

贪婪算法与压缩感知理论

方红¹ 杨海蓉²

摘要 贪婪算法以其重建速度快、重建方法实现简便的特点在压缩感知 (Compressed sensing, CS) 理论中获得了广泛的应用. 本文首先介绍压缩感知的基本理论; 然后, 着重介绍现有几种重要的贪婪重建算法, 包括 MP, OMP, IBOOMP, StOMP, SP, ROMP 和 CoSaMP 等, 详细给出每种算法的数学框架和本质思想, 着重从最优匹配原子的选择策略和残差信号的更新方式这两个方面对各种算法进行对比分析, 以限制等容常数为条件讨论各种算法在实现重建时的性能, 包括重建时间、重建的稳定性等; 最后, 通过模拟实验进一步验证了各种算法的重建效果, 同时模拟实验结果还进一步得出各种算法的重建效果与待重建信号本身的稀疏度及测量次数这三者之间的关系, 这也为新的更优算法的提出打下理论基础.

关键词 贪婪算法, 压缩感知, 限制等容常数, 残差, 稀疏度

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01413

Greedy Algorithms and Compressed Sensing

FANG Hong¹ YANG Hai-Rong²

Abstract Recently a family of iterative greedy algorithms have received extensive application in compressed sensing (CS) due to their fast reconstruction and low reconstruction complexity. In this paper, the basic theory of CS is first introduced and then we put emphasis on the main greedy algorithms for reconstruction, which include MP, OMP, IBOOMP, StOMP, SP, ROMP, CoSaMP and so on and provide their mathematical frameworks, respectively. Next, we classify all the algorithms according to the strategy of element selection and the update of the residual error. Under the condition of restricted isometry constant, further discussion on the performance of reconstruction algorithms such as running time, reconstruction stability and so on is presented. Last, the reconstruction results from simulated experiments further show the performance of all algorithms. And from those results we also acquire the relationship among the performance of the algorithms, the sparsity of signals to be reconstructed and the number of measurements, which lays a good basis for proposing new and better algorithms.

Key words Greedy algorithms, compressed sensing (CS), restricted isometry constant, residual error, sparsity

传统的 Shannon/Nyquist 采样定理指出, 带限信号的采样频率必须大于其带宽的两倍以上才能确保由采样值完全重构原始信号, 而压缩感知 (Compressive sensing, CS) 理论作为 Shannon/Nyquist 采样定理的另一种选择正在被广泛研究. CS 理论是由 Donoho^[1] 和 Candes^[2] 从信号稀疏分解和逼近理论进一步发展的一种新的信号处理理论. 该理论的提出者之一, 美国科学院院士、斯坦福大学的统计学家 Donoho 在信号处理的众多领域, 如信号稀疏分解、逼近理论、小波变换、图像压缩等都做

出了巨大贡献^[3-4]. CS 理论的本质内容是稀疏或可压缩信号 (在某个基上具有稀疏描述) 的少量随机的线性投影即包含了重构和处理的足够信息, 也就是仅仅利用信号稀疏或可压缩的先验和少量的全局线性测量可以获得精确重建. 这个研究思想挑战了 Shannon/Nyquist 采样定理的理论极限, 对整个信号处理领域产生了极其重要的影响. 目前, 在美国、英国、德国、法国、瑞士、以色列等许多国家的知名大学 (例如麻省理工学院 (Massachusetts Institute of Technology)、斯坦福大学 (Stanford University)、普林斯顿大学 (Princeton University)、莱斯大学 (Rice University)、杜克大学 (Duke University)、慕尼黑工业大学 (Technical University of Munich)、爱丁堡大学 (Edinburgh University) 等) 都成立专门课题组对 CS 进行研究; 2008 年西雅图 Intel、贝尔实验室、Google 等知名公司也开始组织研究 CS, 这使得信号处理的许多应用领域也随着 CS 理论的研究发生根本性的发展和变化^[5-7]. 在 CS 理论中, 随机编码的鲁棒性关键在于要使随机化测量具有相等的优先等级, 这种随机编码与当前的变换编码 (例如 Fourier 或 Wavelet) 中的系数不同,

收稿日期 2010-09-06 录用日期 2011-07-14
Manuscript received September 6, 2010; accepted July 14, 2011
上海市优秀青年教师科研专项基金 (EGD08006), 上海第二工业大学校级基金 (XQD208008), 安徽高校省级自然科学基金项目 (KJ2011B131) 资助
Supported by Research Fund for the Excellent Youth Scholars of Ministry of Education of Shanghai (EGD08006), Foundation of Shanghai Second Polytechnic University (XQD208008), and Anhui Provincial Natural Science Foundation Project (KJ2011B131)
1. 上海第二工业大学理学院 上海 201209 2. 合肥师范学院数学系 合肥 230601
1. School of Science, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209 2. Department of Mathematics, Hefei Normal University, Hefei 230601

它同时具有通用性、加密性、鲁棒性和可渐近性、可缩放性、计算的非对称性。同时,这种随机编码过程非常简单,仅需计算非相干投影而不做任何其他的处理。从而,可以把大部分的计算复杂性都放在解码器上。换句话说,这种随机编码采用了“少采样,后计算”的原则,把技术的负担从传感器转移到处理器上。因此,高效、快速、鲁棒的重建算法是将 CS 理论推向实用化的关键之一,也是 CS 理论研究的核心内容之一。

1 基于 CS 理论的重建算法

目前基于 CS 理论的重建算法主要分成 4 类:凸优化方法、组合算法、统计优化方法及贪婪算法。凸优化方法的本质思想是针对最小化 ℓ_1 模提出的线性规划方法,现有的凸优化方法主要包括基追踪 (Basis pursuit, BP)^[8], 梯度投影稀疏重建 (Gradient projection for sparse reconstruction, GPSR)^[9], 迭代阈值法 (Iterative thresholding, IT)^[10], 迭代硬阈值法 (Iterative hard thresholding, IHT)^[11] 以及 Bregman 迭代法 (Bregman iterative, BI)^[12-15] 等。在 4 类重建算法中凸优化方法给出了最强的稀疏恢复的保证,在测量矩阵满足一定的条件下它能精确重建所有的稀疏信号,同时需要测量的次数也较少,然而,其最大的缺点在于重建速度慢,对于大尺度的重建问题实现困难;组合算法的本质思想是针对信号进行高度的结构化采样,经由群测试来快速获得信号支撑,主要包括稀疏傅里叶描述法^[16], 链追踪 (Chaining pursuit, CP)^[17], 以及 HHSP 追踪 (Heavy hitters on steroids pursuit, HHSP)^[18-19] 等,组合算法所需要的测量次数较凸优化方法少,重建速度也较快,但是它只给出了在测量次数一定的条件下可以以高概率获得任何可压缩信号重建的保证而不是精确保证,同时组合算法没有给出确定性测量矩阵的限制条件,只是针对特定矩阵给出理论证明,这也为新的测量矩阵的提出带来困难。目前的统计优化方法主要包括两类:一类是贝叶斯统计框架下的稀疏重建算法^[20-22];另一类是基于训练集合学习的统计优化方法^[23],该方法的思想类似于主成分或者独立成分分析,利用典型信号的训练集通过学习的方法找出最优的线性投影集合。统计优化方法能在精确和非精确测量条件下给出精确重建信号的保证,它所需要的测量次数较凸优化方法多,但是重建时间较凸优化方法少,较好地平衡了重建中对测量次数和测量时间的要求。在 CS 理论中,由于图像重建过程可以看作已知信号在给定冗余字典上获得最稀疏分解的过程,而贪婪算法在信号稀疏分解任务中已经得到了成熟的应用,因此,借助于信号稀疏分解的思想,贪婪算法就很自然地应用到 CS

理论中。目前贪婪算法的种类很多,主要包括匹配追踪 (Matching pursuit, MP)^[24]、正交匹配追踪 (Orthogonal matching pursuit, OMP)^[25]、分级正交匹配追踪 (Stagewise orthogonal matching pursuit, StOMP)^[26]、正则化的正交匹配追踪 (Regularized orthogonal matching pursuit, ROMP)^[27]、压缩采样匹配追踪 (Compressive sampling matching pursuit, CoSaMP)^[28]、子空间追踪 (Subspace pursuit, SP)^[29] 及改进的后退型 OOMP (Improved backward optimized OMP, IBOOMP)^[30] 等。贪婪算法是 4 类算法中重建速度最快的算法,尽管最初提出的 OMP 算法在重建效率上并不是很理想,但是随后提出的各种改进算法无论是在重建速度还是重建精度上都得到了很大改进。

本文首先介绍压缩感知的基本理论;其次,着重介绍现有几种重要贪婪重建算法,详细给出每种算法的数学框架,并根据算法中最优匹配原子的选择机制与残差更新方式的不同进行分类解析,以限制等容常数为条件来讨论各种算法在实现重建时的性能;最后,通过模拟实验对各种算法进行性能验证。

2 CS 理论

CS 理论的本质是一种非适应性的、非线性的可压缩信号的重建方法。其主要内容是:在某组基 (称为稀疏基) $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N]$ 上具有 m -稀疏描述的 N 采样的信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$, 即

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^N \theta(n) \psi_n = \sum_{l=1}^m \theta(n_l) \psi(n_l)$$

可以通过它在另一组非相干的基 (称为测量基) $\Phi = (\phi_1^T, \phi_2^T, \dots, \phi_M^T)$ 上的 M ($m \leq M \ll N$) 个线性投影 $\mathbf{y}(i) = \langle \mathbf{x}, \phi_i^T \rangle$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ 获得精确重建。利用矩阵的形式,测量过程可以记为 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \Psi \boldsymbol{\alpha}$ 。其中, $\boldsymbol{\alpha}$ 表示 m -稀疏变换系数向量,称 M 维列向量 \mathbf{y} 为测量向量,称由测量基 Φ 构成的 $M \times N$ 维矩阵为测量矩阵。其目标是通过 M ($M \ll N$) 次测量得到的测量向量 \mathbf{y} 精确重建或者逼近信号 \mathbf{x} 。

由条件 $m \leq M \ll N$ 可以看出 CS 理论主要解决的是欠采样情况下的信号重建问题。由于 $M \ll N$, 从而使得信号 \mathbf{x} 的重建本质上成为一个病态求逆问题,但是原始信号 \mathbf{x} 自身的稀疏性是使得从少量测量恢复信号成为可能的第一个原因,而第二个原因则在于测量基与稀疏基之间的不相关性,因此,为保证重建测量矩阵必须满足一定的限制条件。Candes 等^[31] 给出如下结论:为了重建稀疏或可压缩信号,测量矩阵 Φ 要满足一定参数的限制等容条件 (Restricted isometry property, RIP)。下面我

们首先给出 RIP 的定义.

定义 1 (RIP). 对矩阵 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$, 若对所有满足 $|I| \leq m < M$ 的索引集合 $I \subset \{1, 2, \dots, N\}$ 及任意向量 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{|I|}$, 存在常数 $0 < \delta < 1$, 使得:

$$(1 - \delta)\|\mathbf{v}\|_{l_2} \leq \|\Phi_I \mathbf{v}\|_{l_2} \leq (1 + \delta)\|\mathbf{v}\|_{l_2} \quad (1)$$

成立, 则称该矩阵为满足参数 (m, δ) 的 RIP, 其中: Φ_I 表示由索引集合 $I \subset \{1, 2, \dots, N\}$ 所指的 Φ 中列向量所构成的子矩阵, 而使得式 (1) 成立的所有参数 δ 的下确界称作限制等容常数 (Restricted isometry constant, RIC), 记为 δ_m .

性质 1 (RIC 与特征值). 如果测量矩阵 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 为具有参数 (m, δ) 的 RIP, 那么对所有满足 $|I| \leq m$ 的集合 $I \subset \{1, 2, \dots, N\}$, 有:

$$1 - \delta_m \leq \lambda_{\min}(\Phi_I^T \Phi_I) \leq \lambda_{\max}(\Phi_I^T \Phi_I) \leq 1 + \delta_m \quad (2)$$

这里 λ_{\min} 和 λ_{\max} 分别表示矩阵的最小和最大特征值.

1) 分析 1: 根据式 (1) 在理想状态下, 即当 $\delta = 0$ 时, 则 $\|\mathbf{v}\|_{l_2} \leq \|\Phi_I \mathbf{v}\|_{l_2} \leq \|\mathbf{v}\|_{l_2}$ 成立, 即 $\|\Phi_I \mathbf{v}\|_{l_2} = \|\mathbf{v}\|_{l_2}$, 此时, Φ_I 类似一个完全正交系统, 保持了信号的全部能量, 从而使得信号的精确重建成为可能; 当 $0 < \delta \ll 1$ 时, 从空间几何的角度来看, 此时测量系统几乎保持了不同稀疏信号之间的 l_2 模距离, 从而保证了重建的稳定性; 为了保证稀疏信号的精确重建, 则要在尽可能少的采样条件下, 寻找具有较小的限制等容常数 δ_m 和较大参数 m 的测量矩阵.

2) 分析 2: 从式 (2) 可以看出为了计算 RIC, 需要计算 C_N^m 个子矩阵的最大最小特征值, 因此, 确定矩阵的 RIC 的计算是一个 NP 难问题. 目前关于 RIP 的研究主要针对不同算法给出可以获得精确重建的 RIC 条件, 例如文献 [32] 中证明了当测量矩阵 Φ 的 RIC 满足 $\delta_m + \delta_{2m} + \delta_{3m} < 1$ 时, 基于最小化 l_1 模的线性规划方法可以获得所有 m -稀疏信号的精确重建; 文献 [33] 中将条件修改为 $\delta_{3m} + 3\delta_{4m} < 2$; 文献 [34] 中给出 RIC 满足 $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ 的充分条件的证明; 文献 [35] 中又将条件修改为 $\delta_{2k} < 0.4531$; 文献 [36] 中进一步将条件修改为 $\delta_{2k} < 0.472$. 而最近, 文献 [37] 中又给出更理想的充分条件形式 $\delta_k < 0.307$, 并证明了这个 δ_k 上限不可再被实质性的修改.

目前满足一定 RIP 的测量矩阵有很多, 其中包括高斯随机测量矩阵、贝努里随机测量矩阵、部分傅里叶随机矩阵及文献 [38] 中提出的稀疏投影矩阵和非常稀疏投影矩阵等. 本文中, 为实现简便, 我们都采用高斯随机测量矩阵, 在下面的理论讨论中, 不失一般性, 假设信号为绝对稀疏信号.

3 贪婪算法

3.1 信号稀疏重建与信号稀疏分解

在 CS 理论中, 稀疏信号的重建即通过该信号在已知测量矩阵 Φ 上的 M 个非相干的线性投影 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$ 来获得重建. 由于待重建信号 \mathbf{x} 仅有 m 个非零元, 因此, 测量向量 \mathbf{y} 可以看作 Φ 中 m 个列向量的线性组合. 那么, 利用 \mathbf{y} 和 Φ 重建 \mathbf{x} 就等价于在测量向量集合 Φ 中准确找到参与测量的 m 个列向量 (原子). 这用稀疏分解的语言来描述即: 获得向量 \mathbf{y} 在冗余字典 $\Phi (M < N)$ 上精确的 m -稀疏描述, 而所求的 \mathbf{x} 就是该分解所获得的系数向量. 因此, CS 理论中的稀疏或可压缩信号的重建问题可以简单地看成信号稀疏分解过程, 但是两者之间也存在着一定的区别, 稀疏分解的目的是用尽可能少的原子去稀疏描述原始信号, 所求描述中原子的个数越少越好, 而稀疏重建的目的则是精确找到参与测量的原子, 重建的精度取决于原子寻找的正确度而不是原子的个数.

3.2 贪婪算法的数学框架

贪婪算法的基本思想就是通过迭代的方法依次找出待重建信号的支撑, 基于某种贪婪准则一次求出一个或多个待估信号的构成元素. 以 MP 和 OMP 为代表的贪婪算法, 其寻找 \mathbf{x} 信号支撑的思想最为简单, 即每次迭代以对应 $\Phi^T \mathbf{y}$ 中绝对值最大元的列作为支撑候选, 一次迭代确定一个入选原子, 见算法 1 和算法 2.

算法 1. MP 算法

1) 初始化冗余向量 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, 迭代计数 $t = 1$;

2) 找到索引 λ_t , 使得:

$$\lambda_t = \arg \max_{j=1,2,\dots,N} |\langle \mathbf{r}_{t-1}, \Phi_j \rangle|;$$

3) 计算新的近似 \mathbf{a}_t 和冗余 \mathbf{r}_t :

$$\mathbf{a}_t = \langle \mathbf{r}_{t-1}, \Phi_{\lambda_t} \rangle \Phi_{\lambda_t}, \quad \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_{t-1} - \mathbf{a}_t$$

4) $t = t + 1$, 如果 $t < K$, 返回第 2) 步.

MP 算法与 OMP 算法具有相同的最优原子选择策略, 每次迭代均以测量矩阵 Φ 中与当次冗余向量 \mathbf{r}_{t-1} 具有最大内积的列向量作为待估信号的支撑候选. 但是两者在残差信号的更新方式上不同, MP 算法由其最新误差 \mathbf{r}_t 与当次所选原子 Φ_{λ_t} 的正交性 ($\langle \mathbf{r}_t, \Phi_{\lambda_t} \rangle = \langle \mathbf{r}_{t-1} - \mathbf{a}_t, \Phi_{\lambda_t} \rangle = 0$) 来保证算法的收敛性, 然而这点仅保证了冗余向量 \mathbf{r}_t 与 Φ_{λ_t} 的正交性, 而不能保证 \mathbf{r}_t 与已选原子集合 $\{\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}, \dots, \Phi_{\lambda_t}\}$ 的正交性, 这使得 MP 求得的近似解在最优 K 项近似的意义下都是次最优的, 这也是 MP 算法需要较多次数的迭代才能保证收敛的原因. OMP 算法通过递归的对已选原子集合正交化 (见算法 2 中的第 4)

步) 求出正交投影 P_t , 利用 $\mathbf{r}_t = \mathbf{y} - P_t \mathbf{y}$ 的残差更新方式, 克服了 MP 算法的次最优性.

算法 2. OMP 算法

- 1) 初始化冗余向量 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, 索引集合 $\Lambda_0 = \phi$, 迭代计数 $t = 1$;
- 2) 找到索引 λ_t , 使得:

$$\lambda_t = \arg \max_{j=1,2,\dots,N} |\langle \mathbf{r}_{t-1}, \Phi_j \rangle|;$$
- 3) 令 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$;
- 4) 计算 $\{\Phi_\lambda : \lambda \in \Lambda_t\}$ 张成空间的正交投影 P_t ;
- 5) 计算新的近似 \mathbf{a} 和冗余 \mathbf{r} : $\mathbf{a}_t = P_t \mathbf{y}$, $\mathbf{r}_t = \mathbf{y} - \mathbf{a}_t$;
- 6) $t = t + 1$, 如果 $t < m$, 返回第 2) 步;
- 7) 获得的估计 $\hat{\mathbf{s}}_\lambda$ 在索引 Λ_m 位置的元非零, 且在该位置的测量向量逼近为: $\mathbf{a}_m = \sum_{\lambda \in \Lambda_m} \hat{\mathbf{s}}_\lambda \Phi_\lambda$.

OMP 与 MP 的共同缺点在于原子选择机制相对于新的冗余误差的非最优性, 也就是说待选原子一旦进入支撑候选中, 则永久添加不会再被删除, 缺少“回溯”的思想. 这里“回溯”表示在当前迭代的步骤中, 仍对上次迭代中所入选的原子进行同步检验, 如果仍然满足当次最优意义则保留, 否则剔除作为下次待选. 其意义在于它可以最大程度保证重建的全局最优性, 因为在某次迭代中达到贪婪条件的原子并不能保证在以后迭代步骤中仍能达到, 所有原子都应做到“删除”和“添加”自由, 这种思想在后续产生的多种贪婪算法中得到了广泛的应用. 针对 OMP 中原子选择机制的缺点并引入简单的“回溯”思想, 本文作者提出了 IBOOMP 算法^[30], 见算法 3.

算法 3. IBOOMP 算法

- 1) 初始化冗余 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, 记 $\gamma_j = \Phi_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, 取索引 $\lambda_1 = \arg \max_{1 \leq j \leq N} |\langle \Phi_j, \mathbf{y} \rangle|$, 索引集合 $\Lambda_1 = \{\lambda_1\}$, 正交投影函数 $\psi_1 = \Phi_{\lambda_1} = \beta_1$ 和分解系数 $c_1 = \langle \Phi_{\lambda_1}, \mathbf{y} \rangle$, 迭代计数 $t = 1$;
- 2) 对 $j = 1, 2, \dots, N$, 分别计算:

$$\gamma_j = \gamma_j - \psi_j \langle \psi_j, \Phi_t \rangle, b_j = \langle \gamma_j, \mathbf{y} \rangle,$$

$$d_j = d_j - |\langle \psi_j, \Phi_t \rangle|^2, e_j = |b_j|^2 / d_j;$$
- 3) 令 $t = t + 1$, 寻找 λ_t , 使得 $\lambda_t = \arg \max_{1 \leq j \leq N} e_j$, 记索引集合 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$. 分别记:

$$\|\mathbf{R}_t\|^2 = \|\mathbf{R}_{t-1}\|^2 - e_{\lambda_t}, \psi_t = \frac{\gamma_{\lambda_t}}{\sqrt{d_{\lambda_t}}}, \beta_t = \frac{\gamma_{\lambda_t}}{d_{\lambda_t}};$$
- 4) 对 $j = 1, 2, \dots, t-1$ 计算新的投影和分解系数:

$$\beta_{j+1} = \beta_j - \beta_t \langle \Phi_{\lambda_t}, \beta_j \rangle,$$

$$c_{j+1} = c_j - \langle \Phi_{\lambda_t}, \beta_j \rangle c_t;$$
- 5) 重复 2)~4) 直到对于给定的小的正数 δ , 满足 $\|\mathbf{R}_t\|^2 \leq \delta$ 时, 迭代停止, 并得到系数估计向量 \mathbf{c} , 且 $|\mathbf{c}| = M > m$;
- 6) 归一化 \mathbf{c} 并向后剔除多余 $M - m$ 元素.

模拟实验证明: IBOOMP 算法在相对误差一定的条件下较大程度地减少了重建对测量次数的要求, 但是它与 MP 及 OMP 具有相同的最优原子选择机制, 每次迭代只选择一个原子, 为进一步提高重建速

度及重建精度, 一次迭代选择多个原子的思想被采用到贪婪算法中. 下面首先介绍 ROMP 和 SP 算法, 分别见算法 4 和算法 5.

算法 4. ROMP 算法

- 1) 初始化残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, 指标集合 $I = \emptyset$, 迭代 $t = 1$, 重复下面步骤 m 次或者直到 $|I| \geq 2m$;
- 2) 计算 $\mathbf{u} = \langle \mathbf{r}_{t-1}, \Phi_j \rangle$;
- 3) 原子选择准则: m 个最大的非零坐标构成的集合或者它的所有非零坐标, 选其中较小的坐标设为 J ;
- 4) 正则化: 在所有具有可比较坐标的子集 $J_0 \subset J$ 中: $|u(i)| \leq 2|u(j)|$, 对所有的 $i, j \in J_0$, 选择具有最大能量 $\|\mathbf{u}|_{J_0}\|_{l_2}$ 的集合 J_0 ;
- 5) 更新: 增加 J_0 到指标集: $I \leftarrow I \cup J_0$, 更新残余:

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^I} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{z}\|_{l_2}, \mathbf{r} = \mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}$$

算法 5. SP 算法

- 1) 初始化: $\hat{T} = \{\text{相应于 } \Phi^T \mathbf{y} \text{ 的绝对值最大的 } m \text{ 个指标}\}$
 $\mathbf{y}_r = \text{resid}(\mathbf{y}, \Phi_{\hat{T}})$;
 - 2) 迭代: 如果 $\mathbf{y}_r = 0$, 迭代停止; 否则继续;
 - 3) $T' = \hat{T} \cup \{\text{相应于 } \Phi^T \mathbf{y}_r \text{ 的绝对值最大的 } m \text{ 个指标}\}$
 $\mathbf{x}'_p = \Phi_{T'}^\dagger \mathbf{y}, \tilde{T} = \{\text{相应于 } \mathbf{x}'_p \text{ 最大元的 } m \text{ 个指标}\},$
 $\tilde{\mathbf{y}}_r = \text{resid}(\mathbf{y}, \Phi_{\tilde{T}})$;
 - 4) 更新: 若 $\|\tilde{\mathbf{y}}_r\|_{l_2} > \|\mathbf{y}_r\|_{l_2}$, 迭代停止; 否则, 设 $\hat{T} = \tilde{T}$ 以及 $\mathbf{y}_r = \tilde{\mathbf{y}}_r$, 继续迭代;
- 输出: 满足 $\hat{\mathbf{x}}_{\{1,2,\dots,N\}-\hat{T}} = 0$ 和 $\mathbf{x}_{\hat{T}} = \Phi_{\hat{T}}^\dagger \mathbf{y}$ 的估计信号 $\hat{\mathbf{x}}$.

ROMP 和 SP 具有相同的原子选择机制, 每次迭代都以 $\Phi^T \mathbf{y}_r$ (\mathbf{y}_r 表示当前冗余) 中前 m 个绝对值最大的非零坐标所对应的原子作为候选; 其中, ROMP 利用正则化的方法找出候选原子集合中能量最大的原子集合 J_0 , 在所有支撑集为 J_0 的稀疏信号中利用最小二乘法找出使得 $\|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{z}\|_{l_2}$ 最小的解 \mathbf{x} 作为当前估计, 并以 $\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}$ 作为残差更新公式, 没有“回溯”的思想, 每次迭代都在一个“可靠”候选集中选择出满足正则条件的原子添加到上次迭代中, 并且这些原子一直保持到迭代停止. SP 与 ROMP 在残差更新方式上则不同, 它以相邻两次迭代冗余的差作为迭代停止条件, 每次迭代中在当次迭代支撑和前次迭代支撑集合的并集 (T') 上利用最小二乘求出当前估计 $\mathbf{x}_{\hat{T}} = \Phi_{\hat{T}}^\dagger \mathbf{y}$, 可见 SP 采用了“回溯”思想, 与 ROMP 相比更好地保证了重建的最优性.

然而, SP 算法也有其自身的缺点, 尽管在每次迭代更新都能保证新的原子的增加 (取并集), 但是在当次支撑集合上, 并没有对利用最小二乘所求出的解进行定量的评估 (即增加或删除原子对误差冗余的影响), 同时也不能给出当次迭代残差一定小于前次迭代残差的理论保证. 针对这两个缺点, 文献 [39] 中给出一种改进的 SP 算法—逐步最优的子空间追踪 (Stepwise optimal SP, SOSp). SOSp 算法

中, 通过交替使用 Greedy Add 和 Greedy Remove 这两个步骤, 以严格保证冗余误差递减的原则, 在当前支撑候选中删除或者添加原子. 本质上说, SOSP 区别 SP 主要在于对候选支撑 \tilde{T} 的进一步优化.

最后我们介绍 StOMP 和 CoSaMP 算法, 见算法 6 和算法 7.

算法 6. StOMP 算法

- 1) 初始解 $\mathbf{x} = 0$, 初始残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, 计数器 $s = 1$;
- 2) 第 s 阶段, 计算 $C_s = \Phi^T \mathbf{r}_{s-1} = \langle \Phi, \mathbf{r}_{s-1} \rangle$;
- 3) 设立软阈值 $h = t_s \sigma_s$, 获得该阈值下的原子集合 $J_s = \{j : |C_s(j)| > t_s \sigma_s\}$, 其中, 规范噪音水平为 $\sigma_s = \|\mathbf{r}_s\|_{l_2} / \sqrt{M}$, 阈值参数 $2 \leq t_s \leq 3$;
- 4) $I_s = I_{s-1} \cup J_s$, 计算支撑 I_s 上的逼近系数向量:

$$(\mathbf{x}_s)_{I_s} = (\Phi_{I_s}^T \Phi_{I_s})^{-1} \Phi_{I_s}^T \mathbf{y};$$
- 5) 更新残差为: $\mathbf{r}_s = \mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}_s$;
- 6) 检查终止条件 (例如 $s = 10$), 若未到停止时间, 则假设 $s = s + 1$, 转到第 2) 步, 若到达停止时间, 设 $\hat{\mathbf{x}}_s = \mathbf{x}_s$, 为算法的最终输出.

算法 7. CoSaMP 算法

输入: 采样矩阵算子 Φ , 噪音测量向量 \mathbf{y} , 稀疏度 m
 输出: 待估信号 \mathbf{x} 一个 m -稀疏逼近 \mathbf{a}

- 1) 初始解 $\mathbf{a}^0 = 0$, 初始残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, 计数器 $s = 1$;
- 2) 计算信号代理: $\mathbf{c} = \Phi^T \mathbf{r}_{s-1}$;
- 3) 鉴定大的成分, 合并支撑集: $\Omega = \text{supp}(\mathbf{c}_{2m})$,

$$T = \Omega \cup \text{supp}(\mathbf{a}^{s-1});$$
- 4) 通过最小二乘法的信号估计: $\mathbf{b}|_T = \Phi_T^\dagger \mathbf{y}$,

$$\mathbf{b}|_{T^c} = 0 \text{ 从而获得新的逼近 } \mathbf{a}^s = \mathbf{b}_m;$$
- 5) 更新残差: $\mathbf{r}_s = \mathbf{y} - \Phi \mathbf{a}^s$;
- 6) 若满足停止标准, 则输出 $\mathbf{a} = \mathbf{a}^s$, 若不满足, 则可以令 $s = s + 1$, 回到第 2) 步.

StOMP 与 CoSaMP 在本质上都采用了“代理”的思想, 即如果测量矩阵满足限制等容常数 $\delta_m \ll 1$, 则向量 $\mathbf{v} = \Phi^T \Phi \mathbf{x} = \Phi^T \mathbf{y}$ 可以看做待估信号 \mathbf{x} 的一个“代理”, 其合理性在于: 根据 RIC 的定义, 当 $\delta_m \ll 1$ 时, \mathbf{v} 中每 m 个元素构成的集合所包含的信息近似于 \mathbf{x} 中 m 个元素所构成的集合, 那么从 \mathbf{v} 中前 m 个最大元所对应的支撑也应该对应于这些元素在 \mathbf{x} 中的支撑. StOMP 与 CoSaMP 的区别在于最优匹配原子的选择机制不同, StOMP 通过设立软阈值 $h = t_s \sigma_s$ 直接判断入选的原子集

合, 利用最小二乘求出待估信号在所得支撑上的系数, 其缺点在于阈值参数选择较难; CoSaMP 则在每次迭代中计算代理信号 (即 $\Phi^T \mathbf{r}_{s-1}$) 中前 $2m$ 个最大元所对应的支撑与前次逼近解的支撑并作为当次候选支撑, 再利用最小二乘求出该支撑上的系数估计. 从算法 6 的第 4) 步和算法 7 的第 3) 步可以看出两者都采用了“回溯”思想.

3.3 算法的性能比较

在给出上述贪婪算法的数学框架后, 我们以 δ_m 为条件来讨论各种算法的性能. 尽管 RIP 给出了通过算法可以获得重建的一个充分条件, 但是由 RIP 的定义可知, 为了获得更好的重建, 我们希望在尽可能少的测量次数的条件下, 获得尽可能小的限制等容常数, 这是因为 δ_m 越小则整个测量系统的正交性越强, 然而越是小的限制等容常数的 RIP 越难获得.

1) 以 OMP 为代表的一次迭代选择一个原子的贪婪算法, 没有给出确定的 RIP 条件保证, 只是在精确测量的条件下, 针对特殊的测量矩阵, 例如高斯和贝努里随机测量矩阵等分别给出了获得近似重建的概率, 既没有精确重建的保证也不能保证重建的稳定性, 程序的运行时间取决于算法的第 2) 步, 因此时间为 $O(mMN)$.

2) ROMP 算法给出了噪音测量 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{e}$ 下获得近似测量的保证, 这里 \mathbf{e} 表示误差向量, 文献 [27] 中指出只要测量矩阵满足参数为 $(4m, \delta)$ 的 RIP, 其中, $\delta = 0.01/\sqrt{\log m}$, 则对任意稀疏度为 m 的向量都可以获得重建精度范围为 $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_{l_2} \leq \sqrt{\log n} \|\mathbf{e}\|_{l_2}$ 的结果, 而当 $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ 时, 可以获得精确重建, ROMP 算法虽然添加了正则化的步骤, 但是并没有额外增加运行时间, 其总的运行时间与 OMP 相当.

3) SP 算法在精确测量的条件下也能给出精确重建的保证, 条件是测量矩阵必须满足参数 $(3m, 0.06)$ 为 RIP, 而在误差噪音测量条件下, SP 则给出了重建误差为 $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_{l_2} \leq \frac{1+\delta_{3m}}{\delta_{3m}(1-\delta_{3m})} \|\mathbf{e}\|_{l_2}$ 的保证. SP 运行时间可以达到 $O(\log(m)MN)$.

4) StOMP 算法最大的优点在于重建速度较快, 能较好地解决高维信号的重建问题, 但是它和 OMP 一样需要精确测量的保证, 也不能给出确定的 RIP 条件, 只能针对某些特殊矩阵给出一定的重建保证, 其运行时间接近 $O(MN)$.

5) CoSaMP 在测量矩阵满足 $(4m, 0.1)$ 的 RIP 的条件下给出了噪音测量的重建保证, 与 ROMP 和 SP 不同的是, CoSaMP 可以对任意噪音测量下保证重建, 但是在精确测量的条件下并不能保证精确重建, 其运行时间下限为 $O(MN)$.

总结前面的分析给出算法的性能对照, 见表 1.

表 1 主要贪婪算法的性能比较
Table 1 Comparison of performances for main greedy algorithms

	OMP	ROMP	SP	StOMP	CoSaMP
精确测量	是	否	否	是	否
运行时间	$O(mMN)$	$O(mMN)$	$O(\log(m)MN)$	$O(MN)$	$O(MN)$
精确重建	否	是	是	否	否
重建的稳定性	否	是	是	否	是

为了进一步讨论算法的性能,我们先给出 RIC 的一个简单性质:

性质 2 (δ_m 单调性). 对任意的整数 m, m' , 如果有 $m \leq m'$, 则有 $\delta_m \leq \delta_{m'}$.

由性质 2, 我们有 $\delta_{3m} < \delta_{4m}$, 则若 $\delta_{4m} < 0.1$, 则一定有 $\delta_{3m} < 0.1$; 另一方面, 一般情况下因为 m 表示信号的稀疏度, 因此, 显然有 $\delta_{4m} < 0.01/\sqrt{\log m} < 0.01$ 成立. 从而可以看出 ROMP、SP 和 CoSaMP 中 ROMP 对限制等容常数的要求最高 (即限制等容常数最小), 而 CoSaMP 其次, SP 最低. 因此, 在相同测量矩阵的条件下, 为达到相同的相对重建误差水平, ROMP 需要较多的测量次数来抵消限制等容常数的高要求性.

由于计算一个矩阵的 RIC 是 NP 难问题, 因此, 本文以高斯随机矩阵和部分傅里叶矩阵为测量矩阵, 获得精确重建时测量次数 M 的相关结论来讨论 M 与 RIC 之间的逻辑关系:

1) 高斯测量矩阵: 定义为 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$, $\Phi(i, j) = \phi_{ij}/\sqrt{M}$, 其中 $\phi_{ij} \sim N(0, 1)$, 当 M 满足:

$$M \geq \frac{Cm \log\left(\frac{N}{m}\right)}{\varepsilon^2} \quad (3)$$

时, 以大小为 $1 - \varepsilon^{cM}$ 的概率有 RIC, $\delta_m \leq \varepsilon$ 成立, 这里 C, c 为正的常数^[40].

2) 部分傅里叶矩阵: 定义为 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$, 由随机地从 $N \times N$ 维离散傅里叶变换矩阵中抽取 M 行构成. 当 M 满足:

$$M \geq \frac{C'm \log^5 N \cdot \log(\varepsilon^{-1})}{\varepsilon^2} \quad (4)$$

时, 以大小为 $1 - 1/N$ 的概率有 RIC, $\delta_m \leq \varepsilon$ 成立, 这里 C' 为正的常数^[41].

从式 (3) 和式 (4) 中显然看出, RIC 常数与测量次数成反比, 因此越小的限制等容常数就需要越

多的测量次数作为精确重建的保证.

4 模拟实验

为了保证重建算法性能比较的客观性, 我们采用绝对稀疏 0-1 随机信号. 模拟实验在 CPU 为 Intel E5300 (双核 2.60 GHz), 内存为 2.00 GB 的联想品牌机上运行. 首先, 假设稀疏信号长度 $N = 512$, 稀疏度为 $m = 40$, 测量次数 $M = 256$, 高斯随机测量矩阵 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$: $\Phi(i, j) = \frac{1}{\sqrt{M}}\phi_{i,j}$, 其中 $\phi_{i,j} \sim N(0, 1)$, 用算法 2~算法 7 的 6 种算法进行重建性能验证 (见图 1), 由图 1 可以看出, 在一定的测量次数下, 这 6 种算法都能精确地恢复信号. 由于重建中测量矩阵的随机性, 为了进一步比较各种算法的重建效果和信号稀疏度以及测量次数之间的关系, 我们通过多次的实验来比较上述 6 种算法的重建性能. 比较的标准分别为稀疏度与信号重建概率、测量次数与信号重建概率之间的关系. 这里仍然采用绝对稀疏的 0-1 随机信号, 通过假设 $N = 256$, $M = 128$, 改变信号的稀疏度 (从 $m = 20$ 开始), 假设 $N = 256$, $m = 30$, 改变测量次数 (从 $M = 60$ 开始), 分别进行 500 次模拟实验, 结果如图 2 和图 3 所示.

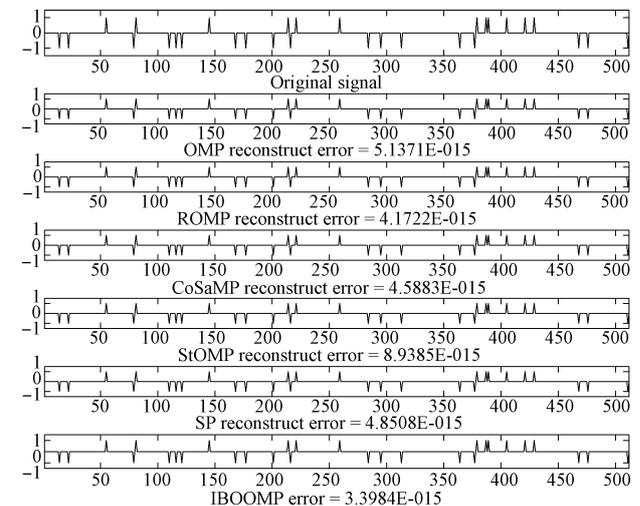


图 1 当 $N = 512$, $m = 40$, $M = 256$ 时, 贪婪算法 OMP, ROMP, CoSaMP, SP, StOMP 和 IBOOMP 的重建结果
Fig. 1 Reconstruction results based on OMP, ROMP, CoSaMP, SP, StOMP, and IBOOMP, respectively, with $N = 512$, $m = 40$, and $M = 256$

由图 2 可以看出: 在测量次数一定的条件下, 随着稀疏度的增加, 信号重建概率逐渐减小, 在信号非常稀疏的情况下, 各种算法都以高概率重建原始信号. 为了更好地比较各种算法在不同稀疏度的表现, 我们让 m 从 20 开始, 由图 2 明显可以看出 OMP 和 ROMP 成功的概率相对比较小, 而 CoSaMP 和 SP

算法则能以较高的概率精确重建原始信号, 但是随着稀疏度的增加, CoSaMP 算法的渐近效果远差于其他算法. 由图 3 可以看出稀疏度一定的情况下, 随着测量次数的增多, 信号重建的概率逐渐增大, 相比较而言, CoSaMP 以及 SP 算法获得信号重建所需要的测量次数相对比较少, 而 ROMP 则较多, 这一结论与前面的理论分析结果完全吻合. 从图 2 和图 3 中可发现, 我们在文献 [30] 中所提出的 IBOOMP 算法虽然沿用 OMP 算法一次迭代选取一个原子的机制, 但在同等稀疏度或者测量次数条件下, 信号重构概率明显高于 OMP 算法.

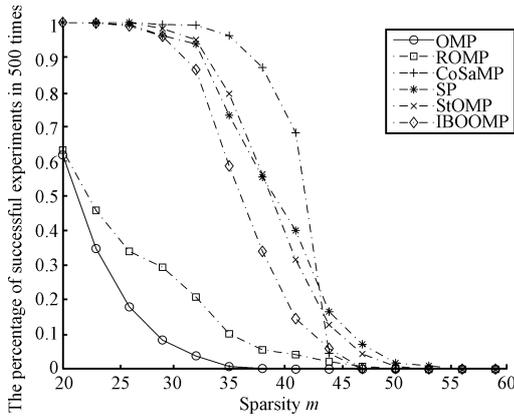


图 2 当 $N = 256, M = 128$ 时, 改变信号的稀疏度 m , 贪婪算法 OMP, ROMP, CoSaMP, SP, StOMP 和 IBOOMP 的重建结果比较

Fig. 2 The comparison of reconstruction results based on OMP, ROMP, CoSaMP, SP, StOMP, and IBOOMP, respectively, with $N = 256, M = 128$, and m increasing

最后, 为了进一步比较算法的重建性能, 我们仍然对长度为 512 的绝对稀疏信号, 给出在噪声测量下 (对测量向量 y 添加不同程度的高斯噪声, σ^2 为方差), 各种算法的重建时间与相对重建误差的比较. 由前面的实验结果知, OMP 算法的重建概率相对较低, 为保证比较的客观性, 在每种算法都能确保重建的条件下进行比较, 因此, 在这个实验中, 我们取稀疏度 $m = 20$, 测量次数 $M = 256$. 对不同程度的噪声方差分别做 100 次模拟实验, 所得总的重建时间和总的重建误差比较见表 2.

从表 2 的结果看出, 从运行时间来看, SP 算法速度最快, OMP 与 ROMP 运行速度相当; 从对测量噪声的稳定性来看, 当方差 $\sigma^2 = 0.01$ 时, OMP 算法显示全部失败, StOMP 重建误差也相对较大, 而 SP 算法与 ROMP 以及 CoSaMP 算法则表现了较好的稳定性, 这一结果与前面算法性能中的讨论也符合.

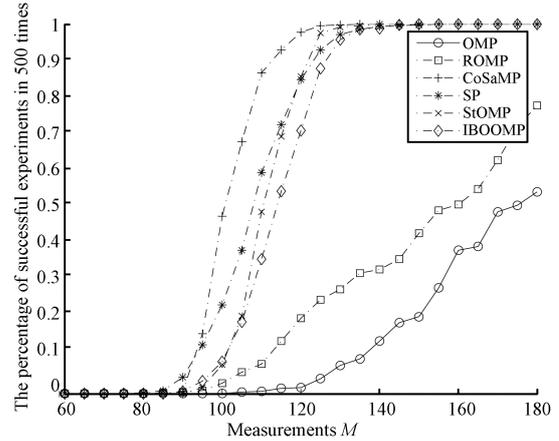


图 3 当 $N = 256, m = 30$ 时, 改变测量次数 M , 贪婪算法 OMP, ROMP, CoSaMP, SP, StOMP 和 IBOOMP 的重建结果比较

Fig. 3 The comparison of reconstruction results based on OMP, ROMP, CoSaMP, SP, StOMP, and IBOOMP, respectively, with $N = 256, m = 30$, and M increasing

5 压缩感知的应用及今后研究方向

目前关于 CS 理论的应用已经引起了高度重视, 它在压缩成像系统、医学成像、模拟/信息转换、雷达成像、天文以及通讯等领域都获得了很好的应用. 其主要成果如下: 美国 Rice 大学的 Takhar 和 Duarte 等基于 CS 理论设计出单像素照相机^[42-43]使得低像素相机重建高质量图像成为可能; Baraniuk 等^[44]进一步将此成像系统应用到雷达成像系统, 避免了传统雷达成像系统对原始信号的直接采样, 降低了接收端对模数转换器件的带宽要求; 与密西根大学的 Ragheb 合作, Kirolos 和 Ragheb 等^[45-46]提出了基于压缩感知技术的模拟/信息转换器, 给出 A/C 转换框架, 并为此框架提出一个完全的晶体管级实现; 随后, Laska 等^[47]提出基于压缩采样的模拟/信息转换器, 并给出随机采样系统的两种实现模式; Lustig 等^[48]提出一种基于压缩采样的快速 MR 成像; Bajwa 等^[49-50]提出分布式信源-通道匹配的通讯机制, 被用来估计和分析在融合中心所传感到的数据功率-失真-时延折中选择.

CS 理论的应用都建立在鲁棒、快速、精确的重建算法的基础上, 今后我们进一步的研究方向: 1) 构造具有确定性质的更优的 CS 测量矩阵, 并给出收敛的理论保证; 2) 在较强误差或多种误差叠加的情况下发展更有效的和低复杂度的重建算法; 3) 结合现有几类算法的优点, 在测量次数、重建误差和重建速度之间达到最佳平衡.

表 2 100 次高斯噪声测量下的重建时间和重建误差的比较

Table 2 The comparison of reconstruction time and errors with 100 times Gaussian noise

方差	OMP		ROMP		SP		CoSaMP		StOMP	
	T (s)	e								
0.001	1.406	0.1363	1.19	0.2879	0.483	0.1363	92.531	0.1575	9.875	1.1681
0.005	1.454	0.5635	1.281	1.4706	0.515	0.5635	92.079	0.7534	10.421	5.5633
0.01	—	—	1.343	2.9046	0.516	1.5447	92.282	1.7544	10.531	15.4059

References

- Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306
- Candes E J. Compressive sampling. In: Proceedings of the International Congress of Mathematics. Madrid, Spain: the European Mathematical Society, 2006. 1433–1452
- Donoho D L, Huo X. Uncertainty principles and ideal atomic decompositions. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2001, **47**(7): 2845–2862
- Donoho D L, Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via L_1 minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 2003, **100**(5): 2197–2202
- Laska J N, Kirolos S, Duarte M F, Ragheb T S, Baraniuk R G, Massoud Y. Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation. In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems. New Orleans, USA: IEEE, 2007. 1959–1962
- Ragheb T, Kirolos S, Laska J, Gilbert A, Strauss M, Baraniuk R, Massoud Y. Implementation models for analog-to-information conversion via random sampling. In: Proceedings of the 50th Symposium on Circuits and Systems. Montreal, Canada: IEEE, 2007. 325–328
- Bajwa W, Haupt J, Sayeed A, Nowak R. Compressive wireless sensing. In: Proceedings of the 5th International Conference on Information Processing in Sensor Networks. New York, USA: IEEE, 2006. 134–142
- Chen S B, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, **20**(1): 33–61
- Figueiredo M A, Nowak R D, Wright S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, **1**(4): 586–597
- Daubechies I, Defrise M, De Mol C. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, **57**(11): 1413–1457
- Blumensath T, Davies M. Iterative hard thresholding for compressed sensing. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, **27**(3): 265–274
- Cai J F, Osher S, Shen Z W. Linearized Bregman iterations for compressed sensing. *Mathematics of Computation*, 2008, **78**(267): 1515–1536
- Yin W, Osher S, Goldfarb D, Darbon J. Bregman iterative algorithms for L_1 -minimization with applications to compressed sensing. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, **1**(1): 143–168
- Osher S, Mao Y, Dong B, Yin W T. Fast linearized Bregman iteration for compressive sensing and sparse denoising. *Communications in Mathematical Sciences*, 2010, **8**(1): 93–111
- Cai J F, Osher S, Shen Z W. Convergence of the linearized Bregman iteration for L_1 -norm minimization. *Mathematics of Computation*, 2009, **78**(268): 2127–2136
- Gilbert A C, Guha S, Indyk P, Muthukrishnan S, Strauss M J. Near-optimal sparse Fourier representations via sampling. In: Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York, USA: ACM, 2000. 152–161
- Gilbert A, Strauss M, Tropp J, Vershynin R. Algorithmic linear dimension reduction in the L_1 norm for sparse vectors. In: Proceedings of the 44th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing. Allerton, USA: Curran Associates, 2006. 1–9
- Gormode G, Muthukrishnan S. Combinatorial algorithms for compressed sensing. In: Proceedings of the 40th Annual Conference on Information Sciences and Systems. Princeton, USA: IEEE, 2006. 280–294
- Gilbert A, Strauss M, Tropp J, Vershynin R. One sketch for all: fast algorithms for compressed sensing. In: Proceedings of the 39th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York, USA: ACM, 2007. 237–246
- Zayyani H, Babaie-Zadeh M, Jutten C. Bayesian pursuit algorithm for sparse representation. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Taipei, China: IEEE, 2009. 1549–1552
- Baron S, Sarvoham R, Baraniuk R G. Bayesian compressive sensing via belief propagation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(1): 269–280
- Seeger M W, Steinke F, Tsuda K. Bayesian inference and optimal design in the sparse linear model. *Journal of Machine Learning Research-Proceedings Track*, 2007, **2**(6): 444–451
- Weiss Y, Chang H S, Freeman W T. Learning compressed sensing. In: Proceedings of the 45th Allerton Conference on Communications, Control and Computing. Illinois, USA: Curran Associates, 2007. 1–7
- Mallat S, Zhang Z. Matching pursuit with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, **41**(12): 3397–3415
- Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, **53**(12): 4655–4666
- Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, Starck J L. Sparse Solution of Underdetermined Linear Equations by Stage Wise Orthogonal Matching Pursuit, Technical Report No. 2006-2, Department of Statistics, Stanford University, USA, 2006

- 27 Needell D, Vershynin R. Signal recovery from inaccurate and incomplete measurements via regularized orthogonal matching pursuit. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 310–316
- 28 Needell D, Tropp J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, **26**(3): 301–321
- 29 Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(5): 2230–2249
- 30 Fang Hong, Zhang Quan-Bing, Wei Sui. Image reconstruction based on improved backward optimized orthogonal matching pursuit algorithm. *Journal of South China University of Technology (Natural Science)*, 2008, **36**(8): 23–27 (方红, 章权兵, 韦穗. 改进的后退型最优正交匹配追踪的图像重建方法. 华南理工大学学报(自然科学版), 2008, **36**(8): 23–27)
- 31 Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489–509
- 32 Candes E, Tao T. Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, **51**(12): 4203–4215
- 33 Candes E, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, **59**(8): 1207–1223
- 34 Candes E. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathematique*, 2008, **346**(9–10): 589–592
- 35 Foucart S, Lai M. Sparsest solutions of underdetermined linear systems via L_q -minimization for $0 < q < 1$. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, **26**(3): 395–407
- 36 Cai T, Wang L, Xu G W. Shifting inequality and recovery of sparse signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(3): 1300–1308
- 37 Cai T, Wang L, Xu G W. New bounds for restricted isometry constants. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(9): 4388–4394
- 38 Fang Hong, Zhang Quan-Bing, Wei Sui. A method of image reconstruction based on sub-Gaussian random projection. *Journal of Computer Research and Development*, 2008, **45**(8): 1402–1407 (方红, 章权兵, 韦穗. 基于亚高斯随机投影的图像重建方法. 计算机研究与发展, 2008, **45**(8): 1402–1407)
- 39 Varadarajan B, Khudanpur S, Tran T D. Stepwise optimal subspace pursuit for improving sparse recovery. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, **18**(1): 27–30
- 40 Candes E, Tao T. Near optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies? *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(12): 5406–5425
- 41 Rudelson M, Vershynin R. Sparse reconstruction by convex relaxation: Fourier and Gaussian measurements. In: Proceedings of the 40th Annual Conference on Information Science and Systems. Princeton, USA: IEEE, 2006. 207–212
- 42 Takhar D, Laska J, Wakin M, Duarte M F, Baron D, Savorotham S, Kelly K, Baraniuk R. A new compressive imaging camera architecture using optical-domain compression. In: Proceedings of the Computational Imaging IV at SPIE Electronic Imaging. San Jose, USA: SPIE, 2006. 43–52
- 43 Duarte M, Davenport M, Takhar D, Laska J, Sun T, Kelly K, Baraniuk R. Single-pixel imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 83–91
- 44 Baraniuk R, Steeghs P. Compressive radar imaging. In: Proceedings of the IEEE Radar Conference. Boston, USA: IEEE, 2007. 128–133
- 45 Kirolos S, Laska J, Wakin M, Duarte M, Baron D, Ragheb T, Massoud Y, Baraniuk R. Analog-to-information conversion via random demodulation. In: Proceedings of the IEEE Dallas/CAS Workshop on Design, Applications, Integration and Software. Richardson, USA: IEEE, 2006. 71–74
- 46 Ragheb T, Kirolos S, Laska J, Gilbert A, Strauss M, Baraniuk R, Massoud Y. Implementation models for analog-to-information conversion via random sampling. In: Proceedings of the 50th Midwest Symposium on Circuits and Systems. Montreal, Canada: IEEE, 2007. 325–328
- 47 Laska J, Kirolos S, Massoud Y, Baraniuk R, Gilbert A, Iwen M, Strauss M. Random sampling for analog-to-information conversion of wideband signals. In: Proceedings of the IEEE Dallas/CAS Workshop on Design, Applications, Integration and Software. Richardson, USA: IEEE, 2006. 119–122
- 48 Lustig M, Donoho D L, Pauly J M. Sparse MRI: the application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2007, **58**(6): 1182–1195
- 49 Bajwa W, Haupt J, Sayeed A M, Nowak R. Compressive wireless sensing. In: Proceedings of the 5th International Conference on Information Processing in Sensor Networks. Nashville, USA: IEEE, 2006. 134–142
- 50 Rabbat M, Haupt J, Singh A, Nowak R. Decentralized compression and predistribution via randomized gossiping. In: Proceedings of the 5th International Conference on Information Processing in Sensor Networks. Nashville, USA: IEEE, 2006. 51–59



方红 上海第二工业大学理学院副教授。主要研究方向为图像处理。本文通信作者。E-mail: fanghong@sf.sspu.cn (FANG Hong Associate professor at the School of Science, Shanghai Second Polytechnic University. Her main research interest is image processing. Corresponding author of this paper.)



杨海蓉 合肥师范学院数学系副教授。主要研究方向为信号处理。E-mail: murong81@163.com (YANG Hai-Rong Associate professor in the Department of Mathematics, Hefei Normal University. Her main research interest is signal processing.)