

连续非线性系统的滑模鲁棒正不变集控制

傅健¹ 吴庆宪¹ 姜长生¹ 王宇飞¹

摘要 针对一类具有控制和状态有界约束的连续非线性系统, 提出了一种基于单向辅助面滑模控制的正不变集设计方法. 该方法通过将约束条件引入单向辅助面的设计中, 利用单向辅助面构造系统状态的正不变集, 以保证系统状态和控制输入在整个过程中都能满足约束条件. 同时, 滑模控制器设计不再受到切换面的限制, 一些不稳定的超平面也可以作为单向辅助面以设计控制器. 随后给出该方法的稳定性分析以及正不变集的理论证明, 并且通过仿真验证了设计方法的有效性.

关键词 滑模, 正不变集, 单向辅助面滑模控制, 状态和控制有界约束

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01395

Robust Sliding Mode Positively Invariant Set for Nonlinear Continuous System

FU Jian¹ WU Qing-Xian¹ JIANG Chang-Sheng¹ WANG Yu-Fei¹

Abstract A sliding mode control with unidirectional auxiliary surfaces (UAS-SMC) method of positively invariant sets is proposed for a class of nonlinear continuous systems with states and control inputs constraints. These unidirectional auxiliary surfaces are designed by the state constraints and the feasible state region of the control input constraints. The constraints are guaranteed by using these surfaces to constitute the boundaries of positively invariant sets. As the controller of the system is constituted by unidirectional auxiliary surfaces, the positively invariant sets can be properly enlarged or shrunk with unchanged controller. Even the unstable hyperplanes can be used as unidirectional auxiliary surfaces to design a stable controller. The stability of the system and the positively invariant sets are proved in this paper. Simulation results show the effectiveness of this method.

Key words Sliding mode, positively invariant sets, sliding mode control with unidirectional auxiliary surfaces (UAS-SMC), bounded states and control inputs

由于动态系统的状态约束和控制约束等问题都可归结为状态空间中某些集合的正不变性, 因此正不变集的研究工作在控制约束研究中有着重要的意义^[1-2].

目前对于正不变集的研究工作主要可以分为椭圆不变集和多面体不变集. 文献 [3] 研究了在控制受限的离散线性系统中如何设计最大椭圆正不变集的问题. 文献 [4] 将椭圆正不变集应用在一种混沌系统中, 并取得了较好的效果. 文献 [5] 通过将多面体划分为正不变集和后向可达集, 以解决自治仿射系统多面体可达的问题. 此外, 神经网络、预测控制等方法也是研究正不变集的有效方法^[6-9]. 但是, 目前正不变集往往需要满足某些比较复杂的必要条件^[10-11], 从而导致正不变集在实际系统的应用中出

现了一些困难.

针对这个问题, 本文提出一种更为简便的正不变集设计方法, 即单向辅助面滑模控制方法 (Sliding mode control with unidirectional auxiliary surfaces, UAS-SMC). 该方法通过改进滑模变结构控制 (Sliding mode control, SMC) 的结构, 将输入输出约束条件引入单向辅助面的设计中, 利用单向辅助面构造系统状态的多面体正不变集, 以保证系统状态和控制输入在整个过程中都能满足约束条件. 同时, 滑模控制器设计不再受到切换面的限制, 一些不稳定的超平面被用于设计控制器. 本文首先描述需要解决的问题; 其次阐述单向辅助面滑模控制器的设计步骤; 接着给出相关稳定性证明; 然后进行仿真验证; 最后给出研究结论.

1 单向辅助面滑模控制

1.1 问题描述

考虑如下不确定非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + \eta \end{aligned} \quad (1)$$

收稿日期 2011-02-14 录用日期 2011-06-05
Manuscript received February 14, 2011; accepted June 5, 2011
国家自然科学基金重大课题资助项目 (60974106, 91116017), 国家自然科学基金青年科学基金项目 (11102080), 南京航空航天大学博士学位论文创新与创优基金 (BCXJ10-04), 航空科学基金 (20095152026) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60974106, 91116017, 11102080), Funding for Outstanding Doctoral Dissertation in Nanjing University of Aeronautics and Astronautics (BCXJ10-04), and Aeronautical Science Foundation of China (20095152026)

1. 南京航空航天大学自动化学院 南京 210016
1. College of Automation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态变量, $u \in \mathbf{R}$ 为系统控制输入, $\eta \in \mathbf{R}$ 表示干扰.

状态变量 \mathbf{x} 的约束条件如下:

$$\Psi = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n, c_i \leq x_i \leq d_i, c_i, d_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2)$$

控制输入 u 的约束条件如下:

$$\Xi = \{u | u \in \mathbf{R}, e \leq u \leq f, e, f \in \mathbf{R}\} \quad (3)$$

1.2 正不变集及其控制器的设计步骤

按照如下步骤设计单向滑模控制器:

首先, 选择 n 个合适的切换面 S_1, \dots, S_n :

$$S(\mathbf{x}) = [S_1(\mathbf{x}), \dots, S_n(\mathbf{x})]^T = A\mathbf{x} \quad (4)$$

其中, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\text{rank}(A) = n$, 切换面 S_1, \dots, S_n 将 \mathbf{R}^n 空间划分成 2^n 个子空间, 且系统 (1) 在这些切换面上的滑动模态是稳定的.

其次, 对于点 $\mathbf{x}_0 = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$, 定义点 \mathbf{x}_0 所在子空间的编号为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, 其中: 若 $S_1(\mathbf{x}_0) > 0$, 则 $\eta_1 = 1$, 反之则 $\eta_1 = 0$; 若 $S_2(\mathbf{x}_0) > 0$, 则 $\eta_2 = 1$, 反之则 $\eta_2 = 0$; \dots ; 若 $S_n(\mathbf{x}_0) > 0$, 则 $\eta_n = 1$, 反之则 $\eta_n = 0$. 由此可知, 点 \mathbf{x}_0 所在的子空间编号位于 $00 \dots 0$ 号至 $11 \dots 1$ 号之间. 若将子空间的编号视为二进制, 并将其转换为十进制可知, 点 \mathbf{x}_0 所在子空间的编号位于 0 号至 $2^n - 1$ 号之间.

再次, 由 $\text{rank}(A) = n$ 可知式 (5) 所示的方程组表示一条经过原点的直线:

$$\begin{cases} S_2(\mathbf{x}) = 0 \\ S_3(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ S_n(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

在直线上原点两侧取合适的点 $\tilde{\mathbf{p}}_{S_{1+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{1-}}$. 类似地, 对于方程组

$$\begin{cases} S_1(\mathbf{x}) = 0 \\ S_3(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ S_n(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \dots \begin{cases} S_2(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ S_{i-1}(\mathbf{x}) = 0 \\ S_{i+1}(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ S_n(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \dots \begin{cases} S_1(\mathbf{x}) = 0 \\ S_2(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ S_{n-1}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

分别在原点两边取合适的点 $\tilde{\mathbf{p}}_{S_{2+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{2-}}, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{n+}},$

$\tilde{\mathbf{p}}_{S_{n-}}$, 则可得 n 个点集 $\{\tilde{\mathbf{p}}_{S_{1+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{1-}}\}, \{\tilde{\mathbf{p}}_{S_{2+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{2-}}\}, \dots, \{\tilde{\mathbf{p}}_{S_{n+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{n-}}\}$.

接着, 分别取点 $\tilde{\mathbf{p}}_{S_1}, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_{S_n}$, 如图 1 所示, 其中 $\tilde{\mathbf{p}}_{S_1} \in \{\tilde{\mathbf{p}}_{S_{1+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{1-}}\}, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_{S_n} \in \{\tilde{\mathbf{p}}_{S_{n+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{n-}}\}$. 点 $\tilde{\mathbf{p}}_{S_1}, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_{S_n}$ 可以确定一个超平面. 又因为点 $\tilde{\mathbf{p}}_{S_1}, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_{S_n}$ 总共可以有 2^n 个排列, 所以点集 $\{\tilde{\mathbf{p}}_{S_{1+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{1-}}\}, \{\tilde{\mathbf{p}}_{S_{2+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{2-}}\}, \dots, \{\tilde{\mathbf{p}}_{S_{n+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{n-}}\}$ 总共可以确定 2^n 个超平面. 定义点 $\tilde{\mathbf{p}}$ 的坐标:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{1}{n} (\tilde{\mathbf{p}}_{S_1} + \tilde{\mathbf{p}}_{S_2} + \dots + \tilde{\mathbf{p}}_{S_n})$$

若点 $\tilde{\mathbf{p}}$ 位于编号为 $i, i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ 的子空间, 则称 $\tilde{\mathbf{p}}_{S_1}, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_{S_n}$ 确定的超平面 $\tilde{H}_i(\mathbf{x})$ 对应于编号为 i 的子空间. 定义超平面:

$$\tilde{H}_i(\mathbf{x}) = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n + M_i = 0 \quad (6)$$

其中, $b_{i1}, \dots, b_{in}, M_i \in \mathbf{R}, M_i > 0, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1; b_{i1}, \dots, b_{in}, M_i$ 表示点 $\tilde{\mathbf{p}}_{S_1}, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_{S_n}$ 所确定的超平面方程 $\tilde{H}_i = 0$ 中对应的参数. 然而超平面方程 $\tilde{H}_i = 0$ 无需满足在其上滑动模态稳定的条件, 所以超平面方程 $\tilde{H}_i = 0$ 可以为不稳定的超平面. 此时通过选取适当的点 $\tilde{\mathbf{p}}_{S_1}, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_{S_n}$ 使得式 (6) 满足如下条件:

$$b_{0n}, b_{1n}, \dots, b_{(2^n-1)n} \neq 0 \quad (7)$$

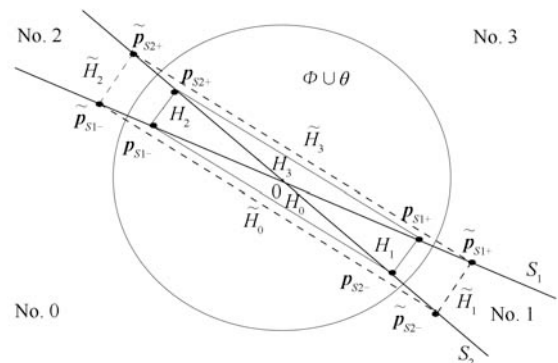


图 1 单向辅助面 H_i 设计

Fig. 1 Unidirectional auxiliary surfaces design

然后, 定义向量 $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$ 如下: 当点 \mathbf{x} 位于编号 $i, i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ 子空间时,

$$\mathbf{c} = [b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}]^T$$

状态可行域:

$$\Theta = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, e < (c_n g(\mathbf{x}))^{-1} (-D(x) - c_n f(\mathbf{x}) + N) < f\} \quad (8)$$

其中, $D(x) = c_1 x_2 + c_2 x_3 + \dots + c_{n-1} x_n$, e 和 f 分别为 Ξ 中控制输入的上下界, N 为鲁棒项, 且 $N >$

当 $H_i(\mathbf{p}) = \bar{M}_i$ 时, $\bar{M}_i - H_i(\mathbf{p}) = 0$. 又因为 $(k_1 + \dots + k_n)\bar{M}_i = \bar{M}_i - H_i(\mathbf{p})$, $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$, $\bar{M}_i > 0$, 所以 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. 因此点 \mathbf{p} 的坐标为 $\mathbf{p} = [0, 0, \dots, 0]^T$. \square

定理 1. 考虑非线性系统 (1), 设计输入输出约束滑模控制器 u 如式 (9) 所示, 则系统状态 \mathbf{x} 是渐近稳定的, 并且集合

$$\varphi = \{\mathbf{x} | H_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1\}$$

是正不变集.

证明. 1) 稳定性证明.

对于点 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ 位于编号 i , $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ 子空间, 定义 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{M}_i - H_i(\mathbf{x})}{\bar{M}_i} \right)^2 \quad (13)$$

其中, $\bar{M}_i, H_i(\mathbf{x})$ 与式 (10) 中一致.

首先, 证明 $V \geq 0$, 且当 $V = 0$ 时有 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

由式 (13) 可知, $V \geq 0$, 并且当 $V = 0$ 时, 可得 $H_i(\mathbf{x}) = \bar{M}_i$, 又由引理 1 可知, 当 $H_i(\mathbf{x}) = \bar{M}_i$ 时有 $\mathbf{x} = [0, 0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^n$, 所以可得 $V \geq 0$, 且当 $V = 0$ 时有 $\mathbf{x} = [0, 0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^n$.

其次, 讨论 \dot{V} , 证明当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时有 $\dot{V} < 0$.

对于式 (13) 求导, 可得

$$\dot{V} = -\frac{\bar{M}_i - H_i(\mathbf{x})}{\bar{M}_i^2} \cdot \dot{H}_i(\mathbf{x}) \quad (14)$$

由引理 1 可知, 对于点 \mathbf{x} 位于编号 i 子空间, 有 $\bar{M}_i - H_i(\mathbf{x}) \geq 0$. 又因为当 $H_i(\mathbf{x}) = \bar{M}_i$ 时, 有 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 所以当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时, 有 $\bar{M}_i - H_i(\mathbf{x}) > 0$.

对式 (10) 求导, 可得

$$\dot{H}_i(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x}) + c_n f(\mathbf{x}) + c_n g(\mathbf{x})u + c_n \eta \quad (15)$$

其中 $D(\mathbf{x})$ 与式 (8) 中一致. 将式 (9) 代入式 (15) 可得

$$\dot{H}_i(\mathbf{x}) = N + c_n \eta$$

由式 (8) 可知 $N > \sup\{-c_n \eta\}$, 所以 $\dot{H}_i(\mathbf{x}) > 0$. 又因为 $\bar{M}_i - H_i(\mathbf{x}) > 0$, $H_i(\mathbf{x}) > 0$, 可知 $\dot{V} < 0$.

注 3. 当点 \mathbf{x} 在切换面 $S_1(\mathbf{x}), \dots, S_n(\mathbf{x})$ 上运动时, 因为在切换面上的滑动模式是稳定的, 所以点 \mathbf{x} 可以沿着切换面收敛至原点. 同时因为点 \mathbf{x} 在整个运动过程中需要满足 $\dot{H}_i(\mathbf{x}) > 0$, 所以此时点 \mathbf{x} 在切换面上运动时也满足 $\dot{V} < 0$, 否则点 \mathbf{x} 就会离开切换面.

接下来, 对 Lyapunov 函数 V 的连续性进行证明.

如图 3 所示, 当点 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 位于编号 i 子空间与编号 j 两个相邻子空间之间的切

换面上, 使得 Lyapunov 函数 V 从 V_i 切换到 V_j . 切换面由点 $\mathbf{p}_{S_1}, \dots, \mathbf{p}_{S_r}, \mathbf{p}_{S(r+2)}, \dots, \mathbf{p}_{S_n}$ 与原点 $\mathbf{0}$ 确定, H_i 面由点 $\mathbf{p}_{S_1}, \dots, \mathbf{p}_{S_r}, \mathbf{p}_{S(r+1)-}, \mathbf{p}_{S(r+2)}, \dots, \mathbf{p}_{S_n}$ 确定, H_j 面由点 $\mathbf{p}_{S_1}, \dots, \mathbf{p}_{S_r}, \mathbf{p}_{S(r+1)+}, \mathbf{p}_{S(r+2)}, \dots, \mathbf{p}_{S_n}$ 确定. 图 3 中单向辅助面 H_i 由点 $\mathbf{p}_{S_1}, \mathbf{p}_{S_2}, \mathbf{p}_{S_3-}$, H_j 由点 $\mathbf{p}_{S_1}, \mathbf{p}_{S_2}, \mathbf{p}_{S_3+}$ 确定, 切换面由点 $\mathbf{p}_{S_1}, \mathbf{p}_{S_2}, \mathbf{0}$ 确定.

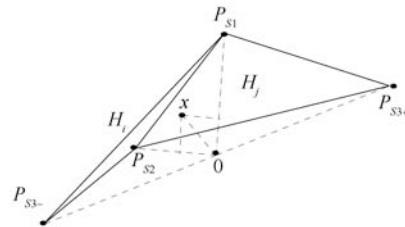


图 3 点 \mathbf{x} 位于编号 i 子空间与编号 j 子空间之间切换示意图

Fig. 3 The point \mathbf{x} between No. i subspace and No. j subspace

因为点 \mathbf{x} 位于编号 i 子空间与编号 j 子空间之间的切换面上, 可知点 \mathbf{x} 属于 i 子空间或者 j 子空间, 且点 \mathbf{x} 的坐标可以由确定切换面的点 $\mathbf{p}_{S_1}, \dots, \mathbf{p}_{S_r}, \mathbf{p}_{S(r+2)}, \dots, \mathbf{p}_{S_n}$ 得到.

$$\mathbf{x} = k_1 \mathbf{p}_{S_1} + \dots + k_r \mathbf{p}_{S_r} + k_{r+2} \mathbf{p}_{S(r+2)} + \dots + k_n \mathbf{p}_{S_n} \quad (16)$$

其中, $k_1, \dots, k_r, k_{r+2}, \dots, k_n \geq 0$.

令点 $\mathbf{p}_{S_1}, \dots, \mathbf{p}_{S_r}, \mathbf{p}_{S(r+2)}, \dots, \mathbf{p}_{S_n}$ 的坐标为

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{S_1} &= [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}]^T \\ &\vdots \\ \mathbf{p}_{S_r} &= [x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn}]^T \\ \mathbf{p}_{S(r+2)} &= [x_{(r+2)1}, x_{(r+2)2}, \dots, x_{(r+2)n}]^T \\ &\vdots \\ \mathbf{p}_{S_n} &= [x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}]^T \end{aligned}$$

如式 (10) 所示, 令

$$\begin{aligned} H_i &= b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n + \bar{M}_i \\ H_j &= b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \dots + b_{jn}x_n + \bar{M}_j \end{aligned} \quad (17)$$

因为点 $\mathbf{p}_{S_1}, \dots, \mathbf{p}_{S_r}, \mathbf{p}_{S(r+2)}, \dots, \mathbf{p}_{S_n}$ 参与确定单向辅助面 H_i , 所以有

$$\begin{aligned} H_i(\mathbf{p}_{S_1}) &= 0, \dots, H_i(\mathbf{p}_{S_r}) = 0 \\ H_i(\mathbf{p}_{S(r+2)}) &= 0, \dots, H_i(\mathbf{p}_{S_n}) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

将式 (16) 代入式 (17), 可得

$$\begin{aligned}
 H_i(\mathbf{x}) = & k_1(b_{i1}x_{11} + \dots + b_{in}x_{1n}) + \dots + \\
 & k_r(b_{ir}x_{r1} + \dots + b_{rn}x_{rn}) + \\
 & k_{r+2}(b_{i,r+2}x_{(r+2)1} + \dots + b_{i,n}x_{(r+2)n}) + \dots + \\
 & k_n(b_{in}x_{n1} + \dots + b_{nn}x_{nn}) + \bar{M}_i \quad (19)
 \end{aligned}$$

将式 (18) 代入式 (19), 可得:

$$H_i(\mathbf{x}) = -(k_1 + \dots + k_r + k_{r+2} + \dots + k_n)\bar{M}_i + \bar{M}_i \quad (20)$$

由式 (13), 可知:

$$V_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{M}_i - H_i(\mathbf{x})}{\bar{M}_i} \right)^2$$

将式 (20) 代入, 可得:

$$V_i = \frac{1}{2} (k_1 + \dots + k_r + k_{r+2} + \dots + k_n)^2$$

同理, 点 $\mathbf{p}_{S_1}, \dots, \mathbf{p}_{S_r}, \mathbf{p}_{S_{r+2}}, \dots, \mathbf{p}_{S_n}$ 也参与确定单向辅助面 H_j , 可得:

$$V_j = \frac{1}{2} (k_1 + \dots + k_r + k_{r+2} + \dots + k_n)^2$$

所以, 当 Lyapunov 函数 V 从 V_i 切换到 V_j 时有 $V_i = V_j$, 即 Lyapunov 函数 V 是连续的.

综上所述, Lyapunov 函数 V 是连续的, $V \geq 0$, 并且当 $V = 0$ 时有 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; 当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时有 $\dot{V} < 0$, 所以系统状态 \mathbf{x} 是渐近稳定的.

2) 证明集合 φ 构成正不变集.

运用反证法进行证明:

考虑点 $\mathbf{x}(0) = [x_1(0), \dots, x_n(0)]^T \in \varphi$, 假设存在点 $\mathbf{x}(t_1) = [x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)]^T \notin \varphi, t_1 > 0$. 因为点 $\mathbf{x}(0) \in \varphi = \{\mathbf{x} | H_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, 所以可得

$$V(\mathbf{x}(0)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{M}_i - H_i(\mathbf{x}(0))}{\bar{M}_i} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \quad (21)$$

设点位于 $\mathbf{x}(t_1)$ 编号 $j, j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ 子空间, 由定义 1 可知 $H_j(\mathbf{x}(t_1)) < 0$, 则

$$V(\mathbf{x}(t_1)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{M}_j - H_j(\mathbf{x}(t_1))}{\bar{M}_j} \right)^2 > \frac{1}{2} \quad (22)$$

由式 (21) 与式 (22) 可知 $V(\mathbf{x}(0)) < V(\mathbf{x}(t_1)), 0 < t_1$, 又因为 Lyapunov 函数 V 是连续的, 则存在

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t_2)) > 0, 0 < t_2 < t_1$$

与稳定性证明中得出的 $\dot{V} < 0$ 相矛盾, 所以假设不成立. 因此对于 $\mathbf{x}(0) \in \varphi$ 有 $\mathbf{x}(t) \in \varphi, t > 0$, 由定义 1 可知集合 $\varphi = \{\mathbf{x} | H_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ 是正不变集. \square

3 仿真实验

考虑如下非线性系统

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + \eta
 \end{aligned}$$

其中

$$f(\mathbf{x}) = \frac{107.9 \sin(x_1) - 1.5x_2^2 \cdot \cos(x_1) \cdot \sin(x_1)}{7.3 - 1.5 \cos(x_1)^2}$$

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\cos(x_1)}{7.3 - 1.5 \cos(x_1)^2}$$

$$\eta = 0.4 \sin(t), \mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$$

初始值为 $x_1(t_0) = 0.39, x_2(t_0) = -0.2$, 状态 X 的约束条件为: $\Psi = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = [x_1, x_2]^T, -0.5 \leq x_i \leq 0.5, i = 1, 2\}$, 控制 u 的约束条件为: $\Xi = \{u | -50 \leq u \leq 50\}$.

采用单向辅助面滑模控制, 首先构造切换面

$$S_1(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2, S_2(\mathbf{x}) = x_1 + 0.5x_2$$

易知, 切换面 S_1, S_2 是稳定的切换面. 取点

$$\tilde{\mathbf{p}}_{S_{1+}} = (0.5, -0.25), \tilde{\mathbf{p}}_{S_{1-}} = (-0.5, 0.25)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_{S_{2+}} = (0.25, -0.5), \tilde{\mathbf{p}}_{S_{2-}} = (-0.25, 0.5)$$

通过取点 $\tilde{\mathbf{p}}_{S_1} \in \{\tilde{\mathbf{p}}_{S_{1+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{1-}}\}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_2} \in \{\tilde{\mathbf{p}}_{S_{2+}}, \tilde{\mathbf{p}}_{S_{2-}}\}$, 可得

$$\tilde{H}_0 = x_1 + x_2 + 0.25 = 0$$

$$\tilde{H}_1 = -x_1 + x_2 + 0.75 = 0$$

$$\tilde{H}_2 = x_1 - x_2 + 0.75 = 0$$

$$\tilde{H}_3 = -x_1 - x_2 + 0.25 = 0$$

定义向量 $\mathbf{C} = [c_1, c_2]^T$ 如下:

$$\mathbf{C} = \begin{cases} [1, 1]^T, & S_1 \leq 0, S_2 \leq 0 \\ [-1, 1]^T, & S_1 \leq 0, S_2 > 0 \\ [1, -1]^T, & S_1 > 0, S_2 \leq 0 \\ [-1, -1]^T, & S_1 > 0, S_2 > 0 \end{cases}$$

表达式: $D(x) = c_1x_2$

状态可行域:

$$\Theta = \{\mathbf{x} | -50 < (c_n g(\mathbf{x}))^{-1}(-D(x) - c_n f(\mathbf{x}) + N) < 50\}, N = 0.5$$

则设计单向辅助面为

$$H_0 = x_1 + x_2 + 0.25\tau = 0$$

$$H_1 = -x_1 + x_2 + 0.75\tau = 0$$

$$H_2 = x_1 - x_2 + 0.75\tau = 0$$

$$H_3 = -x_1 - x_2 + 0.25\tau = 0$$

令其中 $\tau = 0.79$, 可知正不变集

$$\varphi = \{\mathbf{x} | H_i \geq 0, i = 0, 1, 2, 3\} \subseteq \Psi \cap \Theta$$

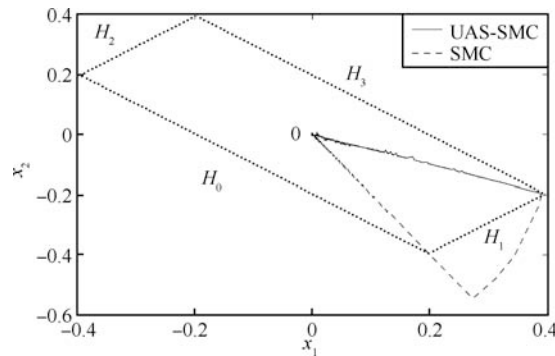
且有 $[x_1(t_0), x_2(t_0)]^T \in \varphi$. 则输入输出约束滑模控制器设计为 $u = (c_2 g(\mathbf{x}))^{-1}(-D(x) - c_2 f(\mathbf{x}) + N)$, 可得状态轨迹如图 4 所示.

由图 4 可知, 常规滑模控制 (SMC) 不一定能满足约束 Ψ 和 Ξ , 而通过设计单向辅助面输入输出约束滑模控制 (UAS-SMC) 可以保证满足 Ψ 和 Ξ 的约束条件, 并且其中单向辅助面确定的点集 $\varphi =$

$\{[x_1, x_2]^T | H_i \geq 0, i = 0, 1, 2, 3\}$ 构成正不变集.

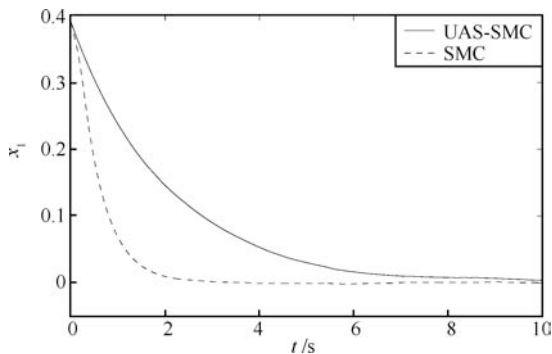
4 结语

本文对于一类控制和状态有界约束的连续非线性系统的正不变集及其控制器设计问题进行了研究. 根据理论证明和仿真实验可知, 本文设计的控制器能够保证正不变集的存在, 并且使系统状态和控制输入在整个过程中满足状态输出有界约束和控制输入有界约束. 当控制输入受限时, 可以通过改变 τ , $\tau > 0$ 使得正不变集 φ 能够收缩到状态可行域 Θ 和



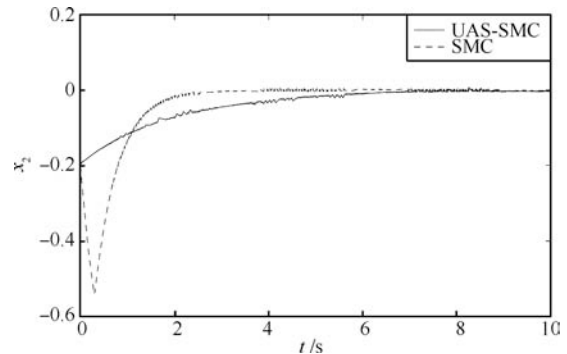
(a) 点 (x_1, x_2) 的轨迹

(a) The trajectory of point (x_1, x_2)



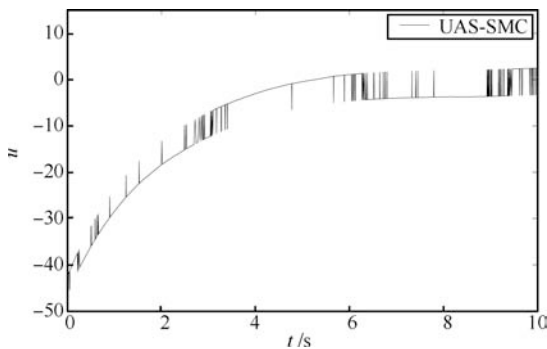
(b) 点 x_1 的轨迹

(b) The trajectory of point x_1



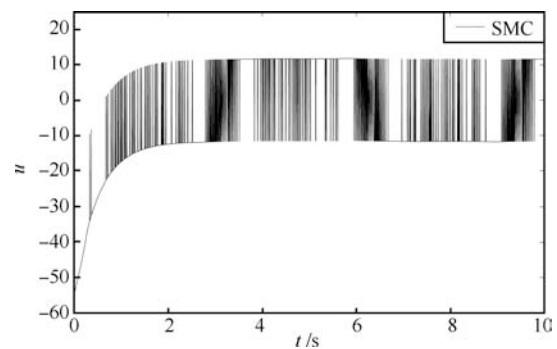
(c) 点 x_2 的轨迹

(c) The trajectory of point x_2



(d) 单向辅助面滑模控制

(d) Sliding mode control with unidirectional auxiliary surfaces



(e) 常规滑模控制

(e) Sliding mode control

图 4 仿真结果

Fig. 4 Simulation results

状态约束 Ψ 的交集内部, 而对于控制器的构成和不变集 φ 的性质没有影响. 这就赋予了正不变集一定的自由度, 给设计满足状态约束 Ψ 的正不变集带来了许多方便, 并且一些不稳定的超平面也可以作为单向辅助面以设计控制器. 同时, 为了表述简便, 本文采用了一种比较特殊的非线性系统, 而事实上文中所采用的方法, 可以较容易地推广至 n 维仿射非线性系统.

但是, 单向辅助面滑模控制仍然存在着一些问题: 从图 4 中可以看出, 其收敛速度要比常规滑模控制慢一些. 因此, 需要对如何加快单向辅助面滑模控制的收敛速度进行进一步的研究. 再者, 如何设计正不变集, 以使其覆盖状态空间中更多的区域, 也是一个急需解决的问题.

References

- Blanchini F. Set invariance in control. *Automatica*, 1999, **35**(11): 1747–1767
- Jiang Wei-Hua, Huang Lin, Chu Tian-Guang. Robust positively invariant sets of discrete-time nonlinear and time-variable convex polyhedral system family. *Acta Automatica Sinica*, 2001, **27**(5): 631–636
(蒋卫华, 黄琳, 楚天广. 离散非线性时变凸多面体系统族的鲁棒正不变集. *自动化学报*, 2001, **27**(5): 631–636)
- Zhou B, Duan G R, Lin Z L. Approximation and monotonicity of the maximal invariant ellipsoid for discrete-time systems by bounded controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(2): 440–446
- Tu Z W, Jian J G. Estimating the ultimate bounds and positively invariant sets for a class of general Lorenz-type new chaotic systems. In: *Proceedings of International Workshop on Chaos-Fractals Theories and Applications*. Kunming, China: IEEE, 2010. 225–228
- Wu M, Yan G F, Lin Z Y, Liu M Q. Characterization of backward reachable set and positive invariant set in polytopes. In: *Proceedings of American Control Conference*. St. Louis, USA: IEEE, 2009. 4351–4356
- Borrelli F, Vecchio C D, Parisio A. Robust invariant set theory applied to networked buffer-level control. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico: IEEE, 2008. 2111–2116
- Lee Y, Kouvaritakis B. Robust receding horizon predictive control for systems with uncertain dynamics and input saturation. *Automatica*, 2000, **36**(10): 1497–1504
- Davila J, Poznyak A. Attracting ellipsoid method application to designing of sliding mode controllers. In: *Proceedings of the 11th International Workshop on Variable Structure Systems*. Mexico City, Mexico: IEEE, 2010. 83–88
- Zhang L, Zhang Y, Zhang S L, Heng P A. Activity invariant sets and exponentially stable attractors of linear threshold discrete-time recurrent neural networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1341–1347
- Masubuchi I. Analysis of positive invariance and almost regional attraction via density functions with converse results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(7): 1329–1333
- Rakovic S V, Baric M. Parameterized robust control invariant sets for linear systems: theoretical advances and computational remarks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(7): 1599–1614



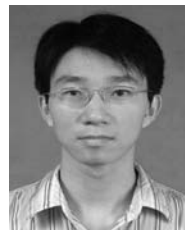
傅健 南京航空航天大学自动化学院博士研究生. 2007 年获南京理工大学计算机系学士学位. 主要研究方向为滑模变结构控制和飞行控制. 本文通信作者.
E-mail: fujian1986216@126.com
(**FU Jian** Ph.D. candidate at the College of Automation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. He received his bachelor degree from Nanjing University of Science and Technology in 2007. His research interest covers sliding mode variable structure control and flight control. Corresponding author of this paper.)



吴庆宪 南京航空航天大学教授. 主要研究方向为工业自动化, 鲁棒控制和智能控制.
E-mail: wuqingxian@nuaa.edu.cn
(**WU Qing-Xian** Professor at Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. His research interest covers industrial automatic, robust control, and intelligent control.)



姜长生 南京航空航天大学教授. 主要研究方向为非线性系统鲁棒控制, 自适应控制和智能控制.
E-mail: jiangcs@nuaa.edu.cn
(**JIANG Chang-Sheng** Professor at Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. His research interest covers robust control for nonlinear system, adaptive control, and intelligent control.)



王宇飞 南京航空航天大学自动化学院博士研究生. 2007 年获南京航空航天大学自动化系学士学位. 主要研究方向为非线性鲁棒自适应控制和飞行控制.
E-mail: wangyf@nuaa.edu.cn
(**WANG Yu-Fei** Ph.D. candidate at the College of Automation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. He received his bachelor degree from Nanjing University of Aeronautics and Astronautics in 2007. His research interest covers robust adaptive control for nonlinear system and flight control.)