16)$$

其中, $P_{jj}^{ii}(t|t)$ 是 $\hat{x}_{ji}(t|t)$ 的误差方差. 关系式 (16) 说明融合分量滤波器 $\hat{x}_{0i}(t|t)$ 的精度高于局部分量滤波器 $\hat{x}_{ji}(t|t)$ 的精度, $j = 1, \dots, L$.

2 自校正解耦融合 Kalman 滤波器

当模型参数和噪声方差未知时, 把估值代入最优融合 Kalman 滤波器得到自校正融合 Kalman 滤波器. 它可由如下 3 步实现.

步骤 1. 应用系统辨识方法^[21] (例如递推辅助变量 (Recursive instrumental variable, RIV) 算法, 递推增广最小二乘 (Recursive extended least squares, RELS) 算法, 偏差补偿递推最小二乘 (BCRLS) 算法等) 能够得到未知参数 $\boldsymbol{\theta}$ 在时刻 t 处的融合估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ ^[23]. 应用相关方法^[17, 19, 23], 能够得到在时刻 t 处的噪声方差融合估值 $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$ 和 $\hat{\mathbf{Q}}_{vi}(t)$, 且它们具有一致性, 即

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) &\rightarrow \boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{Q}}_w(t) \rightarrow \mathbf{Q}_w, \hat{\mathbf{Q}}_{vi}(t) \rightarrow \mathbf{Q}_{vi} \\ t &\rightarrow \infty, \text{ i.a.r} \end{aligned} \quad (17)$$

其中, 符号 “i.a.r” 表示 “按一个实现” 收敛^[13-14], 它是 “in a realization” 的缩写.

步骤 2. 把融合估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$ 和 $\hat{\mathbf{Q}}_{vi}(t)$ 代入式 (4) ~ (10), 得到自校正局部 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}_i^s(t|t)$ ($i = 1, \dots, L$) 为

$$\hat{\mathbf{x}}_i^s(t|t) = \hat{\Psi}_i(t) \hat{\mathbf{x}}_i^s(t-1|t-1) + \hat{\mathbf{K}}_i(t) \mathbf{y}_i(t) \quad (18)$$

$$\hat{\Psi}_i(t) = [\mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{K}}_i(t) \hat{\mathbf{H}}_i(t)] \hat{\Phi}(t) \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_i(t) = \hat{\Sigma}_i(t|t-1) \hat{\mathbf{H}}_i^T(t) (\hat{\mathbf{H}}_i(t) \hat{\Sigma}_i(t|t-1) \times \hat{\mathbf{H}}_i^T(t) + \hat{\mathbf{Q}}_{vi}(t))^{-1} \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_i(t|t) = [\mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{K}}_i(t) \hat{\mathbf{H}}_i(t)] \hat{\Sigma}_i(t|t-1) \quad (21)$$

其中, 估值 $\hat{\Sigma}_i(t+1|t)$ 满足自校正 Riccati 方程

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_i(t+1|t) &= \hat{\Phi}(t) [\hat{\Sigma}_i(t|t-1) - \hat{\Sigma}_i(t|t-1) \times \\ &\hat{\mathbf{H}}_i^T(t) (\hat{\mathbf{H}}_i(t) \hat{\Sigma}_i(t|t-1) \hat{\mathbf{H}}_i^T(t) + \hat{\mathbf{Q}}_{vi}(t))^{-1} \times \\ &\hat{\mathbf{H}}_i(t) \hat{\Sigma}_i(t|t-1)] \hat{\Phi}^T(t) + \hat{\Gamma}(t) \hat{\mathbf{Q}}_w(t) \hat{\Gamma}^T(t) \end{aligned} \quad (22)$$

其中, 定义 $\hat{\Phi}(t) = \Phi(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t))$, $\hat{\mathbf{H}}_i(t) = \mathbf{H}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t))$, $\hat{\Gamma}(t) = \Gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t))$.

根据式 (10), 估值 $\hat{\mathbf{P}}_{ij}(t|t)$ 满足自校正 Lyapunov 方程

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{ij}(t|t) &= \hat{\Psi}_i(t) \hat{\mathbf{P}}_{ij}(t-1|t-1) \hat{\Psi}_j^T(t) + [\mathbf{I}_n - \\ &\hat{\mathbf{K}}_i(t) \hat{\mathbf{H}}_i(t)] \hat{\Gamma}(t) \hat{\mathbf{Q}}_w(t) \hat{\Gamma}^T(t) [\mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{K}}_j(t) \hat{\mathbf{H}}_j(t)]^T \\ &i \neq j, i = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (23)$$

定义 $\hat{\mathbf{P}}_{ii}(t|t) = \hat{\mathbf{P}}_i(t|t)$.

步骤 3. 在分量按标量加权最优融合准则下, 根据式 (11) ~ (15), 自校正解耦融合 Kalman 滤波器为

$$\hat{x}_{0i}^s(t|t) = \sum_{j=1}^L \hat{\omega}_{ji}(t) \hat{x}_{ji}^s(t|t), \quad i = 1, \dots, n \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^s(t|t) = [\hat{x}_{01}^s(t|t), \dots, \hat{x}_{0n}^s(t|t)]^T \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_j^s(t|t) = [\hat{x}_{j1}^s(t|t), \dots, \hat{x}_{jn}^s(t|t)]^T \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\omega}}_i(t) &= [\hat{\omega}_{1i}(t), \dots, \hat{\omega}_{Li}(t)] = \\ &[\mathbf{e}^T (\hat{\mathbf{P}}^{ii}(t|t))^{-1} \mathbf{e}]^{-1} \mathbf{e}^T (\hat{\mathbf{P}}^{ii}(t|t))^{-1} \end{aligned} \quad (27)$$

其中, $\hat{\mathbf{P}}^{ii}(t|t)$ 是 $L \times L$ 矩阵, $\hat{\mathbf{P}}^{ii}(t|t) = (\hat{P}_{kj}^{ii}(t|t))$. 上述三步在每时刻 t 重复进行.

3 自校正融合 Kalman 滤波器的收敛性

3.1 收敛性分析方法

引理 3 给出了时变 Lyapunov 方程的稳定性判据, 这构成了动态方差误差系统分析 (DVESA) 方法^[19-20]. 引理 4 给出了动态误差系统分析 (DESA) 方法^[13-14]. 应用 DESA 方法和 DVESA 方法可证明自校正融合 Kalman 滤波器的收敛性和参数估计的收敛性.

引理 3^[19-20]. 考虑时变 Lyapunov 方程

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{F}_1(t) \mathbf{P}(t-1) \mathbf{F}_2^T(t) + \mathbf{U}(t) \quad (28)$$

其中, $t \geq 0$, 输出 $\mathbf{P}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 输入 $\mathbf{U}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 且 $\mathbf{F}_1(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{F}_2(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一致渐近稳定的, 即存在常数 $c_i > 0$ 和 $0 < \rho_i < 1$, 使得^[24]

$$\|\mathbf{F}_i(t, k)\| \leq c_i \rho_i^{t-k}, \quad \forall t \geq k \geq 0, i = 1, 2 \quad (29)$$

其中, $\mathbf{F}_i(t, t) = \mathbf{I}_n$, $\mathbf{F}_i(t, k) = \mathbf{F}_i(t)\mathbf{F}_i(t-1) \cdots \mathbf{F}_i(k+1)$, $t > k$, 并且 $\|\cdot\|$ 表示矩阵范数. 若 $\mathbf{U}(t)$ 是有界的, 则 $\mathbf{P}(t)$ 是有界的. 若 $\mathbf{U}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{P}(t) \rightarrow \mathbf{0}$.

引理 4^[13-14, 17, 19, 25]. 考虑离散动态误差系统

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{F}(t)\boldsymbol{\delta}(t-1) + \mathbf{u}(t) \quad (30)$$

其中, $t \geq 0$, 输出 $\boldsymbol{\delta}(t) \in \mathbf{R}^n$, 输入 $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^n$, 并且矩阵 $\mathbf{F}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一致渐近稳定的, 或 $\mathbf{F}(t) \rightarrow \mathbf{F}$, \mathbf{F} 为稳定矩阵. 若 $\mathbf{u}(t)$ 是有界的, 则 $\boldsymbol{\delta}(t)$ 是有界的. 若 $\mathbf{U}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\delta}(t) \rightarrow \mathbf{0}$.

3.2 自校正 Riccati 方程的收敛性

记带已知参数 $\boldsymbol{\theta}$ 和噪声方差 \mathbf{Q}_w 和 \mathbf{Q}_{vi} ($i = 1, \dots, L$) 的时不变系统 (1) 和 (2) 为 $(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{H}_i, \mathbf{Q}_w, \mathbf{Q}_{vi})$, 相应的带时变参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, 方差 $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$ 和 $\hat{\mathbf{Q}}_{vi}(t)$ 的时变系统 (1) 和 (2) 记为 $(\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t), \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(t), \hat{\mathbf{H}}_i(t), \hat{\mathbf{Q}}_w(t), \hat{\mathbf{Q}}_{vi}(t))$.

引理 5^[20, 24]. 系统 (1) 和 (2) 在假设 1~3 下, 系统 $(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{H}_i, \mathbf{Q}_w, \mathbf{Q}_{vi})$ 和 $(\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t), \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(t), \hat{\mathbf{H}}_i(t), \hat{\mathbf{Q}}_w(t), \hat{\mathbf{Q}}_{vi}(t))$ 是一致完全可观和可控的.

引理 6. 对于带有在线一致估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$ 和 $\hat{\mathbf{Q}}_{vi}(t)$ 的系统 (1), (2) 和 (17), 在假设 1~3 下, 自校正 Riccati 方程的解 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i(t+1|t)$ 按实现收敛于最优 Riccati 方程的解 $\boldsymbol{\Sigma}_i(t+1|t)$, 即

$$(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i(t+1|t) - \boldsymbol{\Sigma}_i(t+1|t)) \rightarrow \mathbf{0}, \quad t \rightarrow \infty, \text{ i.a.r.} \quad (31)$$

证明. 应用引理 3, 文献 [20] 证明了自校正 Riccati 方程的解 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i(t+1|t)$ 按实现收敛于稳态最优 Riccati 方程的解 $\boldsymbol{\Sigma}_i$, 即 $(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i(t+1|t) - \boldsymbol{\Sigma}_i) \rightarrow \mathbf{0}$. 而根据 Kalman 滤波的稳定性理论^[24], 有最优 Riccati 方程的解 $\boldsymbol{\Sigma}_i(t+1|t)$ 收敛于稳态最优 Riccati 方程的解 $\boldsymbol{\Sigma}_i$, 即 $\boldsymbol{\Sigma}_i(t+1|t) - \boldsymbol{\Sigma}_i \rightarrow \mathbf{0}$. 因此有

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i(t+1|t) - \boldsymbol{\Sigma}_i(t+1|t) &= (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i(t+1|t) - \boldsymbol{\Sigma}_i) - \\ &(\boldsymbol{\Sigma}_i(t+1|t) - \boldsymbol{\Sigma}_i) \rightarrow \mathbf{0}, \quad t \rightarrow \infty, \text{ i.a.r.} \end{aligned} \quad (32)$$

即式 (31) 成立. \square

3.3 自校正 Lyapunov 方程的收敛性

定理 1. 对于带有在线一致估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$ 和 $\hat{\mathbf{Q}}_{vi}(t)$ 的多传感器系统 (1), (2) 和 (17), 在假设 1~3 下, 自校正 Lyapunov 方程的解 (23) 收敛于最优 Lyapunov 方程的解 (10), 即

$$[\hat{\mathbf{P}}_{ij}(t|t) - \mathbf{P}_{ij}(t|t)] \rightarrow \mathbf{0}, \quad t \rightarrow \infty, \text{ i.a.r.} \quad (33)$$

证明. 根据式 (6) 和式 (20), 由于稳态 Kalman 滤波增益 $\mathbf{K}_i = \boldsymbol{\Sigma}_i \mathbf{H}_i^T (\mathbf{H}_i \boldsymbol{\Sigma}_i \mathbf{H}_i^T + \mathbf{Q}_{vi})^{-1} = f_i(\boldsymbol{\Sigma}_i, \mathbf{H}_i, \mathbf{Q}_{vi})$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}_i$, \mathbf{H}_i 和 \mathbf{Q}_{vi} 的连续函数, 由式 (17), 式 (31) 和连续函数 f_i 的一致连续性引出 $[\hat{\mathbf{K}}_i(t) - \mathbf{K}_i(t)] \rightarrow \mathbf{0}$. 由式 (5), 稳态 $\boldsymbol{\Psi}_i = [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i] \boldsymbol{\Phi} = g_i(\mathbf{K}_i, \mathbf{H}_i, \boldsymbol{\Phi})$ 是 \mathbf{K}_i , \mathbf{H}_i 和 $\boldsymbol{\Phi}$ 的连续函数, 由假设 2 和 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \rightarrow \boldsymbol{\theta}$, 有 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t) \rightarrow \boldsymbol{\Phi}$, $\hat{\mathbf{H}}_i(t) \rightarrow \mathbf{H}_i$, $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(t) \rightarrow \boldsymbol{\Gamma}$. 由式 (5), 式 (19) 和 g_i 的一致连续性, 引出 $[\hat{\boldsymbol{\Psi}}_i(t) - \boldsymbol{\Psi}_i(t)] \rightarrow \mathbf{0}$, 同理有 $[\hat{\mathbf{P}}_i(t|t) - \mathbf{P}_i(t|t)] \rightarrow \mathbf{0}$. 令 $\hat{\mathbf{K}}_i(t) = \mathbf{K}_i(t) + \Delta \hat{\mathbf{K}}_i(t)$, $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_i(t) = \boldsymbol{\Psi}_i(t) + \Delta \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i(t)$, 引出 $\Delta \hat{\mathbf{K}}_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$, $\Delta \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$. 由式 (23) 减去式 (10), 令 $\Delta_{ij}(t) = \hat{\mathbf{P}}_{ij}(t|t) - \mathbf{P}_{ij}(t|t)$, 得到动态方差误差 Lyapunov 方程:

$$\Delta_{ij}(t) = \boldsymbol{\Psi}_i(t) \Delta_{ij}(t-1) \boldsymbol{\Psi}_j^T(t) + \mathbf{U}_{ij}(t) \quad (34)$$

其中, 输入为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{ij}(t) &= \Delta \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i(t) \hat{\mathbf{P}}_{ij}(t-1|t-1) \boldsymbol{\Psi}_j^T(t) + \Delta \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i(t) \times \\ &\hat{\mathbf{P}}_{ij}(t-1|t-1) \Delta \hat{\boldsymbol{\Psi}}_j^T(t) + \boldsymbol{\Psi}_i(t) \hat{\mathbf{P}}_{ij}(t-1|t-1) \times \\ &\Delta \hat{\boldsymbol{\Psi}}_j^T(t) + [\mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{K}}_i(t) \hat{\mathbf{H}}_i(t)] \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(t) \hat{\mathbf{Q}}_w(t) \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^T(t) \times \\ &[\mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{K}}_j(t) \hat{\mathbf{H}}_j(t)]^T - [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_i(t) \mathbf{H}_i] \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{Q}_w \boldsymbol{\Gamma}^T \times \\ &[\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_j(t) \mathbf{H}_j]^T \end{aligned} \quad (35)$$

由 $\hat{\mathbf{K}}_i(t)$, $\hat{\mathbf{K}}_j(t)$, $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(t)$, $\hat{\mathbf{H}}_i(t)$ 和 $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$ 的有界性, 有 $[\mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{K}}_i(t) \hat{\mathbf{H}}_i(t)] \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(t) \hat{\mathbf{Q}}_w(t) \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^T(t) [\mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{K}}_j(t) \hat{\mathbf{H}}_j(t)]^T$ 是有界的. 根据 Kalman 滤波的稳定性理论^[24], 由引理 5, $\boldsymbol{\Psi}_i(t)$, $\boldsymbol{\Psi}_j(t)$, $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_i(t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_j(t)$ 是一致渐近稳定的, 对于式 (23) 应用引理 3 有 $\hat{\mathbf{P}}_{ij}(t|t)$ 是有界的. 因此, 根据式 (35), 应用式 (17), $[\hat{\mathbf{K}}_i(t) - \mathbf{K}_i(t)] \rightarrow \mathbf{0}$ 和 $\Delta \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$ 得 $\mathbf{U}_{ij}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, $t \rightarrow \infty$. 对于式 (34) 应用引理 3 有 $\Delta_{ij}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, 由此得到式 (33). \square

3.4 自校正局部和融合 Kalman 滤波器的收敛性

定理 2. 对于带有在线一致估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$ 和 $\hat{\mathbf{Q}}_{vi}(t)$ 的多传感器系统 (1), (2) 和 (17) 在假设 1~4 下, 局部自校正 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}_i^s(t|t)$ 按一个实现收敛于局部最优时变 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}_i(t|t)$, 即:

$$[\hat{\mathbf{x}}_i^s(t|t) - \hat{\mathbf{x}}_i(t|t)] \rightarrow \mathbf{0}, \quad t \rightarrow \infty, \text{ i.a.r.} \quad (36)$$

证明. 注意到 $\hat{\mathbf{K}}_i(t)$ 和 $\hat{\mathbf{K}}_i(t) \mathbf{y}_i(t)$ 是有界的, $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_i(t)$ 是一致渐近稳定的, 因此, 对于式 (18) 应用引理 4 得到 $\hat{\mathbf{x}}_i^s(t|t)$ 是有界的. 由式 (18) 减去式 (4), 令 $\boldsymbol{\delta}_i(t) = \hat{\mathbf{x}}_i^s(t|t) - \hat{\mathbf{x}}_i(t|t)$, 有动态误差系统:

$$\boldsymbol{\delta}_i(t) = \boldsymbol{\Psi}_i(t) \boldsymbol{\delta}_i(t-1) + \mathbf{u}_i(t) \quad (37)$$

其中, $\mathbf{u}_i(t) = \Delta \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i(t) \hat{\mathbf{x}}_i^s(t-1|t-1) + \Delta \hat{\mathbf{K}}_i(t) \mathbf{y}_i(t)$. 根据 $\hat{\mathbf{x}}_i^s(t|t)$ 和 $\mathbf{y}_i(t)$ 的有界性, 由 $\Delta \hat{\mathbf{K}}_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$ 和

$\Delta \hat{\Psi}_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$ 有 $\mathbf{u}_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$. 对于式 (37) 应用引理 4 有 $\delta_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$, 即式 (36) 成立. \square

定理 3. 对于带有在线一致估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$ 和 $\hat{\mathbf{Q}}_{v_i}(t)$ 的多传感器系统 (1), (2) 和 (17) 在假设 1 ~ 4 下, 自校正状态分量按标量加权融合 Kalman 滤波器 $\hat{x}_{0i}^s(t|t)$ 按一个实现收敛于状态分量按标量加权最优融合 Kalman 滤波器 $\hat{x}_{0i}(t|t)$, 即

$$[\hat{x}_{0i}^s(t|t) - \hat{x}_{0i}(t|t)] \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \text{ i.a.r.} \quad (38)$$

证明. 由式 (36), 有 $[\hat{x}_{ji}^s(t|t) - \hat{x}_{ji}(t|t)] \rightarrow 0$. 应用式 (13), 式 (27), 式 (33) 和 $[\hat{\mathbf{P}}_i(t|t) - \mathbf{P}_i(t|t)] \rightarrow \mathbf{0}$ 有 $[\hat{\omega}_{ji}(t) - \omega_{ji}(t)] \rightarrow 0$. 令 $\hat{\omega}_{ji}(t) = \omega_{ji}(t) + \Delta \hat{\omega}_{ji}(t)$ 有 $\Delta \hat{\omega}_{ji}(t) \rightarrow 0$. 由式 (24) 减去式 (12) 得:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{0i}^s(t|t) - \hat{x}_{0i}(t|t) &= \sum_{j=1}^L \omega_{ji}(t) [\hat{x}_{ji}^s(t|t) - \hat{x}_{ji}(t|t)] + \\ &\quad \sum_{j=1}^L \Delta \hat{\omega}_{ji}(t) \hat{x}_{ji}^s(t|t) \end{aligned} \quad (39)$$

根据 $\hat{x}_{ji}^s(t|t)$ 的有界性, 则有分量 $\hat{x}_{ji}^s(t|t)$ 是有界的. 应用引理 5, 对于子系统 $(\Phi, \Gamma, \mathbf{H}_i, \mathbf{Q}_w, \mathbf{Q}_{v_i})$ 存在稳态 Kalman 滤波器, 使得当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{P}_{ij}(t|t)$ 有极限. 因此, 由式 (13), 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\omega_i(t)$ 有极限, 即 $\omega_{ji}(t)$ 是有界的. 于是有式 (38) 成立. \square

注 1. 用 DESA 方法的初步理论分析表明: 若参数和噪声方差估计误差收敛到零的速度为 $O(t^{-v})$ ($0 < v < 1/2$)^[26] 或 $O(\rho^t)$ ^[27] ($0 < \rho < 1$), 则自校正融合 Kalman 滤波器也有相同的收敛速度.

注 2. 假如假设 4 改为观测过程以概率 1 有界, 即除了带零概率的观测过程的部分实现集合外, 对其余的每个实现关于 t 都是有界的, 但不要求对其余所有实现关于 t 是一致有界的, 则由定理 3 直接可引出更强的结论, 自校正分量按标量加权融合 Kalman 滤波器以概率 1 收敛于最优融合 Kalman 滤波器.

4 多维和多重 AR 模型 BCRLS 算法

考虑多传感器多维自回归 (AR) 信号

$$\mathbf{A}(q^{-1})\mathbf{s}(t) = \mathbf{w}(t-1) \quad (40)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{s}(t) + \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{r}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (41)$$

$$\mathbf{P}(q^{-1})\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{C}(q^{-1})\boldsymbol{\xi}(t) \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(q^{-1}) &= \mathbf{I}_m + \mathbf{A}_1 q^{-1} + \dots + \mathbf{A}_{n_a} q^{-n_a} \\ \mathbf{P}(q^{-1}) &= \mathbf{I}_m + \mathbf{P}_1 q^{-1} + \dots + \mathbf{P}_{n_p} q^{-n_p} \\ \mathbf{C}(q^{-1}) &= \mathbf{I}_m + \mathbf{C}_1 q^{-1} + \dots + \mathbf{C}_{n_c} q^{-n_c} \end{aligned} \quad (43)$$

其中, 待估信号 $\mathbf{s}(t) \in \mathbf{R}^m$, L 为传感器个数, $\mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^m$ 为第 i 个传感器的观测, $\mathbf{r}_i(t)$ 为观测白噪声, $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为公共自回归滑动平均 (Auto-regressive moving average, ARMA) 有色观测噪声, $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{r}_i(t) \in \mathbf{R}^m$ 为零均值, 方差阵各为 \mathbf{Q}_w , \mathbf{Q}_ξ 和 \mathbf{Q}_{r_i} 的不相关白噪声, q^{-1} 为单位滞后算子, \mathbf{I}_m 为 $m \times m$ 单位阵, \mathbf{A}_i , \mathbf{P}_i 和 \mathbf{C}_i 为 $m \times m$ 系数阵. 假设多项式矩阵 $\mathbf{A}(q^{-1})$, $\mathbf{P}(q^{-1})$ 和 $\mathbf{C}(q^{-1})$ 是稳定的, 且 $(\mathbf{P}(q^{-1}), \mathbf{C}(q^{-1}))$ 左素, 且 $n_p > n_c$. 假设已知 $\mathbf{P}(q^{-1})$, $\mathbf{C}(q^{-1})$, \mathbf{Q}_ξ 和 \mathbf{Q}_{r_i} , 但 $\mathbf{A}(q^{-1})$ 和 \mathbf{Q}_w 是未知的. 问题是求 $\mathbf{A}(q^{-1})$ 和 \mathbf{Q}_w 的在线一致融合估计, 并求 AR 信号 $\mathbf{s}(t)$ 的自校正融合 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{s}}_0^s(t|t)$.

注 3. 这类自校正融合信号滤波问题的应用背景之一是语言增强问题^[28-29], 其中, 各传感器公共干扰有色噪声 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 代表背景噪声, $\mathbf{r}_i(t)$ 代表传感器噪声. 在无语言信号 ($\mathbf{s}(t) = \mathbf{0}$) 时间段^[29] 可利用采集的观测数据 $\mathbf{y}_i(t)$ 直接辨识 $\mathbf{P}(q^{-1})$, $\mathbf{C}(q^{-1})$, \mathbf{Q}_ξ 和 \mathbf{Q}_{r_i} . 因此, 可假设它们是已知的.

4.1 AR 参数估计的多维 BCRLS 算法

定义有色观测噪声 $\mathbf{v}_i(t)$ 为

$$\mathbf{v}_i(t) = \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{r}_i(t) \quad (44)$$

则观测模型式 (41) 成为

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{v}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (45)$$

引理 7. $\mathbf{v}_i(t)$ 的相关函数 $\mathbf{R}_{v_i}(k) = \mathbf{E}[\mathbf{v}_i(t)\mathbf{v}_i^T(t-k)]$ 为

$$\mathbf{R}_{v_i}(k) = \mathbf{R}_\eta(k) + \mathbf{R}_{r_i}(k), \quad \mathbf{R}_{v_i}(-k) = \mathbf{R}_{v_i}^T(k) \quad (46)$$

其中, $\mathbf{r}_i(t)$ 和 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 的相关函数分别为

$$\mathbf{R}_{r_i}(k) = \mathbf{Q}_{r_i} \delta_{0k}, \quad \delta_{00} = 1, \quad \delta_{0k} = 0 \quad (k \neq 0) \quad (47)$$

$$\mathbf{R}_\eta(k) = \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_j \mathbf{Q}_\xi \boldsymbol{\Psi}_{j-k}^T \quad (48)$$

其中, $\boldsymbol{\Psi}_j$ 可递推算为

$$\boldsymbol{\Psi}_j = -\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_{j-1} - \dots - \mathbf{P}_{n_p} \boldsymbol{\Psi}_{j-n_p} + \mathbf{C}_j \quad (49)$$

其中, 规定 $\boldsymbol{\Psi}_0 = \mathbf{I}_m$, $\boldsymbol{\Psi}_j = \mathbf{0}$ ($j < 0$), $\mathbf{C}_j = \mathbf{0}$ ($j > n_c$).

证明. 由 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 不相关于 $\mathbf{r}_i(t)$ 引出式 (46). 由 $\mathbf{r}_i(t)$ 为白噪声引出式 (47). 由式 (42), $\boldsymbol{\eta}(t)$ 有展式^[30]:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_j \boldsymbol{\xi}(t-j) \quad (50)$$

其中, Ψ_j 由式 (49) 给出. 应用式 (50) 可得式 (48). \square

将式 (40) 代入式 (45) 有最小二乘结构:

$$\mathbf{y}_i(t) = \Theta \boldsymbol{\varphi}_i(t) + \mathbf{e}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (51)$$

其中, 定义

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_{n_a} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{y}_i^T(t-1), & \cdots, & -\mathbf{y}_i^T(t-n_a) \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{w}(t-1) + \mathbf{v}_i(t) + \mathbf{A}_1 \mathbf{v}_i(t-1) + \cdots + \mathbf{A}_{n_a} \mathbf{v}_i(t-n_a) \quad (54)$$

定理 4. 多传感器多维 AR 信号式 (40) ~ (43), 基于第 i 个传感器在时刻 t 处, AR 参数阵 Θ 的多维 BCRLS 估值 $\hat{\Theta}_i(t)$ 为

$$\hat{\Theta}_i(t) = \hat{\Theta}_{bi}(t) - t\mathbf{R}_{1i}\mathbf{P}_i(t) + t\hat{\Theta}_i(t-1)\mathbf{R}_{2i}\mathbf{P}_i(t) \quad (55)$$

其中, $\hat{\Theta}_{bi}(t)$ 为 Θ 的有偏递推最小二乘估值

$$\hat{\Theta}_{bi}(t) = \hat{\Theta}_{bi}(t-1) + [\mathbf{y}_i(t) - \hat{\Theta}_{bi}(t-1)\boldsymbol{\varphi}_i(t)] \times \boldsymbol{\varphi}_i^T(t)\mathbf{P}_i(t) \quad (56)$$

$$\mathbf{P}_i(t) = \mathbf{P}_i(t-1) - \frac{[\mathbf{P}_i(t-1)\boldsymbol{\varphi}_i(t)][\mathbf{P}_i(t-1)\boldsymbol{\varphi}_i(t)]^T}{1 + \boldsymbol{\varphi}_i^T(t)\mathbf{P}_i(t-1)\boldsymbol{\varphi}_i(t)} \quad (57)$$

带初值 $\hat{\Theta}_{bi}(t) = \mathbf{0}, \mathbf{P}_i(t) = \alpha \mathbf{I}_{mn_a}, \alpha > 0$, 且

$$\mathbf{R}_{1i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{vi}(1), & \cdots, & \mathbf{R}_{vi}(n_a) \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\mathbf{R}_{2i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{vi}(0) & \cdots & \mathbf{R}_{vi}(n_a - 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{vi}^T(n_a - 1) & \cdots & \mathbf{R}_{vi}(0) \end{bmatrix} \quad (59)$$

证明. 由文献 [25, 31] 有式 (58) 和式 (59). 应用类似于文献 [31] 的推导可引出局部估值 $\hat{\Theta}_{bi}(t)$ 的渐近偏差为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Theta}_{bi}(t) - \Theta = [\mathbf{R}_{1i} - \Theta \mathbf{R}_{2i}] \mathbf{M}_i^{-1} \quad (60)$$

其中, \mathbf{R}_{1i} 和 \mathbf{R}_{2i} 由式 (58) 和式 (59) 定义, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时, 由遍历性^[22], 以概率 1 (w.p.1) 有:

$$t\mathbf{P}_i(t) = \left[\frac{1}{t} \sum_{j=1}^t \boldsymbol{\varphi}_i(j)\boldsymbol{\varphi}_i^T(j) \right]^{-1} \rightarrow \mathbf{M}_i^{-1}, \text{ w.p.1} \quad (61)$$

在式 (60) 中近似用 $t\mathbf{P}_i(t)$ 代替 \mathbf{M}_i^{-1} , 用 $\hat{\Theta}_{bi}(t)$ 近似代替 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Theta}_{bi}(t)$, 且在中括号内的 Θ 近似用

$\hat{\Theta}_i(t-1)$ 代替, 在左边的 Θ 用 $\hat{\Theta}_i(t)$ 近似代替, 移项后得式 (55). \square

定义 Θ 的融合估值 $\hat{\Theta}_f(t)$ 为各局部估值的算术平均^[19, 23]:

$$\hat{\Theta}_f(t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \hat{\Theta}_i(t) \quad (62)$$

系数阵 \mathbf{A}_j 的局部估值 $\hat{\mathbf{A}}_{ji}(t)$ 和融合估值 $\hat{\mathbf{A}}_{jf}(t)$ 由下式定义:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_i(t) &= [\hat{\mathbf{A}}_{1i}(t), \cdots, \hat{\mathbf{A}}_{ji}(t), \cdots, \hat{\mathbf{A}}_{n_{ai}}(t)] \\ \hat{\Theta}_f(t) &= [\hat{\mathbf{A}}_{1f}(t), \cdots, \hat{\mathbf{A}}_{jf}(t), \cdots, \hat{\mathbf{A}}_{n_{af}}(t)] \end{aligned} \quad (63)$$

注 4. 定理 4 将文献 [31] 的多维 BCRLS 算法推广到带 ARMA 有色观测噪声的多维 AR 信号情形.

4.2 AR 参数估计的多重 BCRLS 算法

现在将证明多维 BCRLS 估值器式 (55) ~ (57) 等价于 m 个一维 BCRLS 估值器, 我们称为多重 BCRLS 估值器. 为此, 定义 $m \times n_a m$ 矩阵 Θ 的第 j 行向量的转置为 $n_a m \times 1$ 列向量 $\boldsymbol{\theta}_j$, 则 $n_a m \times m$ 阵 Θ^T 可用列向量 $\boldsymbol{\theta}_j$ ($j = 1, \dots, m$) 表示为

$$\Theta^T = [\boldsymbol{\theta}_1, \cdots, \boldsymbol{\theta}_m] \quad (64)$$

定理 5. 对于多传感器多维 AR 信号式 (40) ~ (43), AR 参数阵 Θ 的多维 BCRLS 局部估值器式 (55) ~ (57) 等价于如下多重 BCRLS 局部估值器:

$$\hat{\Theta}_{bi}^T(t) = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1bi}(t), \cdots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{mbi}(t)] \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{jbi}(t) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{jbi}(t-1) + \mathbf{P}_i(t)\boldsymbol{\varphi}_i(t)[y_{ij}(t) - \\ &\boldsymbol{\varphi}_i^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{jbi}(t-1)], \quad j = 1, \cdots, m \end{aligned} \quad (66)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \begin{bmatrix} y_{i1}(t) & \cdots & y_{im}(t) \end{bmatrix}^T \quad (67)$$

$$\mathbf{P}_i(t) = \mathbf{P}_i(t-1) - \frac{[\mathbf{P}_i(t-1)\boldsymbol{\varphi}_i(t)][\mathbf{P}_i(t-1)\boldsymbol{\varphi}_i(t)]^T}{1 + \boldsymbol{\varphi}_i^T(t)\mathbf{P}_i(t-1)\boldsymbol{\varphi}_i(t)} \quad (68)$$

带初值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{jbi}(t) = \mathbf{0}, \mathbf{P}_i(0) = \alpha \mathbf{I}_{n_a m}, \alpha > 0$. 多重 BCRLS 局部估值器为

$$\hat{\Theta}_i^T(t) = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1i}(t), \cdots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{mi}(t)] \quad (69)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ji}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{jbi}(t) - t\mathbf{P}_i(t)\mathbf{R}_{1i}^T \mathbf{e}_j + t\mathbf{P}_i(t)\mathbf{R}_{2i}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{ji}(t-1) \quad (70)$$

其中, $j = 1, \dots, m, \mathbf{e}_j^T = [0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0]$ 表示第 j 个元素为 1, 其他元素为零的 $1 \times m$ 向量.

证明. 转置式 (56) 并利用关系式 (65) 和式 (67) 得式 (66). 转置式 (55) 并应用式 (65) 和式 (69) 得式 (70). \square

定义 θ_j 的融合估值为

$$\hat{\theta}_{jf}(t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \hat{\theta}_{ji}(t), \quad j = 1, \dots, m \quad (71)$$

且定义 Θ_i^T 的融合估值为

$$\hat{\Theta}_f^T(t) = [\hat{\theta}_{1f}(t), \dots, \hat{\theta}_{mf}(t)] \quad (72)$$

4.3 多维和多重 BCRLS 算法的收敛性分析

下面将用 DESA^[14] 方法证明多维和多重 BCRLS 估值是一致的, 即它们以概率 1 收敛到真实值. 因为多维 BCRLS 算法等价于多重 BCRLS 算法, 故只需证明多重 BCRLS 估值是一致的即可.

定理 6. 对于多传感器多维 AR 信号式 (40) ~ (43), AR 参数阵 Θ 的多重 BCRLS 局部估值器 $\hat{\theta}_{ji}(t)$ 是一致的, 即 $t \rightarrow \infty$ 时有

$$\hat{\theta}_{ji}(t) \rightarrow \theta_j, \text{ w.p.1, } i = 1, 2, \dots, L, j = 1, \dots, m \quad (73)$$

且融合估值 $\hat{\theta}_{jf}(t)$ 也是一致的, 即

$$\hat{\theta}_{jf}(t) \rightarrow \theta_j, \text{ w.p.1, } j = 1, \dots, m \quad (74)$$

且等价的多维 BCRLS 局部和融合估值也是一致的.

证明. 由式 (61), 置 $tP_i(t) = M_i^{-1} + \Delta M_i^{-1}(t)$, 则有 $\Delta M_i^{-1}(t) \rightarrow \mathbf{0}$. 由式 (60) 有

$$\Theta = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Theta}_{bi}(t) - [R_{1i} - \Theta R_{2i}] M_i^{-1} \quad (75)$$

式 (55) 减式 (75) 得:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_i(t) - \Theta &= [\hat{\Theta}_i(t-1) - \Theta] R_{2i} M_i^{-1} + \hat{\Theta}_{bi}(t) - \\ &\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Theta}_{bi}(t) + [\hat{\Theta}_i(t-1) R_{2i} - R_{1i}] \Delta M_i^{-1}(t) \end{aligned} \quad (76)$$

上式两边转置并利用式 (64) 和式 (69) 有 θ_j 的估值误差系统:

$$\tilde{\theta}_{ji}(t) = M_i^{-1} R_{2i} \tilde{\theta}_{ji}(t-1) + u_{ji}(t) \quad (77)$$

其中, $j = 1, \dots, m$, $\tilde{\theta}_{ji}(t) = \hat{\theta}_{ji}(t) - \theta_j$, 且

$$\begin{aligned} u_{ji}(t) &= [\hat{\Theta}_{bi}(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Theta}_{bi}(t)]^T e_j + \\ &\Delta M_i^{-1}(t) [\hat{\Theta}_i(t-1) R_{2i} - R_{1i}]^T e_j \end{aligned} \quad (78)$$

其中, $1 \times m$ 行向量 $e_j^T = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]$ 的第 j 个元素为 1, 其他元素为零. 可证明^[31]: $M_i^{-1} R_{2i}$ 和 $R_{2i} M_i^{-1}$ 均为稳定矩阵. 转置式 (55) 并利用式 (69) 有 θ_j 的局部 BCRLS 估值:

$$\hat{\theta}_{ji}(t) = tP_i(t) R_{2i}^T \hat{\theta}_{ji}(t-1) +$$

$$\hat{\theta}_{jbi}(t) - tP_i(t) R_{1i}^T e_j \quad (79)$$

其中, $j = 1, \dots, m$. 注意 $tP_i(t) R_{2i} \rightarrow M_i^{-1} R_{2i}$ (稳定矩阵). 由式 (75), $\hat{\Theta}_{bi}(t)$ 有极限, 故 $\hat{\theta}_{jbi}(t)$ 有界. 由式 (61) 引出 $tP_i(t)$ 有界, 故 $tP_i(t) R_{1i}^T e_j$ 有界. 对式 (79) 应用引理 4 引出 $\hat{\theta}_{ji}(t)$ 有界, 这引出 $\hat{\Theta}_i(t)$ 有界. 因此, $u_{ji}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, 进而对式 (77) 应用引理 4 引出 $\tilde{\theta}_{ji}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, 即式 (73) 成立, 进而由式 (71) 引出式 (74) 成立. \square

4.4 噪声方差 Q_w 的局部和融合估值

定理 7. 多传感器多维 AR 信号式 (40) 的输入白噪声 $w(t)$ 的方差阵 Q_w 的局部估值为

$$\hat{Q}_{wi}(t) = \hat{Q}_{ei}(t) - \sum_{j=0}^{n_a} \sum_{s=0}^{n_a} \hat{A}_{ji}(t) R_{vi}(j-s) \hat{A}_{si}^T(t) \quad (80)$$

$$\hat{Q}_{ei}(t) = \hat{Q}_{ei}(t-1) + \frac{1}{t} [\hat{e}_i(t) \hat{e}_i^T(t) - \hat{Q}_{ei}(t-1)] \quad (81)$$

$$\hat{e}_i(t) = y_i(t) - \hat{\Theta}_i(t) \varphi_i(t) \quad (82)$$

Q_w 的融合估值为

$$\hat{Q}_{wf}(t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \hat{Q}_{wi}(t) \quad (83)$$

且局部和融合估值是一致的, 即 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\hat{Q}_{wi}(t) \rightarrow Q_w, \hat{Q}_{wf}(t) \rightarrow Q_w, \text{ w.p.1} \quad (84)$$

证明. 由式 (54), $e_i(t)$ 是平稳随机过程, 记它的方差为 Q_{ei} , 于是有关系:

$$Q_{ei} = Q_w + \sum_{j=0}^{n_a} \sum_{s=0}^{n_a} A_j R_{vi}(j-s) A_s^T \quad (85)$$

由式 (51) 有 $e_i(t)$ 的估值:

$$\hat{e}_i(t) = y_i(t) - \hat{\Theta}_i(t) \varphi_i(t) \quad (86)$$

它引出 Q_{ei} 的估值:

$$\hat{Q}_{ei}(t) = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t \hat{e}_i(j) \hat{e}_i^T(j) \quad (87)$$

代入局部估值 $\hat{A}_{ji}(t), \hat{A}_{si}(t), \hat{Q}_{ei}(t)$ 到式 (85) 引出式 (80). 由式 (87) 引出式 (81). 由定理 6 有 $\hat{\Theta}_i(t) \rightarrow \Theta$, 于是由式 (86) 有 $[\hat{e}_i(t) - e_i(t)] \rightarrow \mathbf{0}$, 进而可证明^[31]: 估值 $\hat{Q}_{ei}(t)$ 是一致的, 即 $\hat{Q}_{ei}(t) \rightarrow Q_{ei}$, 因此, 由式 (80) 和式 (85) 引出 $\hat{Q}_{wi}(t) \rightarrow Q_w$, 故由式 (83) 引出 $\hat{Q}_{wf}(t) \rightarrow Q_w$. \square

4.5 AR 信号自校正融合 Kalman 滤波器

式 (40)~(43) 有状态空间模型

$$\boldsymbol{\alpha}(t+1) = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}(t) + \boldsymbol{\Gamma}_\alpha \boldsymbol{w}(t) \quad (88)$$

$$\boldsymbol{s}(t) = \mathbf{H}_\alpha \boldsymbol{\alpha}(t) \quad (89)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 & & & \\ \vdots & & & \\ -\mathbf{A}_{n_a} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$\boldsymbol{\beta}(t+1) = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}(t) + \boldsymbol{\Gamma}_\beta \bar{\boldsymbol{\xi}}(t) \quad (91)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{H}_\beta \boldsymbol{\beta}(t) \quad (92)$$

其中, 设 $n_p > n_c$, 定义 $\bar{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{\xi}(t+1)$, 则白噪声 $\bar{\boldsymbol{\xi}}(t)$ 有方差 \mathbf{Q}_ξ , 并规定 $\mathbf{C}_j = \mathbf{0}$ ($j > n_c$).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_1 & & & \\ \vdots & & & \\ -\mathbf{P}_{n_p} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{n_p-1} \end{bmatrix} \quad (93)$$

引入增广状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 和增广噪声 $\boldsymbol{w}(t)$:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^\top(t), & \boldsymbol{\beta}^\top(t) \end{bmatrix}^\top \quad (94)$$

$$\boldsymbol{w}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}^\top(t), & \bar{\boldsymbol{\xi}}^\top(t) \end{bmatrix}^\top$$

有含未知参数和噪声方差的增广状态模型

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Theta})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{w}(t) \quad (95)$$

$$\boldsymbol{y}_i(t) = \mathbf{H}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{r}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (96)$$

$\boldsymbol{w}(t)$ 有方差 $\mathbf{Q}_w = \text{diag}\{\mathbf{Q}_w, \mathbf{Q}_\xi\}$, 且

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma}_\beta \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\alpha & \mathbf{H}_\beta \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_{n_a} \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$\boldsymbol{s}(t) = \mathbf{H}_s \boldsymbol{x}(t), \mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (99)$$

基于 BCRLS 融合估值 $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_f(t)$ 和 $\hat{\mathbf{Q}}_{\omega_f}(t)$ 可求得自校正解耦融合 Kalman 滤波器 $\hat{\boldsymbol{x}}_0^s(t|t)$, 进而可求得 AR 信号自校正解耦融合 Kalman 滤波器:

$$\hat{\boldsymbol{s}}_0^s(t|t) = \mathbf{H}_s \hat{\boldsymbol{x}}_0^s(t|t) \quad (100)$$

假设观测数据有界, 应用定理 3 引出 AR 信号自校正融合滤波器按实现收敛于最优融合滤波器, 因而具有渐近最优性.

5 仿真例子

考虑带白色观测噪声的三传感器两通道平稳 ARMA 信号

$$\mathbf{A}(q^{-1})\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{w}(t-1) \quad (101)$$

$$\boldsymbol{y}_i(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{r}_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (102)$$

$$\mathbf{P}(q^{-1})\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{C}(q^{-1})\boldsymbol{\xi}(t) \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(q^{-1}) &= \mathbf{I}_2 + \mathbf{A}_1 q^{-1} + \mathbf{A}_2 q^{-2} \\ \mathbf{P}(q^{-1}) &= \mathbf{I}_2 + \mathbf{P}_1 q^{-1} + \mathbf{P}_2 q^{-2} \\ \mathbf{C}(q^{-1}) &= \mathbf{I}_2 + \mathbf{C}_1 q^{-1} \end{aligned} \quad (104)$$

其中, 信号 $\boldsymbol{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t)]^\top$, $\boldsymbol{y}_i(t) \in \mathbf{R}^2$ 是第 i 个传感器的观测, $\boldsymbol{r}_i(t)$ 为观测白噪声, $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbf{R}^2$ 为 ARMA 有色观测噪声, $\boldsymbol{w}(t) \in \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbf{R}^2$ 和 $\boldsymbol{r}_i(t) \in \mathbf{R}^2$ 为零均值, 方差阵各为 \mathbf{Q}_w , \mathbf{Q}_ξ 和 \mathbf{Q}_{r_i} 的不相关白噪声. 假设已知 $\mathbf{P}(q^{-1})$, $\mathbf{C}(q^{-1})$, \mathbf{Q}_ξ 和 \mathbf{Q}_{r_i} , 但 $\mathbf{A}(q^{-1})$ 和 \mathbf{Q}_w 是未知的. 问题是求 $\mathbf{A}(q^{-1})$ 和 \mathbf{Q}_w 的在线一致融合估计, 并求 AR 信号 $\boldsymbol{s}(t)$ 的自校正融合 Kalman 滤波器 $\hat{\boldsymbol{s}}_0^s(t|t)$. 在仿真中取

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.9 \\ 1.3 & -0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.19 & -0.38 \\ 0.83 & -0.06 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_1 &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_w = \text{diag}\{3, 5\} \\ \mathbf{Q}_\xi &= \text{diag}\{0.01, 0.01\}, \mathbf{Q}_{r_1} = \text{diag}\{0.06, 0.08\} \\ \mathbf{Q}_{r_2} &= \text{diag}\{0.2, 0.4\}, \mathbf{Q}_{r_3} = \text{diag}\{0.04, 0.04\} \end{aligned} \quad (105)$$

仿真结果如图 1~6 所示.

在图 1~6 中, 直线代表真实值. 应用定理 4 能够得到系数阵 \mathbf{A}_j ($j = 1, 2$) 的融合估值 $\hat{\mathbf{A}}_j(t)$, 其中 $\hat{\mathbf{A}}_i(j, k)$ 表示估值 $\hat{\mathbf{A}}_i(t)$ 的第 (j, k) 元素, 进而能够得到噪声方差的在线融合估值 $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$, 其中, $\hat{\mathbf{Q}}_w(i, i)$ 表示估值 $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$ 的第 (i, i) 对角元素. 图 1~3 说明模型参数和噪声方差估值的一致性, 其中, 直线代表真实值, 曲线代表估值. 最优和自校正信号滤波器如图 4~6 所示, 其中, 最优和自校正滤波器如图 4 所示, 从图 4 中可以看到, 最优滤波器 $\hat{\boldsymbol{s}}_0(t|t) =$

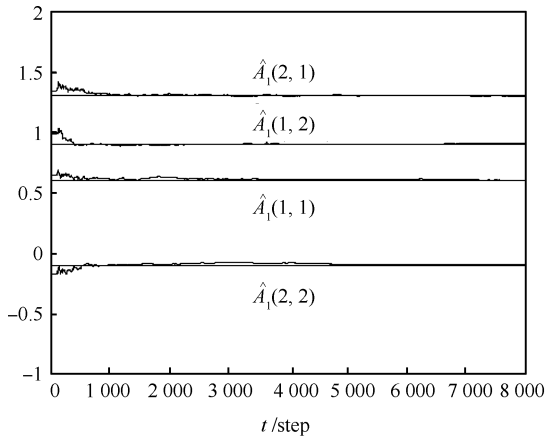


图 1 $\hat{\mathbf{A}}_1(t)$ 的融合估值曲线

Fig. 1 The curves of fused estimates for $\hat{\mathbf{A}}_1(t)$

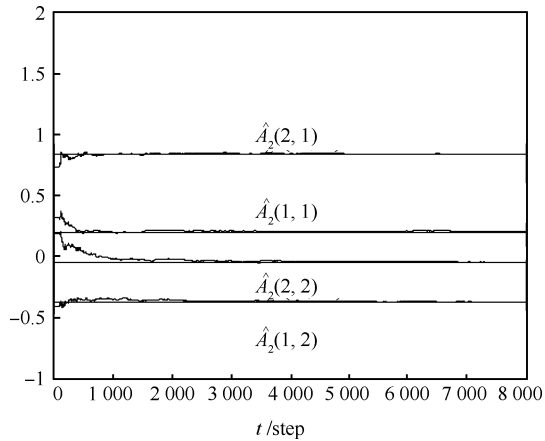


图 2 $\hat{\mathbf{A}}_2(t)$ 的融合估值曲线

Fig. 2 The curves of fused estimates for $\hat{\mathbf{A}}_2(t)$

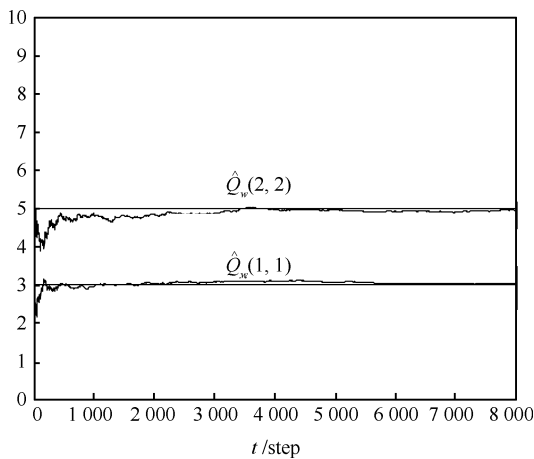


图 3 融合噪声方差估值曲线 $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$

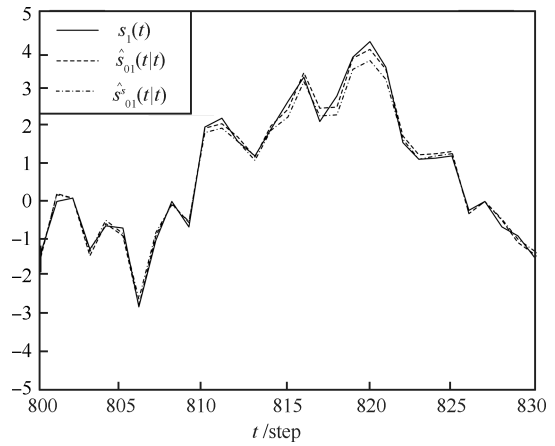
Fig. 3 The curves of the fused noise variance estimates for $\hat{\mathbf{Q}}_w(t)$

$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_{01}(t|t) & \hat{\mathbf{s}}_{02}(t|t) \\ \hat{\mathbf{s}}_{01}^s(t|t) & \hat{\mathbf{s}}_{02}^s(t|t) \end{bmatrix}^T$ 和自校正滤波器 $\hat{\mathbf{s}}_0^s(t|t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_{01}^s(t|t) & \hat{\mathbf{s}}_{02}^s(t|t) \end{bmatrix}^T$ 接近于真实信号 $\mathbf{s}(t)$. 信号

$\mathbf{s}(t)$ 和观测 $\mathbf{y}_i(t) = \begin{bmatrix} y_{i1}(t) & y_{i2}(t) \end{bmatrix}^T$ ($i = 1, 2, 3$) 曲线如图 5 所示. 自校正和最优融合 Kalman 信号滤波器之间的误差曲线如图 6 所示, 能够看到自校正融合器收敛于最优融合器, 即它们的误差收敛到零.

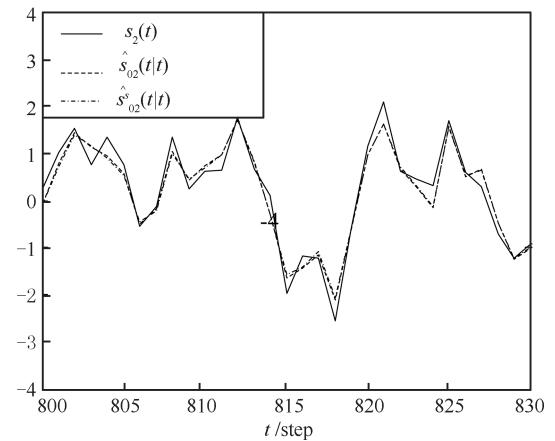
6 结论

对于含部分未知模型参数和部分未知噪声统计的多传感器系统, 其中部分模型参数和部分噪声统计可以是先验已知的. 将未知模型参数和噪声统计的一致融合估值器代入到相应的最优 Kalman 融合



(a) 信号 $s_1(t)$, 最优融合滤波器 $\hat{\mathbf{s}}_{01}(t|t)$ 和自校正融合滤波器 $\hat{\mathbf{s}}_{01}^s(t|t)$

(a) The signal $s_1(t)$, the optimal fused filter $\hat{\mathbf{s}}_{01}(t|t)$, and the self-tuning fused filter $\hat{\mathbf{s}}_{01}^s(t|t)$

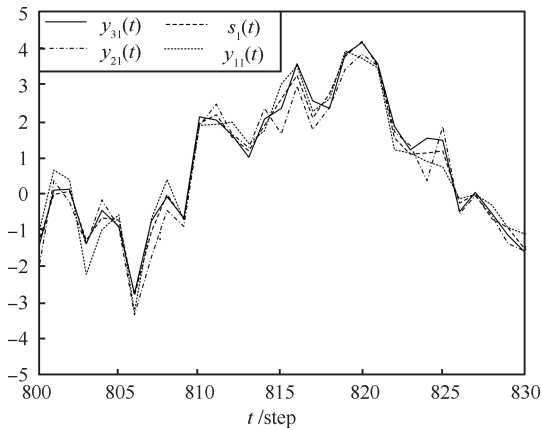


(b) 信号 $s_2(t)$, 最优融合滤波器 $\hat{\mathbf{s}}_{02}(t|t)$ 和自校正融合滤波器 $\hat{\mathbf{s}}_{02}^s(t|t)$

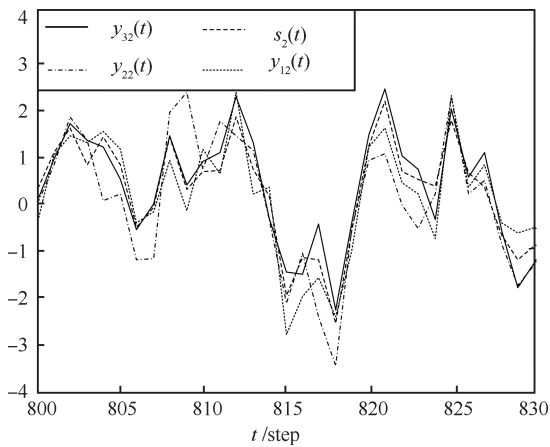
(b) The signal $s_2(t)$, the optimal fused filter $\hat{\mathbf{s}}_{02}(t|t)$, and the self-tuning fused filter $\hat{\mathbf{s}}_{02}^s(t|t)$

图 4 信号 $\mathbf{s}(t)$, 最优融合滤波器 $\hat{\mathbf{s}}_0(t|t)$ 和自校正融合滤波器 $\hat{\mathbf{s}}_0^s(t|t)$

Fig. 4 The curves of the signal $\mathbf{s}(t)$, the optimal fused filter $\hat{\mathbf{s}}_0(t|t)$, and the self-tuning fused filter $\hat{\mathbf{s}}_0^s(t|t)$



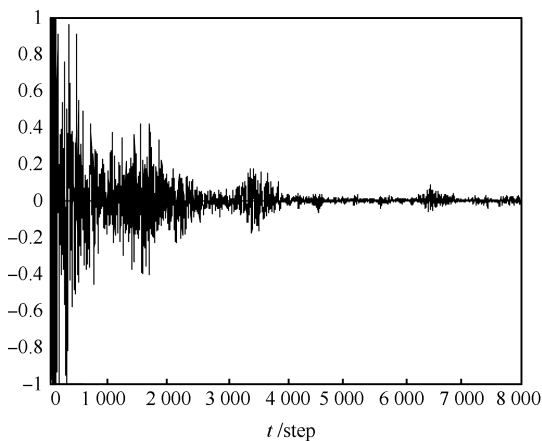
(a) 信号 $s_1(t)$, 观测 $y_{11}(t)$, 观测 $y_{21}(t)$, 观测 $y_{31}(t)$
 (a) The signal $s_1(t)$ and the measurements $y_{11}(t)$, $y_{21}(t)$, and $y_{31}(t)$



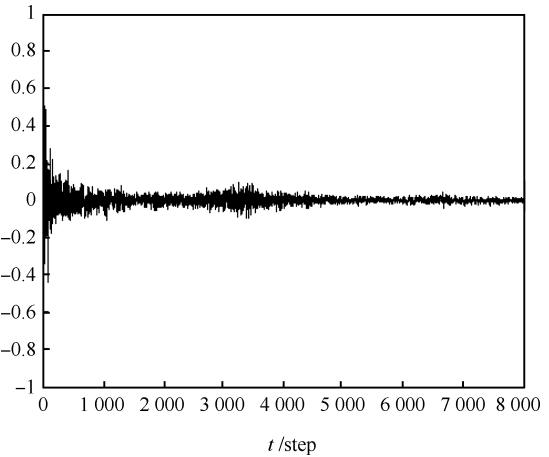
(b) 信号 $s_2(t)$, 观测 $y_{12}(t)$, 观测 $y_{22}(t)$, 观测 $y_{32}(t)$
 (b) The signal $s_2(t)$ and the measurements $y_{12}(t)$, $y_{22}(t)$, and $y_{32}(t)$

图 5 信号 $s(t)$ 和观测 $y(t)$ 曲线

Fig. 5 The curves of the signal $s(t)$ and the measurement $y(t)$



(a) 误差曲线 $e_1(t) = \hat{s}_{01}(t|t) - \hat{s}_{01}^s(t|t)$
 (a) The error curve $e_1(t) = \hat{s}_{01}(t|t) - \hat{s}_{01}^s(t|t)$



(b) 误差曲线 $e_2(t) = \hat{s}_{02}(t|t) - \hat{s}_{02}^s(t|t)$
 (b) The error curve $e_2(t) = \hat{s}_{02}(t|t) - \hat{s}_{02}^s(t|t)$

图 6 最优和自校正融合 Kalman 信号滤波器之间的误差曲线

Fig. 6 The error curves between the optimal and self-tuning fusion Kalman signal filters

器中, 提出了自校正解耦融合 Kalman 滤波器. 用 DESA 方法证明了其按实现收敛于最优融合 Kalman 滤波器. 将它应用到信号处理, 提出了多维和多重未知 AR 信号在已知有色公共干扰观测噪声和白色观测噪声下的 AR 参数估计的多维和多重 BCRLS 算法, 证明了它们的等价性, 进而提出了具有渐近最优性的 AR 信号自校正融合滤波器, 并用 DESA 方法证明了它们的收敛性. 应强调指出, 应用 DESA 方法不仅可证明自校正融合器的收敛性, 而且还可证明参数估计收敛性, 是解决收敛性分析问题的一种新的有效方法.

References

- 1 Liggins M E, Hall D L, Llinas J. *Handbook of Multisensor Data Fusion: Theory and Practice (Second Edition)*. Boca Raton: CRC Press, 2009
- 2 Li X R, Zhu Y M, Wang J, Han C Z. Optimal linear estimation fusion I: unified fusion rules. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2003, **49**(9): 2192–2208
- 3 Song E B, Zhu Y M, Zhou J, You Z S. Optimal Kalman filtering fusion with cross-correlated sensor noises. *Automatica*, 2007, **43**(8): 1450–1456
- 4 Sun S L, Deng Z L. Multi-sensor optimal information fusion Kalman filter. *Automatica*, 2004, **40**(6): 1017–1023
- 5 Deng Z L, Gao Y, Mao L, Li Y, Hao G. New approach to information fusion steady-state Kalman filtering. *Automatica*, 2005, **41**(10): 1695–1707
- 6 Hagander P, Wittenmark B. A self-tuning filter for fixed-lag smoothing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1977, **23**(3): 377–384
- 7 Moir T, Grimble M J. Optimal self-tuning filtering, prediction, and smoothing for discrete multivariable processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, **29**(2): 128–137

- 8 Deng Z L, Zhang H S, Liu S J, Zhou L. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems. *Automatica*, 1996, **32**(2): 199–216
- 9 Deng Zi-Li. *Self-tuning Filtering Theory with Applications*. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2003
(邓自立. 自校正滤波理论及其应用. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2003)
- 10 Wang Jian-Wen, Shui Hai-Tao, Li Xun, Zhang Hui, Ma Hong-Xu. Robust Kalman filter design for unknown noise covariance. *Control Theory and Application*, 2011, **28**(5): 693–697
(王建文, 税海涛, 李迅, 张辉, 马宏绪. 噪声统计特性未知时的鲁棒卡尔曼滤波算法设计. 控制理论与应用, 2011, **28**(5): 693–697)
- 11 Julier S J, Uhlmann J K. A non-divergent estimation algorithm in the presence of unknown correlations. In: Proceedings of the American Control Conference. Albuquerque, USA: IEEE, 1997. 2369–2373
- 12 Wu D Z, Zhou J, Qu X M. A robust estimation fusion with unknown cross-covariance in distribution systems. In: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control Jointly with the 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 7603–7607
- 13 Deng Z Li, Gao Y, Li C B, Hao G. Self-tuning decoupled information fusion Wiener state component filters and their convergence. *Automatica*, 2008, **44**(3): 685–695
- 14 Deng Z L, Li C B. Self-tuning information fusion Kalman predictor weighted by diagonal matrices and its convergence analysis. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(2): 156–163
- 15 Sun S L. Optimal and self-tuning information fusion Kalman multi-step predictor. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(2): 418–427
- 16 Ran C J, Deng Z L. Self-tuning weighted measurement fusion Kalman filter and its convergence. *Journal of Control Theory and Applications*, 2010, **8**(4): 435–440
- 17 Gao Y, Jia W J, Sun X J, Deng Z L. Self-tuning multisensor weighted measurement fusion Kalman filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, **45**(1): 179–191
- 18 Gao Y, Ran C J, Sun X J, Deng Z L. Optimal and self-tuning weighted measurement fusion Kalman filters and their asymptotic global optimality. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2010, **24**(11): 982–1004
- 19 Ran C J, Tao G L, Liu J F, Deng Z L. Self-tuning decoupled fusion Kalman predictor and its convergence analysis. *IEEE Sensors Journal*, 2009, **9**(12): 2024–2032
- 20 Tao G L, Deng Z L. Convergence of self-tuning Riccati equation for systems with unknown parameters and noise variances. In: Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation. Jinan, China: IEEE, 2010. 5732–5736
- 21 Ljung L. *System Identification: Theory for the User (Second Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 1999
- 22 Kailath T, Sayed A H, Hassibi B. *Linear Estimation*. New Jersey: Prentice Hall, 2000
- 23 Ran C J, Deng Z L. Information fusion multi-stage identification method for multisensor multi-channel ARMA models. In: Proceedings of the International Conference on Mechatronics and Automation. Beijing, China: IEEE, 2011. 2216–2221
- 24 Kamen E W, Su J K. *Introduction to Optimal Estimation*. London: Springer, 1999
- 25 Deng Zi-Li. *Information Fusion Filter Theory with Applications*. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2007
(邓自立. 信息融合滤波理论及其应用. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2007)
- 26 Chen H F, Zhao W X. Identification of both coefficients and orders of ARMAX system. In: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control Joint with the 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 7250–7255
- 27 Chui C K, Chen G. *Kalman Filtering: with Real-Time Applications (Fourth Edition)*. Berlin: Springer-Verlag, 1999
- 28 Gibson J D, Koo B, Gray S D. Filtering of colored noise for speech enhancement and coding. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, **39**(8): 1732–1742
- 29 Moir T J, Campbell D R, Dabis H S. A polynomial approach to optimal and adaptive filtering with application to speech. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, **39**(5): 1221–1224
- 30 Box G E P, Jenkins G M, Reinsel G C. *Time Series Analysis: Forecasting and Control (Third Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 1994
- 31 Deng Zi-Li, Xu Hui-Qin, Zhang Ming-Bo. Multivariable bias compensated recursive least-squares algorithm and its convergence. *Science Technology and Engineering*, 2010, **10**(2): 360–365
(邓自立, 徐慧勤, 张明波. 多变量偏差补偿递推最小二乘法及其收敛性. 科学技术与工程, 2010, **10**(2): 360–365)



陶贵丽 黑龙江大学自动化系博士研究生。2006 年获得黑龙江大学电子工程学院硕士学位。主要研究方向为多传感器信息融合, 信号处理。

E-mail: dengzilihju@yahoo.com.cn

(TAO Gui-Li Ph.D. candidate in the Department of Automation, Heilongjiang University. Her research interest covers multisensor information fusion and signal processing.)



邓自立 黑龙江大学自动化系教授。主要研究方向为最优和自校正滤波, 状态估计, 多传感器信息融合和信号处理。本文通信作者。E-mail: dzl@hlju.edu.cn

(DENG Zi-Li Professor in the Department of Automation, Heilongjiang University. His research interest covers optimal and self-tuning filtering, state estimation, multisensor information fusion, and signal processing. Corresponding author of this paper.)