

动态输出反馈鲁棒模型预测控制

平续斌¹ 丁宝苍¹ 韩崇昭¹

摘要 研究了具有多包不确定性和有界噪声的系统的动态输出反馈鲁棒模型预测控制的综合方法. 系统为准线性参数时变的, 即系统时变参数在当前时刻精确已知, 但在将来时刻未知. 采用二次有界概念刻画扩展闭环系统的稳定性. 本文主要创新在于提出了一种辅助优化方法, 从而为下个采样时刻的主优化问题提供可靠的真实状态的界. 通过连续搅拌釜式反应器控制系统验证了该方法的有效性.

关键词 动态输出反馈, 模型预测控制, 不确定系统, 二次有界

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00031

Dynamic Output Feedback Robust Model Predictive Control

PING Xu-Bin¹ DING Bao-Cang¹ HAN Chong-Zhao¹

Abstract This paper addresses the synthesis approach of dynamic output feedback robust model predictive control for systems with both polytopic uncertainty and bounded disturbance. The system is quasi-linear parameter varying, i.e., the time-varying parameters of the system are exactly known at the current time but unknown in the future. The notion of quadratic boundedness is utilized to characterize the stability properties of the augmented closed-loop system. The primary contribution of this paper is to propose a method for the auxiliary optimization to provide reliable bounds of true state for the main optimization problem at the next sampling time. A continuous stirred tank reactor control system is given to illustrate the effectiveness of the approach.

Key words Dynamic output feedback, model predictive control, uncertain system, quadratic boundedness

鲁棒预测控制的综合方法已经得到了广泛研究, 多数假定状态可测, 可参考综述文献 [1–2]. 与本文最相关的为文献 [3], 其针对多包不确定系统, 将无穷时域控制作用参数化为一个状态反馈控制律, 采用公共的 Lyapunov 函数, 确保系统的稳定性, 且切换时域为 0.

对实际过程, 并非所有的状态都能够准确地测量, 故一般应该选择输出反馈预测控制. 当采用估计器估计系统状态时, 真实状态的界是动态不确定的. 为了处理输入和状态约束, 必须确定真实状态的界.

文献 [4] 研究了多包描述不确定系统的输出反馈鲁棒预测控制系统的综合方法, 并且考虑了有界状态噪声和量测噪声, 估计误差的处理类似于输入和状态约束. 文献 [5] 研究了动态输出反馈鲁棒预测控制. 假定系统参数当前时刻精确已知, 但将来参数未知且为多包不确定的, 并且考虑了有界噪声. 此外, 引入辅助优化问题 (所有约束和主优化问题相同). 当辅助优化问题可行时, 才求解主优化问题、更新控制律. 文献 [5] 的主要创新在于: 基于控制器状态和系统输出的动态输出反馈, 利用二次有界^[6–7] 方法刻画系统的鲁棒稳定性. 为了改进文献 [5] 的方法, 文献 [8] 将估计误差在独立的优化问题中处理, 即在每次求解控制律时, 不考虑估计误差约束, 而是当控制律实施后, 才在辅助优化问题中进行估计误差的更新. 辅助优化问题的约束与主优化问题完全不同. 辅助优化问题总是可行的, 但主优化问题 (每个时刻都求解) 未必时时可行. 文献 [9] 采用了和文献 [8] 相同的主、辅优化模式, 但假设当前时刻系统模型参数未知, 且控制器状态和真实状态维数未必相同. 为了进一步改进文献 [8], 文献 [10] 的辅助优化问题中, 估计误差约束只考虑下一时刻的, 辅助优化问题也决定着是否求解下一采样时刻的主优化问题 (这一点同文献 [5], 但在文献 [5] 中辅助优化问题可行则主优化问题也可行, 而在文献 [10] 中未必如此). 由于不需要在每个采样时刻都求解主优化问题, 因此,

收稿日期 2011-02-28 录用日期 2011-08-09
Manuscript received February 28, 2011; accepted August 9, 2011

国家重点基础研究发展规划 (973 计划) (2007CB311006), 国家自然科学基金 (60934007, 61074176, 61174095), 国家自然科学基金创新研究群体 (60921003) 资助

Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2007CB311006), National Natural Science Foundation of China (60934007, 61074176, 61174095), and Foundation for Innovative Research Groups of the National Natural Science Foundation of China (60921003)

本文责任编辑 丛爽
Recommended by Associate Editor CONG Shuang
1. 西安交通大学智能网络与网络安全教育部重点实验室 机械制造系统工程国家重点实验室 电子与信息工程学院综合自动化研究所 西安 710049

1. Ministry of Education Key Laboratory for Intelligent Networks and Network Security, State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Institute of Integrated Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049

能够降低在线计算量。

本文在文献 [10] 的基础上, 提出一种新的更新真实状态的界的方法. 本文不定义估计误差. 同文献 [10] 一样, 本文不需要在每个采样时刻都求解主优化问题, 而是由辅助优化问题决定是否求解主优化问题. 不同于文献 [10], 本文的主优化问题只要求解, 都是可行的. 与文献 [10] 相比, 本文的辅助优化问题的计算量要小得多. 不仅如此, 本文采用的辅助优化问题中引入了更多的优化自由度, 可有效提高控制性能.

注 1. 对任意向量 \mathbf{x} 和正定矩阵 W , $\|\mathbf{x}\|_W^2 = \mathbf{x}^T W \mathbf{x}$; $\mathbf{x}(i|k)$ 表示在当前时刻 k 对未来 $k+i$ 时刻的 \mathbf{x} 的预测值; I 为具有适当维数的单位矩阵; $\varepsilon_M = \{\xi : \xi^T M \xi \leq 1\}$ 表示关于正定对称矩阵 M 的椭圆; 某元素属于 $\text{Co}\{\cdot\}$ 表示该元素可由 $\{\cdot\}$ 中的所有元素的凸组合表示, 其中组合系数非负, 且加和为 1; 矩阵中 “*” 表示对称矩阵中其对称项的转置; 优化的最优解用上角标 “*” 表示. 为了简便, 对时间依赖的决策变量, 时间项常省略.

1 问题描述

考虑如下不确定线性时变离散时间系统:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{u}(k) + D(k)\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= C(k)\mathbf{x}(k) + E(k)\mathbf{w}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{n_u}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n_x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n_y}$ 和 $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{n_w}$ 分别表示输入、状态、输出和噪声. 系统噪声是持续的, 且满足 $\mathbf{w}(k) \in \varepsilon_{P_w}$. 输入和输出约束为

$$-\bar{u} \leq \mathbf{u}(k) \leq \bar{u}, \quad -\bar{\psi} \leq \Psi \mathbf{y}(k+1) \leq \bar{\psi} \quad (2)$$

其中, $\bar{u}_j > 0$, $j \in \{1, \dots, n_u\}$; $\bar{\psi}_j > 0$, $j \in \{1, \dots, q\}$; $\Psi \in \mathbf{R}^{q \times n_y}$. 此外, 假定

$$\begin{aligned} [A(k)|B(k)|C(k)|D(k)|E(k)] &\in \Omega \\ \Omega &= \text{Co}\{[A_l|B_l|C_l|D_l|E_l] | l \in \{1, \dots, L\}\} \end{aligned} \quad (3)$$

对于上述系统 (1)~(3), 动态输出反馈控制器^[5, 8, 10] 为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c(i+1|k) &= A_c(i|k)\mathbf{x}_c(i|k) + B_c(i|k)\mathbf{y}(i|k) \\ \mathbf{u}(i|k) &= C_c(i|k)\mathbf{x}_c(i|k) + D_c(i|k)\mathbf{y}(i|k) \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\mathbf{x}_c \in \mathbf{R}^{n_x}$ 为估计状态 (或称为控制器状态). 本文考虑特殊情况, 即在当前时刻 k , 所有的 $\lambda_l(k)$ 已知 (如果当前时刻 $\lambda_l(k)$ 不可知, 见文献 [9]), 利用式 (1) 和式 (4), 获得如下扩展的闭环系统:

$$\tilde{\mathbf{x}}(i+1|k) = \Phi(i, k)\tilde{\mathbf{x}}(i|k) + \Gamma(i, k)\mathbf{w}(k+i) \quad (5)$$

其中, $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{x}_c^T]^T$. 取 $\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} B_l \bar{D}_c E_j + D_l \\ \bar{B}_c^l E_j \end{bmatrix}$, $\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} A_l + B_l \bar{D}_c C_j & B_l \bar{C}_c^j \\ \bar{B}_c^l C_j & \bar{A}_c^l \end{bmatrix}$, 则 $[\Phi(i, k)|\Gamma(i, k)] = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)[\Phi_{ij}|\Gamma_{ij}]$. 控制器参数定义为如下参数依赖形式^[10]:

$$\begin{aligned} A_c(i|k) &= \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\bar{A}_c^{lj} \\ B_c(i|k) &= \sum_{l=1}^L \lambda_l(k+i)\bar{B}_c^l \\ C_c(i|k) &= \sum_{j=1}^L \lambda_j(k+i)\bar{C}_c^j \\ D_c(i|k) &= \bar{D}_c \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\{\bar{A}_c^{lj}, \bar{B}_c^l, \bar{C}_c^j, \bar{D}_c\}$ 为待求解矩阵.

二次有界的概念可用来刻画系统 (5) 的稳定性^[5, 8, 10].

2 输出反馈鲁棒预测控制综合方法

2.1 主优化问题和约束处理

在动态输出反馈鲁棒预测控制中, 每一时刻 k , 考虑如下优化问题^[10]:

$$\min_{\gamma, Q, \bar{A}_c^{lj}, \bar{B}_c^l, \bar{C}_c^j, \bar{D}_c} \max_{[A|B|C|D|E](k+i) \in \Omega, \mathbf{w}(k+i) \in \varepsilon_{P_w}} \gamma \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \quad -\bar{u} \leq \mathbf{u}(i|k) \leq \bar{u},$$

$$-\bar{\psi} \leq \Psi \mathbf{y}(i+1|k) \leq \bar{\psi}, \quad \forall i \geq 0 \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) \in \varepsilon_{Q^{-1}} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{x}}(i|k)\|_{Q^{-1}} \geq 1 &\Rightarrow \|\tilde{\mathbf{x}}(i|k)\|_{Q^{-1}}^2 - \\ &\|\tilde{\mathbf{x}}(i+1|k)\|_{Q^{-1}}^2 \geq \frac{1}{\gamma} \|\mathbf{y}(i|k)\|_Q^2 + \\ &\frac{1}{\gamma} \|\mathbf{u}(i|k)\|_{\mathcal{R}}^2, \quad \forall i \geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

其中,

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2^T \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Q, \mathcal{R} 为对称正定加权矩阵, 其他符号意义参考文献 [10]. 目标是求 $\{A_c(i|k), B_c(i|k), C_c(i|k), D_c(i|k), Q\}$, 使 $\tilde{\mathbf{x}}(k) \in \varepsilon_{Q^{-1}}$, 且式 (5) 关于公共 Lyapunov 矩阵 Q^{-1} 二次有界. 输入输出约束条件 (8) 的处理见文献 [10] 中 Lemma 4, 二次有界条件 (10) 的处理见文献 [10] 中 Lemma 2.

2.2 当前扩展状态约束条件

因当前状态 $\mathbf{x}(k)$ 不可测, 在每一时刻 k , 需要利用 $\mathbf{x}(k)$ 的界代替 $\mathbf{x}(k)$. 假定在每一时刻 $k \geq 0$, 满足

$$-\bar{H}(k)\bar{\mathbf{e}} \leq \mathbf{x}(k) - K(k)\mathbf{x}_c(k) \leq \bar{H}(k)\bar{\mathbf{e}} \quad (12)$$

其中, $\bar{H}(k) \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$ 和 $K(k) \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$ 为变换矩阵, $\{\bar{H}(0), K(0)\}$ 和 $\bar{\mathbf{e}} = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{n_x}]^T$ 预先给定. 定义集合 $P_e^0 = \{\xi \in \mathbf{R}^{n_x} \mid -\bar{H}(0)\bar{\mathbf{e}} \leq \xi \leq \bar{H}(0)\bar{\mathbf{e}}\}$ 为至多具有 2^{n_x} 个顶点的多面体. 多面体的顶点可表示为 $\bar{H}(0)S_r\bar{\mathbf{e}}$, 其中 S_r 中每个对角元素为 1 或 -1 , 而所有非对角元素为 0; 当 $r \neq i$ 时, 令 $S_r \neq S_i$, 则集合 P_e^0 至多存在 2^{n_x} 个不同的顶点. 根据式 (12),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &\in \text{Co}\{\boldsymbol{\chi}_1(k), \boldsymbol{\chi}_2(k), \dots, \boldsymbol{\chi}_{2^{n_x}}(k)\} \\ \boldsymbol{\chi}_r(k) &= K(k)\mathbf{x}_c(k) + \bar{H}(k)S_r\bar{\mathbf{e}}, \\ r &\in \{1, 2, \dots, 2^{n_x}\} \end{aligned} \quad (13)$$

引理 1. 满足式 (9) 的条件为存在对称矩阵 $\{M_1, \bar{M}_3, M_4, Q_1\}$, 使得如下的线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMIs) 满足:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_r(k) \\ \mathbf{x}_c(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 & * \\ -M_1 & \bar{M}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_r(k) \\ \mathbf{x}_c(k) \end{bmatrix} \leq 1, \\ r \in \{1, 2, \dots, 2^{n_x}\} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_3 & * \\ -M_1 & M_4 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} M_1 - M_4 & * \\ I & Q_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (15)$$

证明. 同文献 [10]. \square

注 2. 在引理 1 中取了 $M_2 = -M_1$, 故在式 (11) 中, $Q_2 = Q_3$. 本文的主优化问题形式上与文献 [10] 的式 (27) 相同 (形式上记为主优化问题 \star), 但采用了不同的真实状态的界的处理方法. 文献 [4–5, 8–9] 中估计误差约束考虑到 k 时刻之后所有的模型不确定性和噪声, 此法对于动态输出反馈鲁棒预测控制比较保守, 并且控制性能未必会提高. 文献 [10] 中估计误差约束表述为 $-\bar{\mathbf{e}} \leq H(k)[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_c(k)] \leq \bar{\mathbf{e}}$. 本文的辅助优化问题是对文献 [10] 的进一步改进. 文献 [4–5, 8–10] 定义了估计误差或类似估计误差的信号, 但本文不需要这个定义. 文献 [8–10] 中的辅助优化采用了锥补方法^[11], 增加了在线计算量. 本文在更新真实状态的界的过程中采用的方法相比锥补算法使得在线计算量降低.

2.3 辅助优化

优化问题 (7) ~ (10) 是递归可行的, 即其在所有 $k > 0$ 时可行, 当且仅当其在 $k = 0$ 可行. 然而, 由

于利用 k 时刻真实状态的界来代替未知状态 $\mathbf{x}(k)$, 可能导致主优化问题 \star 失去递归可行性. 在下文中, 记 $k' = k + 1$. 根据第 2.2 节的推导可知, 要得到 k' 时刻的真实状态的界需满足

$$-\bar{H}(k')\bar{\mathbf{e}} \leq \mathbf{x}(k') - K(k')\mathbf{x}_c(k') \leq \bar{H}(k')\bar{\mathbf{e}} \quad (16)$$

其中, $\bar{H}(k')$, $K(k')$ 为待求矩阵. 由式 (5) 和式 (12) 得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k') - K(k')\mathbf{x}_c(k') &= \\ &\sum_{l=1}^L \lambda_l(k) \sum_{j=1}^L \lambda_j(k) [\Delta_1 - K(k')\Delta_2] \\ \Delta_1 &= (A_l + B_l\bar{D}_cC_j)\mathbf{x}(k) + B_l\bar{C}_c^j\mathbf{x}_c(k) + \\ &\quad (B_l\bar{D}_cE_j + D_l)\mathbf{w}(k) \\ \Delta_2 &= \bar{B}_c^lC_j\mathbf{x}(k) + \bar{A}_c^{lj}\mathbf{x}_c(k) + \bar{B}_c^lE_j\mathbf{w}(k), \\ &\quad l, j \in \{1, 2, \dots, L\} \end{aligned} \quad (17)$$

取集合 $\mathbb{P}_w = \text{Co}\{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \dots, \boldsymbol{\omega}_{n_p^w}\}$ 为 ε_{P_w} 的外包集, 即 $\mathbb{P}_w \supset \varepsilon_{P_w}$. 进一步利用式 (13), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k') - K(k')\mathbf{x}_c(k') &\in \text{Co}\{\boldsymbol{\vartheta}_{rs}(k')\} \\ \boldsymbol{\vartheta}_{rs}(k') &= \sum_{l=1}^L \lambda_l(k) \sum_{j=1}^L \lambda_j(k) \boldsymbol{\vartheta}_{l_jrs}(k') = \\ &\sum_{l=1}^L \lambda_l(k) \sum_{j=1}^L \lambda_j(k) [\Delta'_1 - K(k')\Delta'_2] \\ \Delta'_1 &= (A_l + B_l\bar{D}_cC_j)\boldsymbol{\chi}_r(k) + B_l\bar{C}_c^j\mathbf{x}_c(k) + \\ &\quad (B_l\bar{D}_cE_j + D_l)\boldsymbol{\omega}_s \\ \Delta'_2 &= \bar{B}_c^lC_j\boldsymbol{\chi}_r(k) + \bar{A}_c^{lj}\mathbf{x}_c(k) + \bar{B}_c^lE_j\boldsymbol{\omega}_s, \\ &\quad r \in \{1, 2, \dots, 2^{n_x}\}, s \in \{1, 2, \dots, n_p^w\}, \\ &\quad l, j \in \{1, 2, \dots, L\} \end{aligned} \quad (18)$$

下面的不等式确保 k' 时刻的真实状态界 (16) 满足:

$$-\bar{H}(k')\bar{\mathbf{e}} \leq \boldsymbol{\vartheta}_{rs}(k') \leq \bar{H}(k')\bar{\mathbf{e}}, \\ r \in \{1, 2, \dots, 2^{n_x}\}, s \in \{1, 2, \dots, n_p^w\} \quad (19)$$

此外, 根据式 (9) 知, 若下一时刻求解主优化问题 \star , 则扩展状态约束为 $\tilde{\mathbf{x}}(k') \in \varepsilon_{Q(k')^{-1}}$. 我们考虑 $Q(k') = Q(k)$ 为 k' 时刻可行解的情况. 易知, 式 (20) 保证 $\tilde{\mathbf{x}}(k') \in \varepsilon_{Q(k)^{-1}}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \boldsymbol{x}_r(k') & Q_1 & * \\ \boldsymbol{x}_c(k') & Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad r \in \{1, 2, \dots, 2^{n_x}\}$$

$$\boldsymbol{x}_r(k') = K(k')\boldsymbol{x}_c(k') + \bar{H}(k')S_r\bar{\boldsymbol{e}},$$

$$r \in \{1, 2, \dots, 2^{n_x}\} \quad (20)$$

如果式 (19) 和 (20) 可行, 则主优化问题 \star 在 k' 时刻可行. 利用 Schur 补引理和 $Q_2 = Q_3$, 式 (20) 可变换为 LMIs:

$$\begin{bmatrix} 1 - \boldsymbol{x}_c(k')^T Q_3^{-1} \boldsymbol{x}_c(k') & * \\ (K(k') - I)\boldsymbol{x}_c(k') + \bar{H}(k')S_r\bar{\boldsymbol{e}} & Q_1 - Q_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$r \in \{1, 2, \dots, 2^{n_x}\} \quad (21)$$

满足式 (21) 和 (19) 的 $\bar{H}(k')$ 和 $K(k')$ 可能有无穷多个, 因此有必要确定它们的求解标准. 令 $\theta I \geq \|\bar{H}(k')\|^2$, $\beta I \geq \|K(k') - I\|^2$, 并使最小化 θ, β 为求解标准. 这两个约束可以化为如下 LMIs:

$$\begin{bmatrix} \beta I & * \\ K(k') - I & I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \theta I & * \\ \bar{H}(k') & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (22)$$

当 $Q_1, Q_2, \boldsymbol{x}_c(k'), \boldsymbol{v}_{rs}(k')$ 确定后, 在 k 和 k' 采样时刻之间求解如下辅助优化问题:

$$\min_{\theta, \beta, K(k'), \bar{H}(k')} \theta + \beta$$

s.t. (19), (21), (22) (23)

如果式 (23) 可行, 则在 k' 时刻主优化问题 \star 可行; 因其时刻 k' 之前的最近时刻解是时刻 k' 的可行解, 故时刻 k' 再优化可使控制性能提高. 当式 (23) 不可行时, 时刻 k' 不求解主优化问题 \star , 并通过求解下面的辅助优化问题来更新真实状态的界:

$$\min_{\theta, \beta, K(k'), \bar{H}(k')} \theta + \beta$$

s.t. (19), (22) (24)

2.4 总算法

算法 1. 离线选择 $p_{ro} = 1, \bar{H}(0) = K(0) = I, \boldsymbol{x}_c(0)$ 和 $\bar{\boldsymbol{e}}$. 在每个时刻 $k \geq 0$, 步骤如下:

步骤 1. 若 $p_{ro} = 1$, 则求解主优化问题 \star , 求解方法见文献 [10], 计算中选取 $M_2 = -M_1$. 如果 $p_{ro} = 0$, 不求解主优化问题 \star , 且采用其最近时刻的控制律.

步骤 2. 通过式 (4) 和 (5) 求控制输入 $\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{u}(0|k)$, 控制器状态 $\boldsymbol{x}_c(k') = A_c(k)\boldsymbol{x}_c(k) + B_c(k)\boldsymbol{y}(k)$.

步骤 3. 求解辅助优化式 (23). 如果式 (23) 不可行, 则令 $p_{ro} = 0$, 并求解辅助优化式 (24); 如果式 (23) 可行, 则令 $p_{ro} = 1$.

定理 1. 对系统 (1) 和 (2), 采用算法 1, 假定 $-\bar{\boldsymbol{e}} \leq \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_c(0) \leq \bar{\boldsymbol{e}}$. 如果主优化问题 \star 在 $k = 0$ 时可行, 则 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ 将收敛到 $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$ 附近的一个区域, 且约束 (2) 在所有 $k \geq 0$ 时满足.

证明. 若在 $k = 0$ 时主优化问题 \star 可行, 则根据算法 1, 在所有 $k > 0$, 都存在可行的控制律. 根据文献 [10] 中 Lemma 2, 式 (10) 保证了系统 (5) 是二次有界的. 此外, 由于式 (10) 比基本的二次有界条件更苛刻, $\tilde{\boldsymbol{x}}(i|k)$ 在 $\varepsilon_{Q^{-1}}$ 内时仍可继续向 $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$ 附近收敛.

假设主优化问题 \star 在时刻 k 得到最优解 $\gamma^*(k)$, 进一步考虑如下两种情况:

1) 辅助优化式 (23) 可行. 主优化问题 \star 在 k' 时刻更新最优解, 记为 $\gamma^*(k')$. 在 k' 时刻, 主优化问题 \star 的可行解为 $\gamma(k') = \gamma^*(k)$, 则 k' 时刻求解主优化问题 \star 后 $\gamma^*(k') \leq \gamma(k')$. 因此, $\gamma^*(k') \leq \gamma^*(k)$.

2) 辅助优化式 (23) 不可行, 即 $p_{ro} = 0$. k' 时刻主优化问题 \star 不进行求解, 采用 k 时刻主优化问题 \star 的解能够保证 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k')$ 在 $\varepsilon_{Q^*(k)-1}$ 内.

考虑所有 $k^\circ \geq 0$, $\gamma^*(k^\circ)$ 将不随时间 k° 的增加而增加, 其中 k° 为主优化问题 \star 求解时刻. 因在一定时间后 $\gamma^*(k^\circ)$ 将收敛到低于某个值, 所以 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ 将收敛于 $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$ 附近. 文献 [10] 中 Lemma 4 确保输入和输出约束 (2) 满足. \square

3 数值算例

考虑连续搅拌釜式反应器 (Continuous stirred tank reactor, CSTR) 模型 (同文献 [10]). 反应釜中为 $A \rightarrow B$ 的不可逆放热化学反应. 根据反应物 A 的物料平衡和能量平衡条件, 可得以下动态模型:

$$\begin{aligned} \dot{C}_A &= \frac{q}{V}(C_{Af} - C_A) - k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)C_A + N_c w \\ \dot{T} &= \frac{q}{V}(T_f - T) + \frac{-\Delta H}{\rho C_p} k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)C_A \times \\ &\quad \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - T) + N_T w \end{aligned} \quad (25)$$

其中, C_A 为反应釜中 A 物质浓度, T 为反应釜的反应温度, T_c 为冷却剂的温度. 目标是通过操控 T_c 来调节 T , 并且满足约束 $T_c^l \leq T_c \leq T_c^u, T^l \leq T \leq T^u, C_A^l \leq C_A \leq C_A^u$. 给定平衡变点为 $\{C_A^{eq}, T^{eq}, T_c^{eq}\}$. 定义状态变量为 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T = [C_A - C_A^{eq}, T - T^{eq}]^T$, 输入为 $u = T_c - T_c^{eq}$ 以及 $y = x_2 + N_y w$. 状态 x_2 满足约束 $\underline{x}_2 \leq x_2 \leq \bar{x}_2$ ($\underline{x}_2 = T^l - T^{eq}, \bar{x}_2 = T^u - T^{eq}$). 其中, $\varphi_1(x_2) = k_0 \exp(-\frac{E/R}{x_2})$ 和 $\varphi_2(x_2) = k_0[\exp(-\frac{E/R}{x_2 + T^{eq}}) - \exp(-\frac{E/R}{x_2})]$. 令 $\lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{\varphi_1(\underline{x}_2) - \varphi_1(\bar{x}_2)}{\varphi_1(\bar{x}_2) - \varphi_1(\underline{x}_2)}, \lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{\varphi_1(\bar{x}_2) - \varphi_1(\underline{x}_2)}{\varphi_1(\bar{x}_2) - \varphi_1(\underline{x}_2)}, \lambda_3 =$

$$\frac{1}{2} \frac{\varphi_2(\underline{x}_2) - \varphi_2(\bar{x}_2)}{\varphi_2(\bar{x}_2) - \varphi_2(\underline{x}_2)}, \lambda_4 = \frac{1}{2} \frac{\varphi_2(\bar{x}_2) - \varphi_2(\underline{x}_2)}{\varphi_2(\bar{x}_2) - \varphi_2(\underline{x}_2)}.$$

选择 $T_c^1 = 328 \text{ K}$, $T_c^u = 348 \text{ K}$, $T^1 = 340 \text{ K}$, $T^u = 360 \text{ K}$, $C_A^1 = 0 \text{ mol/L}$, $C_A^u = 1 \text{ mol/L}$, $C_A^{eq} = 0.5 \text{ mol/L}$, $T^{eq} = 350 \text{ K}$, $T_c^{eq} = 338 \text{ K}$, $q = 100 \text{ L/min}$, $C_{Af} = 1 \text{ mol/L}$, $T_f = 350 \text{ K}$, $V = 100 \text{ L}$, $\rho = 1000 \text{ g/L}$, $C_p = 0.239 \text{ J/(g K)}$, $\Delta H = -1.2 \times 10^4 \text{ J/(min K)}$, $E/R = 8750 \text{ K}$, $k_0 = 7.2 \times 10^{10} \text{ min}^{-1}$, $UA = 5 \times 10^4 \text{ J/(min K)}$, $N_c = 0.05 \text{ mol/(L min)}$, $N_T = 1 \text{ K/min}$, $N_y = 0 \text{ K}$. 上述的动态系统 (25) 可以用如下的连续时间形式描述, 即顶点为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.7642 & -0.0381 \\ 138.7889 & -1.1800 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.7177 & -0.0381 \\ -14.1716 & -1.1800 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -2.2410 & -0.0622 \\ 62.3086 & 0.0299 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2.2410 & -0.0140 \\ 62.3086 & -2.3900 \end{bmatrix}$$

$$B_l = \begin{bmatrix} 0 & 2.0921 \end{bmatrix}^T, \quad C_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_l = \begin{bmatrix} 0.05 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad E_l = 0,$$

$$l \in \{1, 2, 3, 4\}$$

针对采样时间 T_s 离散化各个子模型得到需要的离散模型.

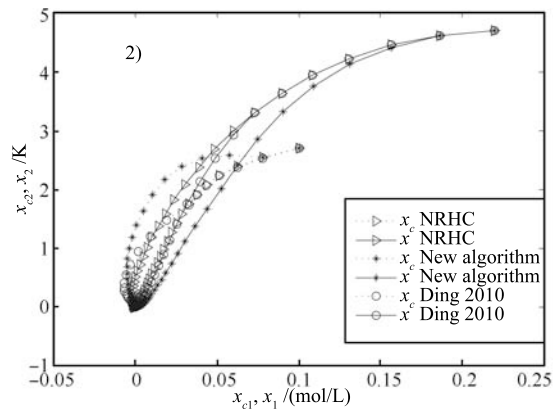
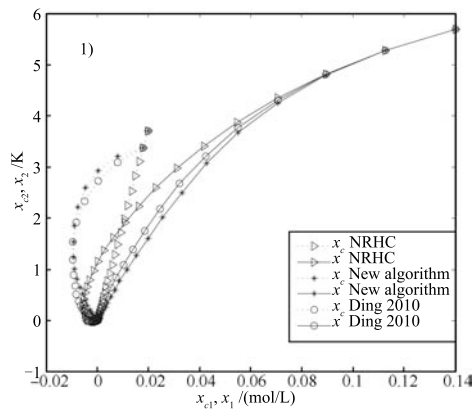


图 1 闭环系统状态轨迹图

Fig. 1 The state trajectories of the closed-loop system

选取采样时间 $T_s = 0.05 \text{ min}$, $P_w = 100$, $Q = 1$, $R = 0.25$. 主优化问题 \star 求解过程中固定 $\alpha = 0.001$. 仿真采用 Matlab 7.6 中的 LMI 工具箱 (CPU 为赛扬 1.6 G, 内存 512 M). 针对如下两种情况:

$$1) \quad \mathbf{x}_c(0) = [0.02, 3.7]^T, \quad \mathbf{x}(0) = [0.14, 5.7]^T;$$

$$2) \quad \mathbf{x}_c(0) = [0.10, 2.7]^T, \quad \mathbf{x}(0) = [0.22, 4.7]^T.$$

分别采用本文算法、文献 [10] 中算法 ($\mu = 0.99$) 和非滚动时域控制进行了仿真, 仿真中 w 统一取为 $[-0.1, 0.1]$ 之间的有界噪声序列. 所谓非滚动时域控制 (Non receding horizon control, NRHC), 即一直采用 $k = 0$ 时刻的最优解, 不进行辅助优化. 仿真结果如图 1~5 和表 1 所示, 其中 “New algorithm” 指本文方法, “Ding 2010” 指文献 [10] 的算法. 同文献 [10] 相比, 本文辅助优化中 k 增加了优化求解的自由度, 因此更容易保证辅助优化的可行性, 且提高了控制性能. 此外, 采用的方法相比于锥补算法能使在线计算量减小. NRHC 因不滚动优化, 故控制性能较差.

表 1 仿真结果对比

Table 1 The comparison of simulation results ($k \leq 57$)

	主优化可行时刻	总仿真时间 (s)
1) New algorithm	$k \in \{0 \sim 57\}$	217.6
1) Ding 2010	$k \in \{0 \sim 57\}$	271.2
1) NRHC	$k = 0$	31.2
2) New algorithm	$k \in \{0 \sim 57\}$	220.5
2) Ding 2010	$k \in \{0, 6 \sim 57\}$	260.3
2) NRHC	$k = 0$	30.4

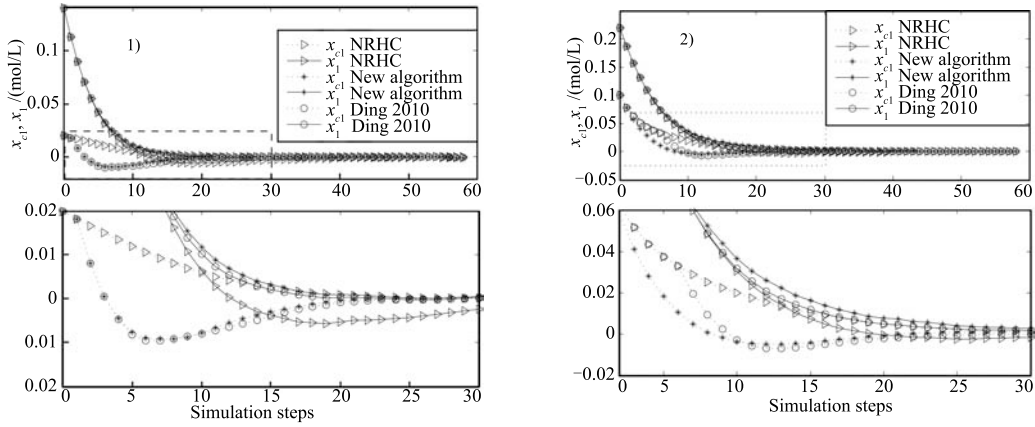


图 2 状态 x_{c1}, x_1 响应图

Fig. 2 The state responses of the closed-loop system (x_{c1} and x_1)

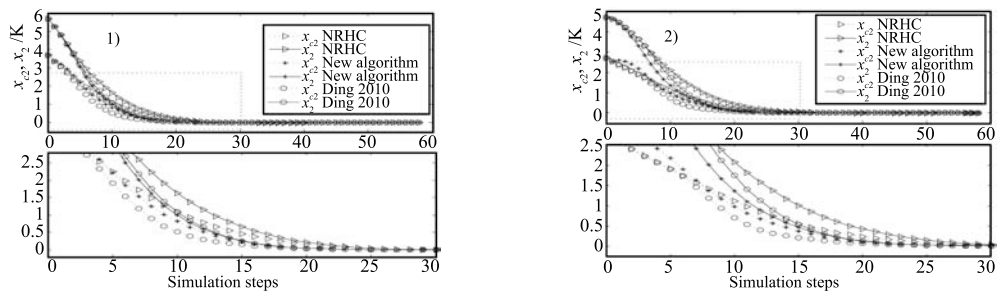


图 3 状态 x_{c2}, x_2 响应图

Fig. 3 The state responses of the closed-loop system (x_{c2} and x_2)

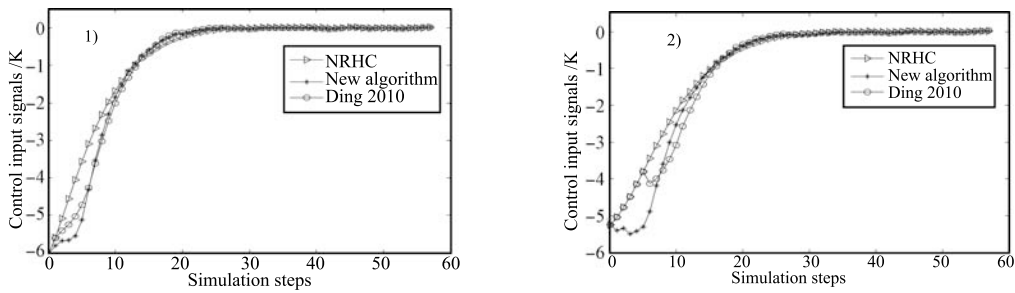


图 4 控制输入信号

Fig. 4 Control input signals

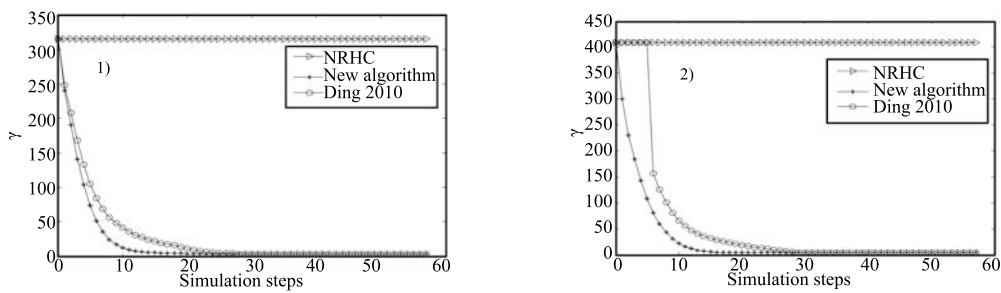


图 5 性能指标

Fig. 5 Values of performance index

4 结论

本文对具有多包不确定和有界噪声的系统进行了动态输出反馈鲁棒预测控制的研究. 辅助优化中提出的更新真实状态的界的方法能够降低在线计算量. 同时真实状态界的更新过程中矩阵 K 为求解增加了自由度. 所给的控制器能够确保状态收敛到 $\tilde{x} = 0$ 附近.

References

- 1 Xi Yu-Geng, Li De-Wei. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(10): 1225–1234
(席裕庚, 李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状. *自动化学报*, 2008, **34**(10): 1225–1234)
- 2 Ding B C. Feasibility, optimality and computational complexity of robust model predictive control. In: Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference. Yantai, China: IEEE, 2008. 3052–3057
- 3 Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 1996, **32**(10): 1361–1379
- 4 Ding B C, Xi Y G, Cychowski M T, O'Mahony T. A synthesis approach for output feedback robust constrained model predictive control. *Automatica*, 2008, **44**(1): 258–264
- 5 Ding B C, Xie L H. Robust model predictive control via dynamic output feedback. In: Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing, China: IEEE, 2008. 3388–3393
- 6 Alessandri A, Baglietto M, Battistelli G. On estimation error bounds for receding-horizon filters using quadratic boundedness. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(8): 1350–1355
- 7 Alessandri A, Baglietto M, Battistelli G. Design of state estimators for uncertain linear systems using quadratic boundedness. *Automatica*, 2006, **42**(3): 497–502
- 8 Ding B C, Xie L H, Xue F Z. Improving robust model predictive control via dynamic output feedback. In: Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference. Guilin, China: IEEE, 2009. 2116–2121
- 9 Ding B C, Xie L H. Dynamic output feedback robust model predictive control with guaranteed quadratic boundedness. In: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control Held Jointly with the 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 8034–8039
- 10 Ding B C. Constrained robust model predictive control via parameter-dependent dynamic output feedback. *Automatica*, 2010, **46**(9): 1517–1523
- 11 Ghaoui L E, Oustry F, AitRami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(8): 1171–1176



平续斌 西安交通大学综合自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为预测控制及其应用.

E-mail: pingxubin@126.com

(**PING Xu-Bin** Ph.D. candidate at the Institute of Integrated Automation, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers predictive control and its

applications.)



丁宝苍 2000 年和 2003 年分别在石油大学(北京)和上海交通大学获得硕士、博士学位. 2005 年 9 月到 2006 年 8 月间为加拿大阿尔伯达大学博士后. 2006 年 11 月到 2007 年 8 月间为新加坡南洋理工大学博士后. 曾为河北工业大学副教授、重庆大学教授. 现为西安交通大学教授. 主要研究方向为预测控制, 模糊控制及其在过程系统中的应用. 本文通信作者.

E-mail: baocang.ding@gmail.com

(**DING Bao-Cang** Received his master degree from University of Petroleum in China (Beijing) in 2000 and Ph.D. degree from Shanghai Jiao Tong University in 2003. From September 2005 to August 2006, he was a post-doctoral research fellow at University of Alberta, Canada. From October 2006 to August 2006, he was a post-doctoral research fellow at Nanyang Technological University, Singapore. He once was an associate professor at Hebei University of Technology and professor at Chongqing University. Now, He is a professor at Xi'an Jiaotong University. His research interest covers predictive control, fuzzy control and their applications in process industry. Corresponding author of this paper.)



韩崇昭 西安交通大学电子与信息工程学院自动化系教授. 主要研究方向为多源信息融合, 随机控制与自适应控制, 非线性频谱分析.

E-mail: czhan@mail.xjtu.edu.cn

(**HAN Chong-Zhao** Professor in the Department of Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers multisource information fusion, stochastic control, adaptive control, and nonlinear spectral analysis.)