

一类非线性系统输出反馈 自适应扰动抑制

尚芳^{1,2} 刘允刚³ 张桂青^{1,2} 张承慧³

摘要 研究了一类依赖于不可量测状态增长非线性系统的输出反馈自适应扰动抑制问题. 与现有文献不同, 所研究的系统具有更多的未知参数, 尤其是不确定控制系数. 为了解决该问题, 引入了动态高增益 K-滤波器, 进而构造了基于 K-滤波器的状态观测器. 在输出反馈控制器的设计过程中, 引入了待定设计参数, 增加了设计的自由度. 结果表明, K-滤波器的动态增益和设计参数的恰当选择可以保证闭环系统的全局稳定性, 从而实现系统 \mathcal{L}_2 -增益意义下的扰动抑制.

关键词 非线性系统, 扰动抑制, K-滤波器, 输出反馈, 自适应控制

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01530

Adaptive Disturbance Attenuation by Output Feedback for a Class of Nonlinear Systems

SHANG Fang^{1,2} LIU Yun-Gang³ ZHANG Gui-Qing^{1,2}
ZHANG Cheng-Hui³

Abstract This paper investigates the problem of adaptive disturbance attenuation by output feedback for a class of nonlinear systems with unmeasured states dependent growth. Different from the existing references, the systems studied have more unknown parameters, especially uncertain control coefficients. To solve this problem, the dynamic high-gain K-filters are introduced, and a state observer is constructed based on the K-filters. In output feedback controller design process, to-be-determined design parameters are introduced, to add the design freedom. It is shown that the global stability of the closed-loop system can be guaranteed by the appropriate choice of the dynamic gain of the K-filters and the design parameters, and hence disturbance attenuation is achieved in the sense of \mathcal{L}_2 -gain.

Key words Nonlinear systems, disturbance attenuation, K-filters, output feedback, adaptive control

收稿日期 2011-01-05 录用日期 2011-06-29

Manuscript received January 5, 2011; accepted June 29, 2011

国家自然科学基金 (61104069, 61143011, 60974003, 61074149, 50977054, 61034007), 山东省自然科学基金 (JQ200919), 山东大学自主创新基金 (2009JQ008), 教育部新世纪优秀人才支持计划 (NCET-07-0513), 教育部科学技术研究重点项目 (108079), 山东省优秀中青年科学家奖励基金 (2007BS01010) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61104069, 61143011, 60974003, 61074149, 50977054, 61034007), Natural Science Foundation for Distinguished Young Scholar of Shandong Province of China (JQ200919), Independent Innovation Foundation of Shandong University (2009JQ008), the Program for New Century Excellent Talents in University of China (NCET-07-0513), the Key Science and Technique Foundation of Ministry of Education of China (108079), and the Excellent Young and Middle-aged Scientist Award Grant of Shandong Province of China (2007BS01010)

1. 山东建筑大学信息与电气工程学院 济南 250101 2. 山东省智能建筑技术重点实验室 济南 250101 3. 山东大学控制科学与工程学院 济南 250061

1. School of Information and Electrical Engineering, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101 2. Shandong Provincial Key Laboratory of Intelligent Buildings Technology, Jinan 250101 3. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061

近年来, 几类依赖于不可量测状态非线性系统的输出反馈控制设计问题得到了广泛关注, 并取得了大量关于镇定和跟踪控制问题的研究成果^[1-8], 但是扰动抑制问题的研究较少^[9-12]. 文献 [9] 研究了一类最小相位不确定的非线性系统的输出反馈扰动抑制问题. 文献 [10] 研究了一类依赖于不可测状态非线性系统的输出反馈扰动抑制问题. 文献 [11] 应用依赖于状态的变换解决了一类不确定非线性系统的输出反馈扰动抑制问题. 上述文献所研究的系统都具有已知的控制系数. 最近, 文献 [12] 研究了一类控制系数不确定的非线性系统的输出反馈扰动抑制问题, 但系统满足的假设条件比较强. 本文将推广 [10, 12] 中的结果, 研究一类控制系数不确定的更一般非线性系统的输出反馈自适应扰动抑制问题.

1 问题描述

考虑下面单输入单输出非线性系统¹:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = f_0(t, \zeta, y) + h_0(t, \zeta, y)\omega \\ \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(t, \zeta, \mathbf{x}, u) + \mathbf{h}_i^T(t, \zeta, \mathbf{x}, u)\omega, \\ \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = gu + f_n(t, \zeta, \mathbf{x}, u) + \mathbf{h}_n^T(t, \zeta, \mathbf{x}, u)\omega \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_m]^T \in \mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态, 其初始值分别为 $\zeta(t_0) = \zeta_0$ 和 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$; $u \in \mathbf{R}$ 和 $y \in \mathbf{R}$ 分别是系统输入和输出; $\omega \in \mathbf{R}^s$ 是扰动, 且 $\omega(t) \in \mathcal{L}_2[t_0, +\infty)$; 控制系数 g 是不确定的常数, 且 $g \neq 0$; 函数 $f_0: [t_0, +\infty) \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ 和 $h_0: [t_0, +\infty) \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{m \times s}$ 是连续可微的, 且当 $t \in [t_0, +\infty)$ 时, $f_0(t, 0, 0) = 0$, 而函数 $f_i: [t_0, +\infty) \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$ 和 $\mathbf{h}_i: [t_0, +\infty) \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^s$, $i = 1, \dots, n$ 关于第一个变量是连续的, 关于其他变量是局部 Lipschitz 的, 且当 $t \in [t_0, +\infty)$ 时, $f_i(t, 0, 0, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. 在下文中, 设只有系统的输出是可量测的, 且系统 (1) 满足如下假设条件:

1) 存在连续可微函数 $U_0(t, \zeta)$, \mathcal{K}_∞ 类函数 $\underline{\kappa}$, $\bar{\kappa}$, 以及已知正常数 $c_{0,i}$, $i = 1, 2, 3$, 满足

$$\underline{\kappa}(\|\zeta\|) \leq U_0(t, \zeta) \leq \bar{\kappa}(\|\zeta\|)$$

$$\dot{U}_0(t, \zeta) \leq -c_{0,1}\|\zeta\|^2 + c_{0,2}y^2 + c_{0,3}\|\omega\|^2$$

2) 存在未知常数 $c > 0$, 使得

$$|f_i(t, \zeta, \mathbf{x}, u)| \leq c(\|\zeta\| + |x_1| + \dots + |x_i|), \quad i = 1, \dots, n$$

3) 存在未知常数 $H > 0$, 满足

$$\|\mathbf{h}_i(t, \zeta, \mathbf{x}, u)\| \leq H, \quad i = 1, \dots, n$$

4) g 的符号已知, 且存在已知的正常数 g_N 和 g_M , 使得

$$g_N \leq |g| \leq g_M$$

¹本文中, I 表示适当维数的单位矩阵; \mathbf{R} 表示全体实数的集合, \mathbf{R}^n 表示 n 维实空间; 对于任意向量或矩阵 \mathbf{X} , \mathbf{X}^T 表示其转置, $\|\mathbf{X}\|_\infty$ 和 $\|\mathbf{X}\|$ 分别表示向量的无穷范数和欧氏范数, 及其导出的矩阵范数; $\mathcal{L}_2[t_0, +\infty)$ 表示在 $[t_0, +\infty)$ 上平方可积的所有函数组成的空间, \mathcal{K}_∞ 类函数表示定义在 $[0, +\infty)$ 的严格递增、正定、径向无界的连续函数.

更具体地, 本文目标是针对满足假设条件 1)~4) 的系统 (1), 设计输出反馈控制器, 当扰动 $\omega(t) = \mathbf{0}$ 时, 使得原系统的状态是渐近稳定的; 当扰动 $\omega(t) \in \mathcal{L}_2[t_0, +\infty)$ 时, 对于任一预先给定的小实数 $\delta > 0$, 满足

$$\int_{t_0}^t |y(\tau)|^2 d\tau \leq \int_{t_0}^t \delta^2 \|\omega(\tau)\|^2 d\tau + \delta_0(\zeta_0, \mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0), \quad \forall t \geq t_0 \quad (2)$$

其中, $\bar{\mathbf{x}}$ 是对状态 \mathbf{x} 的初始估计, 且 $\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0$, $\delta_0(\zeta_0, \mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0)$ 是待定的非负函数, 且 $\delta_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$.

假设 1) 意味着子系统 ζ 是输入到状态稳定的, 即系统 (1) 具有稳定的零动态. 假设 2) 表明系统 (1) 的非线性增长线性依赖于不可测状态, 且增长率是未知的常数. 假设 3) 意味着扰动的系数向量 \mathbf{h}_i 具有未知的上界, 而假设 4) 表明系统 (1) 具有不确定控制系数 g . 事实上, 当系统 (1) 的控制系数已知 ($g = 1$), 且非线性关于不可量测状态增长率和扰动项系数的范数上界都是已知的常数时, 文献 [10] 已经解决了系统的输出反馈 \mathcal{L}_2 -增益扰动抑制问题. 当控制系数已知时, 则可以设计形如文献 [10] 中的高增益 Luenberger 型观测器. 但是, 当控制系数不确定时, 若采用 Luenberger 型观测器, 得到的状态估计误差动态将依赖于控制输入 u , 这将导致输出反馈控制设计相当困难, 甚至无法实现. 此外, 当系统 (1) 满足假设条件 1)~4), 其中, c 和 H 都是已知常数时, 文献 [12] 解决了系统的输出反馈 \mathcal{L}_2 -增益扰动抑制问题. 本文将上述两篇文章的结果推广到满足假设 1)~4) 的系统 (1) 的扰动抑制问题. 由于控制系数不确定且系统中存在多个未知因素, 文献 [12] 中基于静态高增益 K-滤波器的状态观测器难以应用或不可用. 因此, 针对系统 (1), 设计了基于动态高增益 K-滤波器的状态观测器, 并设计了相应的自适应输出反馈控制器.

注 1. 文献 [13] 第 29 页中给出了质点质量未知系统的扰动抑制控制问题. 当系统中参数的上界未知且质量的下界未知时, 该系统是系统 (1) 的特例.

2 自适应输出反馈控制

本节针对系统 (1) 构造基于高增益 K-滤波器的状态观测器, 并利用反推技术设计输出反馈控制器. 随后, 给出主要结果及其证明过程.

2.1 高增益 K-滤波器和状态估计

受文献 [3-4, 6, 14] 的启发, 构造如下形式的动态高增益 K-滤波器:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = -L^i l_i \xi_1 + \xi_{i+1} + L^i l_i y, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\xi}_n = -L^n l_n \xi_1 + L^n l_n y \\ \dot{\lambda}_i = -L^i l_i \lambda_1 + \lambda_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\lambda}_n = -L^n l_n \lambda_1 + u \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$, $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$, 其初始值分别为 $\boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_0$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(t_0) = \boldsymbol{\lambda}_0$. l_i , $i = 1, \dots, n$, 是待定的常量且 $l_1 > 0$, 动态增益 L 满足

$$\dot{L} = \frac{y^2}{L^2} + \frac{l_1}{2L^4} \lambda_1^2, \quad L(t_0) = 1 \quad (4)$$

由此可知, 对于 $t \geq t_0$, 有 $L(t) \geq 1$.

定义状态估计 $\hat{x}_i = \xi_i + g\lambda_i$, 以及状态估计误差 $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$, $i = 1, \dots, n$. 引入下面的状态变换:

$$\begin{cases} \epsilon_i = \frac{\tilde{x}_i}{L^i}, & \eta_i = \frac{\xi_i}{L^i}, & i = 1, \dots, n \\ \epsilon_1 = \frac{y}{L}, & \epsilon_i = \frac{\lambda_i}{L^i}, & i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (5)$$

注意到 $\lambda_1 = \frac{1}{g}(y - \tilde{x}_1 - \xi_1) = \frac{L}{g}(\epsilon_1 - \epsilon_1 - \eta_1)$, 可得

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \mathbf{f}_0 + h_0 \omega \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = L A \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\phi} - \frac{\dot{L}}{L} D \boldsymbol{\epsilon} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = L A \boldsymbol{\eta} + L \boldsymbol{\epsilon}_1 - \frac{\dot{L}}{L} D \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\epsilon}_1 = g L \epsilon_2 + L \epsilon_2 + L \eta_2 + \phi_1 - \frac{\dot{L}}{L} \epsilon_1 \\ \dot{\epsilon}_i = L \epsilon_{i+1} + \frac{l_i L}{g} (\epsilon_1 + \eta_1 - \epsilon_1) - \frac{i \dot{L}}{L} \epsilon_i, \\ \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{\epsilon}_n = \frac{1}{L^n} u + \frac{l_n L}{g} (\epsilon_1 + \eta_1 - \epsilon_1) - \frac{n \dot{L}}{L} \epsilon_n \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]^T$, $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_n]^T$, 初值分别为 $\boldsymbol{\epsilon}(t_0) = \boldsymbol{\epsilon}_0$, $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}_0$, $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \dots, \phi_n]^T = [\frac{f_1 + h_1^T \omega}{L}, \dots, \frac{f_n + h_n^T \omega}{L^n}]^T$, $D = \text{diag}\{1, \dots, n\}$, $\mathbf{l} = [l_1, \dots, l_n]^T$, $A = \begin{bmatrix} -l_1 & & & \\ & I & & \\ & \vdots & & \\ & -l_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

选择常向量 \mathbf{l} 使得矩阵 A 是 Hurwitz 的, 并且使得正常数 h 和对称正定矩阵 P 存在且满足

$$A^T P + P A \leq -I, \quad D P + P D \geq h I \quad (7)$$

需要指出的是, 根据文献 [2] 中引理 1, 上面关于 \mathbf{l} 的选择总是可行的.

在设计控制器之前, 先给出下面的命题, 它刻画了系统 (6) 中 $\boldsymbol{\epsilon}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 子系统类似于输入到输出稳定的特性.

命题 1. 考虑系统 (6) 的 $\boldsymbol{\epsilon}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 子系统, 令 $V_{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\epsilon}^T P \boldsymbol{\epsilon}$, $V_{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta}^T P \boldsymbol{\eta}$. 则在系统 (6) 的最大解存在区间内, 存在未知常数 $c_0 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\boldsymbol{\eta}} &\leq -\frac{L}{2} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 2\|P\mathbf{l}\|^2 L \epsilon_1^2 \\ \dot{V}_{\boldsymbol{\epsilon}} &\leq -(L - c_0) \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2 + \frac{c_0 \cdot 1}{2L} \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 + c_0 \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2 + \frac{1}{L} \|\omega\|^2 \end{aligned}$$

证明. 沿着系统 (6) 的 $\boldsymbol{\eta}$ 子系统的轨迹, 满足

$$\dot{V}_{\boldsymbol{\eta}} \leq -L \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 2\boldsymbol{\eta}^T P L \boldsymbol{\epsilon}_1 - \frac{\dot{L}}{L} \boldsymbol{\eta}^T (D P + P D) \boldsymbol{\eta}$$

根据完全配方技术知, $2\boldsymbol{\eta}^T P L \boldsymbol{\epsilon}_1 \leq \frac{L}{2} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 2\|P\mathbf{l}\|^2 L \epsilon_1^2$. 由上式, 式 (4) 及式 (7), 可得

$$\dot{V}_{\boldsymbol{\eta}} \leq -\frac{L}{2} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 2\|P\mathbf{l}\|^2 L \epsilon_1^2$$

即命题 1 的第一个不等式成立.

沿着系统 (6) 的 ϵ 子系统的轨迹, V_ϵ 关于时间的导数满足

$$\dot{V}_\epsilon \leq -L\|\epsilon\|^2 + 2\|P\| \cdot \|\epsilon\| \cdot \|\phi\|_\infty - \frac{h\dot{L}}{L}\|\epsilon\|^2 \quad (8)$$

首先处理上面不等式右边第二项. 由假设 2) ~ 4) 和式 (5), 对于 $i = 1, \dots, n$, 有

$$|\phi_i| \leq \frac{c}{L}\|\zeta\| + \sqrt{nc} \max\{1, g_M\}(\|\epsilon\| + \|\eta\|) + \frac{H}{L}\|\omega\|$$

从而可得

$$2\|P\| \cdot \|\epsilon\| \cdot \|\phi\|_\infty \leq \frac{c_{0,1}}{2L}\|\zeta\|^2 + c_0(\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) + \|\epsilon\|^2 + \frac{1}{L}\|\omega\|^2$$

其中, $c_0 = \frac{2c^2}{c_{0,1}}\|P\|^2 + nc^2 \max\{1, g_M^2\}\|P\|^2 + 1 + H^2\|P\|^2 + 2\sqrt{nc} \max\{1, g_M\}\|P\|$ 是未知常数.

将上式代入式 (8), 又因 $-\frac{h\dot{L}}{L}\|\epsilon\|^2 \leq 0$, 可得命题 1 的第二个不等式成立. \square

2.2 输出反馈控制设计

本小节利用反推技术设计系统 (6) 的输出反馈扰动抑制控制器, 设计过程将以逐步迭代的方式给出.

步骤 1. 令 $V_1 = \frac{1}{L}U_0 + V_\epsilon + 2V_\eta + \frac{1}{2L^4}\lambda_1^2 + \frac{1}{2}\epsilon_1^2$ 为本步的候选 Lyapunov 函数, 其中 V_ϵ 和 V_η 的定义已在命题 1 中给出. 则由假设 1), 命题 1, 以及式 (6), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{c_{0,1}}{2L}\|\zeta\|^2 - (L - c_0)(\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) + \frac{c_{0,3} + 1}{L}\|\omega\|^2 + \\ & \|\epsilon\|^2 - \frac{l_1}{L^3}\lambda_1^2 + \frac{1}{L^2}\lambda_1\epsilon_2 + (4\|P\|^2 + c_{0,2})L\epsilon_1^2 - \frac{\dot{L}}{L^2}U_0 - \\ & \frac{2\dot{L}}{L^5}\lambda_1^2 + \epsilon_1(gL\epsilon_2 + L\epsilon_2 + L\eta_2 + \phi_1 - \frac{\dot{L}}{L}\epsilon_1) \end{aligned} \quad (9)$$

首先利用完全配方技术处理如下几项: $L\epsilon_1(\epsilon_2 + \eta_2) \leq \frac{L}{2}(\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) + L\epsilon_1^2$, $\frac{1}{L^2}\lambda_1\epsilon_2 \leq \frac{l_1}{2L^3}\lambda_1^2 + \frac{1}{2l_1}\epsilon_2^2$, $\epsilon_1\phi_1 \leq \frac{c_{0,1}}{4L}\|\zeta\|^2 + \frac{1}{L}\|\omega\|^2 + (\frac{c^2}{c_{0,1}} + c + \frac{1}{4}H^2)\epsilon_1^2$.

选择虚拟控制器

$$\epsilon_2^* = -\frac{\text{sgn}(g)}{g_N}(b_1 + \bar{\alpha}_1)\epsilon_1 = -\text{sgn}(g)\alpha_1\epsilon_1$$

其中, $\bar{\alpha}_1 = 4\|P\|^2 + c_{0,2} + 1$ 和 α_1 是已知的正常数, $b_1 > 0$ 是待定的设计参数.

定义 $z_1 = \epsilon_1 - \epsilon_1^*$, $\epsilon_1^* = 0$, 以及 $z_2 = \epsilon_2 - \epsilon_2^*$. 将上面的不等式和 ϵ_2^* 代入式 (9), 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{c_{0,1}}{4L}\|\zeta\|^2 - \left(\frac{L}{2} - c_0\right)(\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) - \frac{l_1}{2L^3}\lambda_1^2 + \\ & \frac{1}{L}(c_{0,3} + 2)\|\omega\|^2 + \sum_{i=2}^n \epsilon_i^2 + \frac{1}{2l_1}\epsilon_2^2 - \frac{\dot{L}}{L}z_1^2 - \\ & (b_1L - c_1)z_1^2 + gLz_1z_2 \end{aligned}$$

其中, $c_1 = c + \frac{c^2}{c_{0,1}} + \frac{1}{4}H^2$ 是未知常数.

步骤 2. 令 $V_2 = \gamma_1 V_1 + \frac{1}{2}z_2^2$ 是本步的候选 Lyapunov 函数, 其中 $\gamma_1 > 0$ 是待定的常数. 则有

$$\dot{V}_2 = \gamma_1 \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & L\epsilon_3 - \frac{2\dot{L}}{L}z_2 + \frac{\dot{L}}{L}d_{2,1}^z z_1 + \sum_{i=1}^2 d_{2,i}^z Lz_i + \\ & \sum_{i=1}^2 d_2^{\epsilon_i} L\epsilon_i + \sum_{i=1}^2 d_2^{\eta_i} L\eta_i + d_2^{\phi_1} \phi_1 \end{aligned}$$

上式中, $d_{2,1}^z = \text{sgn}(g)\alpha_1$, $d_2^z = -(\frac{l_2}{g} + g\alpha_1^2)$, $d_2^z = |g|\alpha_1$, $d_2^{\epsilon_1} = d_2^{\eta_1} = \frac{l_2}{g}$, $d_2^{\epsilon_2} = d_2^{\eta_2} = d_2^{\phi_1} = \text{sgn}(g)\alpha_1$ 都是常数, 其中的未知项都有已知上界. 为了统一, 设上述表达式的上界分别为 $\bar{d}_{2,1}^z$, \bar{d}_2^z , $\bar{d}_2^{\epsilon_i}$, $\bar{d}_2^{\eta_i}$, $i = 1, 2$, $\bar{d}_2^{\phi_1}$.

利用完全配方法得 $gLz_1z_2 \leq Lz_1^2 + \frac{1}{4}\max\{1, g_M^2\}Lz_2^2$, $\frac{\dot{L}}{L}d_{2,1}^z z_1z_2 \leq \frac{\dot{L}}{4L}(\bar{d}_{2,1}^z)^2 z_1^2 + \frac{\dot{L}}{L}z_2^2$, $d_2^z Lz_1z_2 \leq \gamma_1 Lz_1^2 + \frac{1}{4\gamma_1}(\bar{d}_2^z)^2 Lz_2^2$, $\sum_{i=1}^2 (d_2^{\epsilon_i} \epsilon_i + d_2^{\eta_i} \eta_i) Lz_2 \leq \frac{\gamma_1 L}{4}(\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) + \frac{1}{\gamma_1} \sum_{i=1}^2 ((\bar{d}_2^{\epsilon_i})^2 + (\bar{d}_2^{\eta_i})^2) Lz_2^2$, $d_2^{\phi_1} \phi_1 z_2 \leq \frac{\gamma_1 c_{0,1}}{8L}\|\zeta\|^2 + \gamma_1 z_1^2 + \frac{\gamma_1}{L}\|\omega\|^2 + (\frac{2c^2}{\gamma_1 c_{0,1}} + \frac{c^2 + H^2}{4\gamma_1})(\bar{d}_2^{\phi_1})^2 z_2^2$.

选择虚拟控制器

$$\epsilon_3^* = -\alpha_2 z_2$$

其中, $\bar{\alpha}_2$ 是已知的正常数, $\alpha_2 = b_2 + \bar{\alpha}_2$, $b_2 > 0$ 是待定的设计参数.

定义 $z_3 = \epsilon_3 - \epsilon_3^*$. 将上述不等式和 ϵ_3^* 代入式 (10), 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{\gamma_1 c_{0,1}}{8L}\|\zeta\|^2 - \gamma_1 \left(\frac{L}{4} - c_0\right)(\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) - \frac{\gamma_1 l_1}{2L^3}\lambda_1^2 - \\ & \frac{\dot{L}}{L} \left(\left(\gamma_1 - \frac{1}{4}(\bar{d}_{2,1}^z)^2\right) z_1^2 + z_2^2 \right) + \frac{\gamma_1}{L}(c_{0,3} + 3)\|\omega\|^2 - \gamma_1 \times \\ & ((b_1 - 2)L - \bar{c}_1 - 1)z_1^2 - (b_2L - c_2)z_2^2 + \gamma_1 \sum_{i=3}^n \epsilon_i^2 + Lz_2z_3 \end{aligned}$$

其中, \bar{c}_1 和 c_2 是依赖于 c 和 H 的未知常数.

迭代步. 设在第 $k-1$ 步, $k = 3, \dots, n$, 存在一个光滑的正定、径向无界函数 $V_{k-1}(\zeta, \epsilon, \eta, \lambda_1, z_1, \dots, z_{k-1})$, 满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k-1} \leq & \prod_{i=1}^{k-2} \gamma_i \left(-\frac{c_{0,1}}{2^k L}\|\zeta\|^2 - \left(\frac{L}{2^{k-1}} - c_0\right)(\|\epsilon\|^2 + \|\eta\|^2) - \right. \\ & \left. \frac{l_1}{2L^3}\lambda_1^2 + \sum_{i=k}^n \epsilon_i^2 + \frac{1}{L}(c_{0,3} + k)\|\omega\|^2 \right) - \frac{\dot{L}}{L}z_{k-1}^2 - \\ & \frac{\dot{L}}{L} \sum_{i=1}^{k-2} \left(\prod_{j=i}^{k-2} \gamma_j - \frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^{k-1} \prod_{p=j}^{k-2} \gamma_p (\bar{d}_{j,1}^z)^2 \right) z_i^2 - \prod_{i=1}^{k-2} \gamma_i \times \\ & ((b_1 - k + 1)L - \bar{c}_1 - k + 2)z_1^2 - \sum_{i=2}^{k-2} \prod_{j=i}^{k-2k-1} \gamma_j ((b_i - k + i)L - \\ & \bar{c}_i)z_i^2 - (b_{k-1}L - c_{k-1})z_{k-1}^2 + Lz_{k-1}z_k \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $z_1 = \epsilon_1$, $z_i = \epsilon_i - \epsilon_i^*$, $i = 2, \dots, k$. 当 $i > j$ 时, 规定 $\prod_{p=i}^j \gamma_p = 1$. 虚拟控制器 ϵ_i^* 满足

$$\begin{cases} \epsilon_1^* = 0 \\ \epsilon_2^* = -\text{sgn}(g)\alpha_1 z_1 \\ \epsilon_i^* = -\alpha_{i-1} z_{i-1}, \quad i = 3, \dots, k \end{cases}$$

下面将推导得出上述结论在第 k 步也成立. 为此, 选择 $V_k = \gamma_{k-1} V_{k-1} + \frac{1}{2}z_k^2$ 作为第 k 步的候选 Lyapunov 函数, 其

中 $\gamma_{k-1} > 0$ 是待定的设计参数. 为了方便, 令 $\varepsilon_{n+1} = \frac{u}{L^{n+1}}$. 则有

$$\dot{V}_k = \gamma_{k-1} \dot{V}_{k-1} + z_k \dot{z}_k \quad (12)$$

其中, $z_k = \varepsilon_k + \alpha_{k-1} z_{k-1}$, 经过计算可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_k = & L\varepsilon_{k+1} - \frac{k\dot{L}}{L}z_k + \frac{\dot{L}}{L} \sum_{i=1}^{k-1} d_{k,1}^{z_i} z_i + \sum_{i=1}^k d_k^{z_i} Lz_i + \\ & \sum_{i=1}^2 (d_k^{\varepsilon_i} \varepsilon_i + d_k^{\eta_i} \eta_i) L + d_k^{\phi_1} \phi_1 \end{aligned}$$

类似地, 定义上式中各表达式的上界分别为 $\bar{d}_{k,1}^{z_i}$, $i = 1, \dots, k-1$, $\bar{d}_k^{z_i}$, $i = 1, \dots, k$, $\bar{d}_k^{\varepsilon_i}$, $\bar{d}_k^{\eta_i}$, $i = 1, 2$, $\bar{d}_k^{\phi_1}$.

同样, 先处理式 (11) 中如下几项: $\gamma_{k-1} L z_{k-1} z_k \leq \gamma_{k-1} L z_{k-1}^2 + \frac{1}{4} \max\{1, g_M^2\} \gamma_{k-1} L z_k^2$, $\frac{\dot{L}}{L} \sum_{i=1}^{k-1} d_{k,1}^{z_i} z_i z_k \leq \frac{\dot{L}}{4L} \sum_{i=1}^{k-1} (\bar{d}_{k,1}^{z_i})^2 z_i^2 + \frac{(k-1)\dot{L}}{L} z_k^2$, $\sum_{i=1}^{k-1} d_k^{z_i} L z_i z_k \leq \sum_{i=1}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-1} \gamma_j L z_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\bar{d}_{k,1}^{z_i})^2}{4 \prod_{j=i}^{k-1} \gamma_j} L z_k^2$, $\sum_{i=1}^2 (d_k^{\varepsilon_i} \varepsilon_i + d_k^{\eta_i} \eta_i) L z_k \leq \frac{\prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i L}{2k} (\|\varepsilon\|^2 + \|\eta\|^2) + \sum_{i=1}^2 \frac{2^{k-2}}{\prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i} ((\bar{d}_k^{\varepsilon_i})^2 + (\bar{d}_k^{\eta_i})^2) L z_k^2$, $d_k^{\phi_1} \phi_1 z_k \leq \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i \left(\frac{c_{0,1}}{2^{k+1} L} \|\zeta\|^2 + z_1^2 + \frac{1}{L} \|\omega\|^2 \right) + \frac{2^{k+1} c^2 + c_{0,1}(c^2 + H^2)}{4c_{0,1} \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i} (\bar{d}_k^{\phi_1})^2 z_k^2$.

选择虚拟控制器

$$\varepsilon_{k+1}^* = -\alpha_k z_k$$

其中, $\bar{\alpha}_k$ 是正常数, $\alpha_k = b_k + \bar{\alpha}_k$, $b_k > 0$ 是待定的设计参数.

定义 $z_k = \varepsilon_k - \varepsilon_k^*$, 将上面的不等式以及 ε_{k+1}^* 代入式 (12), 计算可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i \left(-\frac{c_{0,1}}{2^{k+1} L} \|\zeta\|^2 - \left(\frac{L}{2k} - c_0 \right) (\|\varepsilon\|^2 + \|\eta\|^2) - \right. \\ & \left. \frac{l_1}{2L^3} \lambda_1^2 + \frac{1}{L} (c_{0,3} + k + 1) \|\omega\|^2 + \sum_{i=k+1}^n \varepsilon_i^2 \right) - \\ & \frac{\dot{L}}{L} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \gamma_j - \frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^k \prod_{p=j}^{k-1} \gamma_p (\bar{d}_{j,1}^{z_i})^2 \right) z_i^2 - \frac{\dot{L}}{L} z_k^2 - \\ & \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_i ((b_1 - k)L - \bar{c}_1 - k + 1) z_1^2 - \sum_{i=2}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-1} \gamma_j ((b_i - \\ & k + i - 1)L - \bar{c}_i) z_i^2 - (b_k L - c_k) z_k^2 + L z_k z_{k+1} \quad (13) \end{aligned}$$

其中, \bar{c}_{k-1} 和 c_k 是依赖于 c 和 H 的未知常数.

最后, 根据迭代过程选择如下实际控制器:

$$u = -L^{n+1} \alpha_n z_n \quad (14)$$

因为 $\sum_{i=n+1}^n \varepsilon_i^2 = 0$, $z_{n+1} = 0$, $L \geq 1$, 令 $k = n$, 则由式 (13) 易得 \dot{V}_n 的表达式, 其中, $V_n = \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i \left(\frac{L_0}{L} + \varepsilon^T P \varepsilon + 2\eta^T P \eta + \frac{1}{2L^3} \lambda_1^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \prod_{j=i}^{n-1} \gamma_j z_i^2$ 是正定、径向无界的函数.

2.3 主要结果

为实现本文的控制目标, 首先选择设计参数 b_i , $i = 1, \dots, n$ 和 γ_i , $i = 1, \dots, n-1$ 满足

$$\begin{cases} b_i - n + i - 1 > 0, i = 1, \dots, n-1, b_n > 0 \\ \prod_{j=i}^{n-1} \gamma_j - \frac{1}{4} \sum_{j=i+1}^n \prod_{p=j}^{n-1} \gamma_p (\bar{d}_{j,1}^{z_i})^2 > 0, \\ i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (15)$$

下面的引理给出了满足式 (15) 的设计参数的选择.

引理 1. 总是存在设计参数 $b_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ 和 $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, n-1$, 使式 (15) 成立.

证明. 只要给出满足式 (15) 的设计参数的一种选择就足够了, 可以先选 b_i , 然后选 γ_i .

1) 设计参数 b_i 的选择

显然, 可选择 $b_i > n - i + 1$, $i = 1, \dots, n-1$, $b_n > 0$.

2) 设计参数 γ_i 的选择

根据式 (15), 其第二行的不等式等价于

$$\begin{aligned} \gamma_{n-1} \left(\gamma_{n-2} \left(\dots \left(\gamma_{i+1} \left(\gamma_i - \frac{1}{4} (\bar{d}_{i+1,1}^{z_i})^2 \right) - \frac{1}{4} (\bar{d}_{i+2,1}^{z_i})^2 \right) \dots \right) - \right. \\ \left. \frac{1}{4} (\bar{d}_{n-1,1}^{z_i})^2 \right) - \frac{1}{4} (\bar{d}_{n,1}^{z_i})^2 > 0 \end{aligned}$$

由此, 可以选择

$$\begin{aligned} \gamma_i &> \frac{(\bar{d}_{i+1,1}^{z_i})^2}{4}, i = 1, \dots, n-1 \\ \gamma_j &> \frac{(\bar{d}_{j+1,1}^{z_i})^2}{4(\gamma_{j-1}(\dots(\gamma_i - \frac{1}{4}(\bar{d}_{i+1,1}^{z_i})^2)\dots) - \frac{1}{4}(\bar{d}_{j,1}^{z_i})^2)}, \\ & j = i+1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

上面设计参数的选择可以保证式 (15) 成立. \square

注 2. 在控制器的设计过程中, 引入设计参数 γ_i , $i = 1, \dots, n-1$, 用于应对 K-滤波器动态增益在控制器迭代设计过程中产生的项, 例如 $\frac{\dot{L}}{L} z_1$. 要保证闭环系统稳定, 需要保证所设计的 Lyapunov 函数的导数 \dot{V}_n 是负定的. 首先要选择恰当的设计参数. 由引理 1 及其证明过程可见, 设计参数的引入增加了控制设计的自由度.

在初始条件的开邻域内, 闭环系统方程的右边关于 $(\zeta, \varepsilon, \eta, \lambda_1, z, \omega, L)$ 是局部 Lipschitz 的, 因此闭环系统在小区间 $[0, t_f)$ 上有惟一解 (见文献 [15] 第 18 页的定理 3.1). 令 $[t_0, T_f)$ 是惟一解存在的最大区间, 其中 $0 < T_f \leq +\infty$ (见文献 [15] 第 17 页的定理 2.1), 后面将证明 $T_f = +\infty$.

下面的引理在随后给出的定理 1 的证明中起着十分重要的作用, 其证明思路与文献 [14] 中引理 2 的证明类似, 具体证明过程就不再给出.

引理 2. 如果 $L(t)$ 在 $[t_0, T_f)$ 上是有界的, 则闭环系统的其他状态在 $[t_0, T_f)$ 上是平方可积且有界的.

本文的主要结果在下面的定理中给出.

定理 1. 考虑满足假设 1) ~ 4) 的系统 (1). 若选择常向量 l 使矩阵 A 是 Hurwitz 的, 并选择设计参数 b_i , $i = 1, \dots, n$ 和 γ_j , $j = 1, \dots, n-1$ 满足式 (15), 则当扰动 $\omega(t) \in L_2[t_0, +\infty)$ 时, 基于动态高增益 K-滤波器 (3) 和 (4)

的输出反馈控制器 (14) 能够实现系统的 \mathcal{L}_2 -增益意义下的全局扰动抑制. 特别地, 当扰动 $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0}$ 时, 该控制器能够保证原系统的状态渐近稳定.

证明. 先用反证法证明 L 在 $[t_0, T_f]$ 是有界的. 假设 L 在 $[t_0, T_f]$ 是无界的, 即 $\lim_{t \rightarrow T_f} L(t) = +\infty$. 由式 (4) 知 $L(\cdot)$ 是单调非减的函数且 $L \geq 1$, 则必然存在某个时刻 $0 < t_1 < T_f$, 使得对于 $\forall t \in [t_1, T_f]$,

$$L(t_1) \geq \max \left\{ 2^{n+1} c_0, \frac{\bar{c}_1 + n - 1}{b_1^* - 1}, \frac{\bar{c}_i}{b_i^* - 1}, \frac{c_n}{b_n^* - 1} \right\}, \quad i = 2, \dots, n - 1$$

其中, 取 $b_1^* = b_1 - n > 1$, $b_i^* = b_i - n + i - 1 > 1$, $i = 2, \dots, n - 1$, $b_n^* = b_n > 1$.

由上式以及 \dot{V}_n 和式 (15), 则对于 $\forall t \in [t_1, T_f]$,

$$\begin{aligned} \dot{V}_n(\boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\epsilon}(t), \boldsymbol{\eta}(t), \lambda_1(t), \mathbf{z}(t)) \leq & -\frac{L(t)}{2^{n+1}} \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i (\|\boldsymbol{\epsilon}(t)\|^2 + \|\boldsymbol{\eta}(t)\|^2) - \frac{l_1}{2L^3(t)} \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i \lambda_1^2(t) + \\ & \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i (c_{0,3} + n + 1) \|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2 - \sum_{i=1}^n \prod_{j=i}^{n-1} \gamma_j L(t) z_i^2(t) \quad (16) \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{T_f} \left(z_1^2(t) + \frac{l_1}{2L^4(t)} \lambda_1^2(t) \right) dt \leq & \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i} V_n(\boldsymbol{\zeta}(t_1), \boldsymbol{\epsilon}(t_1), \boldsymbol{\eta}(t_1), \lambda_1(t_1), \mathbf{z}(t_1)) + \\ & (c_{0,3} + n + 1) \int_{t_1}^{T_f} \|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2 dt < +\infty \end{aligned}$$

由上式以及式 (4) 和式 (5), 易知

$$+\infty = \lim_{t \rightarrow T_f} L(t) - L(t_1) = \int_{t_1}^{T_f} \dot{L}(t) dt < +\infty$$

与假设矛盾, 从而可知 $L(t)$ 在 $[t_0, T_f]$ 上是有界的. 由引理 2 可知闭环系统的其他状态在 $[t_0, T_f]$ 上是有界的且平方可积.

根据 $L(t)$ 在 $[t_0, T_f]$ 上的有界性, 可知 $\dot{V}_n \leq \beta_0 V_n + \bar{\beta}_0 \|\boldsymbol{\omega}\|^2$, 其中 $\beta_0 > 0$, $\bar{\beta}_0 > 0$ 是恰当的常数. 由此, 对任意的 $t \in [t_0, T_f]$, 有

$$\begin{aligned} V_n(\boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\epsilon}(t), \boldsymbol{\eta}(t), \lambda_1(t), \mathbf{z}(t)) \leq & \exp(-\beta_0(t - t_0)) V_n(\boldsymbol{\zeta}_0, \boldsymbol{\epsilon}_0, \boldsymbol{\eta}_0, \lambda_{10}, \mathbf{z}(t_0)) + \\ & \bar{\beta}_0 \int_{t_0}^t \exp(-\beta_0(\tau - t_0)) \|\boldsymbol{\omega}(\tau)\|^2 d\tau \end{aligned}$$

假定 T_f 是有限的, 则有

$$\begin{aligned} +\infty = \lim_{t \rightarrow T_f} V_n(\boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\epsilon}(t), \boldsymbol{\eta}(t), \lambda_1(t), \mathbf{z}(t)) \leq & V_n(\boldsymbol{\zeta}_0, \boldsymbol{\epsilon}_0, \boldsymbol{\eta}_0, \lambda_{10}, \mathbf{z}(t_0)) + \bar{\beta}_0 \int_{t_0}^{T_f} \|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2 dt < +\infty \end{aligned}$$

矛盾. 因此, $T_f = +\infty$.

按照式 (15) 选择设计参数, 可得

$$\dot{V}_n + \frac{\hat{c}_0}{\delta^2} y^2 \leq \hat{c}_0 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \hat{c} (\|\boldsymbol{\epsilon}\|^2 + \|\boldsymbol{\eta}\|^2) + \frac{\hat{c}_0}{\delta^2} y^2 + \sum_{i=1}^n \hat{c}_i z_i^2$$

其中, $\hat{c} = -\prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i (\frac{L}{2^n} - c_0)$, $\hat{c}_0 = \prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i (c_{0,3} + n + 1)$, $\hat{c}_1 = -\prod_{i=1}^{n-1} \gamma_i ((b_1 - n)L - \bar{c}_1 - n + 1)$, $\hat{c}_i = -\prod_{j=i}^{n-1} \gamma_j ((b_i - n + i - 1)L - \bar{c}_i)$, $i = 2, \dots, n - 1$, $\hat{c}_n = -(b_n L - c_n)$. 因为 L 是有界的, 所以上面这些都是有限的数.

因为 $V_n \geq 0$, 则由引理 2 可得

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t |y(\tau)|^2 d\tau \leq \int_{t_0}^t \delta^2 \|\boldsymbol{\omega}(\tau)\|^2 d\tau + & \frac{\delta^2}{\hat{c}_0} V_n(\boldsymbol{\zeta}_0, \boldsymbol{\epsilon}_0, \boldsymbol{\eta}_0, \lambda_{10}, \mathbf{z}(t_0)) + \frac{\delta^2}{\hat{c}_0} \int_{t_0}^t (\hat{c} (\|\boldsymbol{\epsilon}(\tau)\|^2 + \|\boldsymbol{\eta}(\tau)\|^2) + \\ & \frac{\delta^2}{\hat{c}_0} y^2(\tau) + \sum_{i=1}^n \hat{c}_i z_i^2(\tau)) d\tau \leq \int_{t_0}^t \delta^2 \|\boldsymbol{\omega}(\tau)\|^2 d\tau + \\ & \delta_0(\boldsymbol{\zeta}_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\lambda}_0), \quad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

其中, $\delta_0 < +\infty$ 且 $\delta_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$. 因此, 实现了闭环系统 \mathcal{L}_2 -增益意义下的全局扰动抑制.

特别地, 考虑扰动 $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0}$ 的情况. 因为 $L, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\epsilon}$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上是有界的, 可知 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上也是有界的. 则由引理 2, Barbalat 引理^[16-17] 和式 (5), 可得系统 (1) 的状态是渐近稳定的. \square

3 仿真算例

考虑如下单输入单输出非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = -3\zeta + y + \omega \\ \dot{x}_1 = x_2 + \frac{1}{4}\zeta + \theta_1 x_1 \sin \zeta + \frac{1}{4}\theta_3 (1 + \cos(x_2 \zeta)) \omega \\ \dot{x}_2 = gu + \theta_2 \ln(1 + x_2^2) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (17)$$

其中, θ_1, θ_2 和 θ_3 是未知常数. 假设此系统满足假设条件 1) ~ 4), 其中 $U_0 = \frac{1}{2}\zeta^2$, $c_{0,1} = 1$, $c_{0,2} = \frac{1}{4}$, $c_{0,3} = \frac{1}{4}$, $c = \max\{|\theta_1|, |\theta_2|\}$ 未知, $H = \frac{1}{2}|\theta_3|$ 未知, g 的符号为正且 $g_N = 1$, $g_M = \frac{3}{2}$.

注 3. 值得指出的是, 文献 [12] 中要求仿真系统的非线性关于不可测状态的增长率是已知的正常数, 并且扰动项系数向量的范数的上界 H 也是已知的. 与之相比, 本算例系统中上述这些量是未知的, 所以系统本身更具一般性. 此外, 针对系统 (17), 文献 [12] 中基于静态高增益 K-滤波器的输出反馈控制器很难对付上述不确定性, 所以这里构造了基于动态高增益的 K-滤波器, 并在控制器的设计过程中引入了多个适当的设计参数, 在实现控制目的的同时还增加了设计的自由度.

可设计形如式 (3)、式 (4) 和式 (14) 的自适应输出反馈控制器, 其中 $n = 2$. 选择设计参数 $\mathbf{l} = [2, 1]^T$, $h = 0.2$, $b_1 = 2.1$, $b_2 = 0.1$, $\gamma_1 = 7.5$. 设 $\omega = \exp(-t)$, $\theta_1 = -\frac{1}{4}$, $\theta_2 = \frac{1}{2}$, $\theta_3 = 1$, $g = 1$. 令 $t_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$, $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\lambda}_0 = [0, 0]^T$. Matlab 仿真可得图 1~5, 展示了闭环系统状态的动态轨迹, 从中可见闭环系统的良好稳态特性.

4 结论

针对一类依赖于不可测状态增长非线性系统, 解决了其 \mathcal{L}_2 -增益意义下的输出反馈扰动抑制问题. 由于系统具有不确定

定控制系数, 并且系统非线性增长率未知, 引入了动态高增益 K-滤波器, 并基于此构造了状态观测器. 在输出反馈控制器的设计过程中引入了多个设计参数, 增加了选择的自由度. 通过选择恰当的设计参数, 实现了系统的 \mathcal{L}_2 -增益扰动抑制的目标.

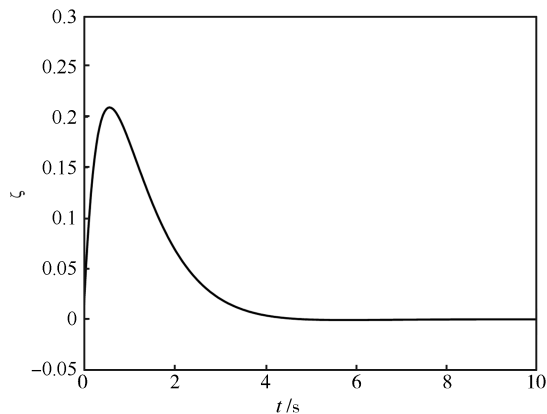


图 1 系统状态 ζ
Fig. 1 System state ζ

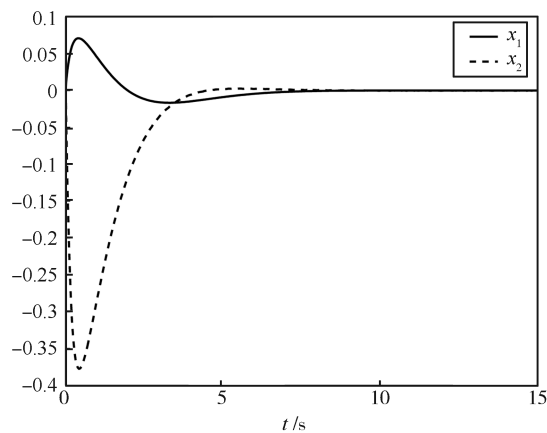


图 2 系统状态 x
Fig. 2 System state x

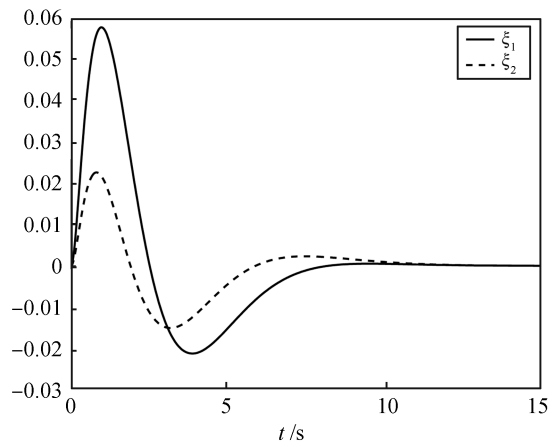


图 3 K-滤波器状态 ξ
Fig. 3 State ξ of K-filters

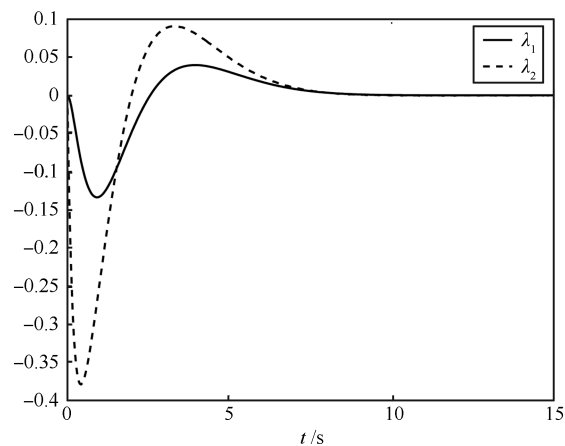


图 4 K-滤波器状态 λ
Fig. 4 State λ of K-filters

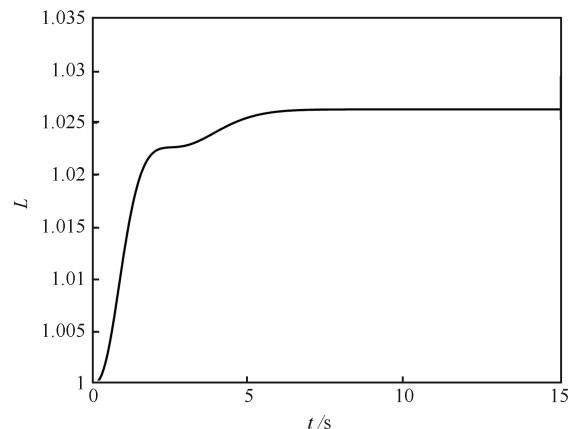


图 5 K-滤波器增益 L
Fig. 5 Dynamic gain L of K-filters

References

- 1 Qian C J, Lin W. Output feedback control of a class of nonlinear systems: a nonseparation principle paradigm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(10): 1710–1715
- 2 Praly L, Jiang Z P. Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 2004, **53**(2): 107–116
- 3 Liu Y G. Global stabilization by output feedback for a class of nonlinear systems with uncertain control coefficients and unmeasured states dependent growth. *Sciences in China, Series F*, 2008, **51**(10): 1508–1520
- 4 Shang Fang, Liu Yun-Gang. Output-feedback control for a class of uncertain nonlinear systems with linearly unmeasured states dependent growth. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(3): 272–280
- 5 Shang F, Liu Y G, Zhang C H. Adaptive output feedback control for a class of planar nonlinear systems. *Asian Journal of Control*, 2009, **11**(5): 578–586
- 6 Krstić M, Kanellakopoulos I, Kokotović P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: John Wiley and Sons, 1995
- 7 Gong Q, Qian C J. Global practical tracking of a class of nonlinear systems by output feedback. *Automatica*, 2007, **43**(1): 184–189

- 8 Shang Fang, Liu Yun-Gang, Zhang Cheng-Hui. New results on adaptive tracking by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems. *Control Theory and Applications*, 2010, **27**(6): 721–730
(尚芳, 刘允刚, 张承慧. 一类不确定非线性系统自适应输出反馈跟踪控制的新结果. *控制理论与应用*, 2010, **27**(6): 721–730)
- 9 Jiang Z P. Global output feedback control with disturbance attenuation for minimum-phase nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 2000, **39**(3): 155–164
- 10 Lin W, Qian C J, Huang X Q. Disturbance attenuation of a class of non-linear systems via output feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, **13**(15): 1359–1369
- 11 Ito H, Jiang Z P. Robust disturbance attenuation of nonlinear systems using output feedback and state-dependent scaling. *Automatica*, 2004, **40**(9): 1621–1628
- 12 Shang Fang, Liu Yun-Gang, Zhang Cheng-Hui. Disturbance attenuation by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems. *Journal of Shandong University (Engineering Science)*, 2010, **40**(1): 19–27
(尚芳, 刘允刚, 张承慧. 一类不确定非线性系统输出反馈扰动抑制. *山东大学学报(工学版)*, 2010, **40**(1): 19–27)
- 13 Marino R, Tomei P. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*. Hertfordshire: Prentice Hall, 1995
- 14 Shang Fang, Liu Yun-Gang. Adaptive output-feedback stabilization for a class of uncertain nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(1): 92–100
- 15 Hale J K. *Ordinary Differential Equations (Second Edition)*. Huntington: Krieger, 1980
- 16 Khalil H K. *Nonlinear Systems (Third Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 2002
- 17 Min Ying-Ying, Liu Yun-Gang. Babalat lemma and its application in analysis of system stability. *Journal of Shandong University (Engineering Science)*, 2007, **37**(1): 51–56
(闵颖颖, 刘允刚. Babalat 引理及其在系统稳定性分析中的应用. *山东大学学报(工学版)*, 2007, **37**(1): 51–56)

尚 芳 山东建筑大学信息与电气工程学院讲师. 主要研究方向为非线性系统控制设计和自适应控制理论. 本文通信作者.

E-mail: shangfang929@163.com

(**SHANG Fang** Lecturer at the School of Information and Electrical Engineering, Shandong Jianzhu University. Her research interest covers nonlinear system control design and adaptive control theory. Corresponding author of the paper.)

刘允刚 山东大学控制科学与工程学院教授. 主要研究方向为非线性系统分析和自适应控制. E-mail: lygfr@sdu.edu.cn

(**LIU Yun-Gang** Professor at the School of Control Science and Engineering, Shandong University. His research interest covers nonlinear system analysis and adaptive control.)

张桂青 山东建筑大学信息与电气工程学院教授. 主要研究方向为建筑设备智能化和电气自动化控制. E-mail: qqzhang@sdjzu.edu.cn

(**ZHANG Gui-Qing** Professor at the School of Information and Electrical Engineering, Shandong Jianzhu University. His research interest covers construction equipment intelligence and electric automation control.)

张承慧 山东大学控制与科学工程学院教授. 主要研究方向为工程优化控制和自适应控制. E-mail: zchui@sdu.edu.cn

(**ZHANG Cheng-Hui** Professor at the School of Control Science and Engineering, Shandong University. His research interest covers engineering optimization control and adaptive control.)
