

一种线性分数阶系统稳定性的频域判别准则

高哲¹ 廖晓钟¹

摘要 在分析了分数阶系统稳定性与传递函数分母相角增量的关系的基础上, 提出了一种线性分数阶系统的频域稳定性判别定理. 定义了关于分数阶系统分母各项系数的两个函数, 通过分析这两个函数正实数解的大小关系以及解的数目与分母最高阶数的关系, 给出了分数阶系统稳定所需满足的条件. 将用于在频域上对整数阶系统稳定性判别的 Hermite-Biehler 定理推广到对分数阶系统稳定性的判定. 最后, 通过对两个数值算例的分析, 说明了提出的稳定性判别准则的正确性.

关键词 分数阶, 稳定性, Hermite-Biehler 定理, 频域

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01387

A Stability Criterion for Linear Fractional Order Systems in Frequency Domain

GAO Zhe¹ LIAO Xiao-Zhong¹

Abstract A stability theorem for linear fractional order systems is proposed by analyzing the relationship between the phase angle increment of the denominator of the transfer function and the stability in the frequency domain. Two functions about the denominator coefficients are defined, the stability conditions are presented by analyzing the relationship of the positive real solutions of these two functions and the relationship between the number of solutions and the highest order of the denominator. This stability theorem generalizes the Hermite-Biehler theorem for integer order linear systems and extend it to fractional order systems in the frequency domain. Finally, the results of two numerical examples are analyzed to illustrate the validity of the proposed stability theorem.

Key words Fractional order, stability, Hermite-Biehler theorem, frequency domain

分数阶微积分的概念早在 300 多年前就被提出, 但是最近才广泛地应用到实际的工程领域中^[1], 如热扩散系统的分数阶建模^[2]、分数 PID 控制器的设计^[3-4]、分数阶信号处理^[5] 等. 包括分数阶系统在内, 保证系统的稳定是十分重要的. 基于分数阶系统的状态空间模型, 文献 [6] 利用 Kronecker 积给出了线性分数阶系统的稳定性定理. 这种方法实质上是利用鲁棒控制的区间稳定理论, 判断极点是否在稳定的扇形区域内. 近年来, 基于状态空间模型的线性分数阶系统的鲁棒稳定性研究成为新的热点^[7]. 文献 [8] 利用 Kronecker 积, 给出了分数阶系统的鲁棒稳定性的判别定理. 文献 [9] 利用 Lyapunov 不等式, 研究参数不确定分数阶系统的稳定性条件. 此外, 文献 [10] 给出了输入含有时滞的线性分数阶系统的稳定性条件. 文献 [11] 给出了线性分数阶系统 Nyquist 判据和对数频率判据等频域方法, 用图形方法来判断分数阶系统的稳定条件.

与 Nyquist 判据和劳斯判据一样, Hermite-

Biehler 定理也是一种稳定性判别准则, 通过分析特征多项式的实部与虚部的解来判断系统的稳定^[12], 这种方法也广泛应用到 PID 控制器的参数设计中^[13]. 根据 Hermite-Biehler 定理描述的稳定性条件, 文献 [14] 针对时滞系统设计了 PID 控制器, 文献 [15] 提出了鲁棒 PID 控制器的设计方法.

因为线性分数阶系统传递函数的分母是由若干个关于 Laplace 算子 s 的指数函数的代数和构成的, 所以分数阶系统的稳定性判别要比整数阶系统困难. 因此, 本文针对线性分数阶系统提出了一种频域稳定性判别准则. 与 Hermite-Biehler 定理类似, 首先定义了关于分数阶系统分母系数的两个函数, 判断这两个函数的解之间的大小关系以及解的数目与分母最高阶数的关系, 来判断分数阶系统的稳定. 当 Laplace 算子 s 的指数均为整数时, 本文提出的定理就转换为 Hermite-Biehler 定理的形式, 所以本文提出的定理将 Hermite-Biehler 定理推广到对线性分数阶系统稳定性的判别.

1 分数阶系统的数学描述

如果 $f(t)$ 的 Laplace 变换为 $F(s)$, 那么当函数 $f(t)$ 初始条件为零时, 函数 $f(t)$ 的 α 阶导数的 Laplace 变换为 $s^\alpha F(s)$ ^[16], 所以用如下的传递函数描述线性分数阶系统

收稿日期 2011-01-17 录用日期 2011-04-16
Manuscript received January 17, 2011; accepted April 16, 2011
国家自然科学基金 (50777003) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (50777003)

1. 北京理工大学自动化学院 北京 100081
1. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0} \quad (1)$$

其中, $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 存在小于等于 1 的最大的正数 q , 且 $\frac{\alpha_i}{q} = \gamma_i, \gamma_i \in \mathbf{Z}^+, \beta_k \in \mathbf{R}^+, a_i, b_k \in \mathbf{R}, a_i \neq 0, b_k \neq 0 (i = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, m)$ 并且 $\beta_m \leq \alpha_n, 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n, 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_m, \mathbf{Z}^+$ 代表正整数集, \mathbf{R}^+ 代表正实数集, \mathbf{R} 代表实数集.

分数阶系统 $G(s)$ 的分母部分如下:

$$F(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 \quad (2)$$

令 $\alpha_i = \gamma_i q$, 式 (2) 可以化为

$$\begin{aligned} F(s) &= a_n s^{\gamma_n q} + a_{n-1} s^{\gamma_{n-1} q} + \dots + a_1 s^{\gamma_1 q} + a_0 \\ &= a_n \prod_{i=1}^{\gamma_n} (s^q - \lambda_i) \end{aligned} \quad (3)$$

设 $w = s^q$, 式 (3) 可以化为

$$\begin{aligned} F(w) &= a_n w^{\gamma_n} + a_{n-1} w^{\gamma_{n-1}} + \dots + a_1 w^{\gamma_1} + a_0 \\ &= a_n \prod_{i=1}^{\gamma_n} (w - \lambda_i) \end{aligned} \quad (4)$$

2 线性分数阶系统稳定性频域判别准则

根据文献 [17] 的分数阶稳定性判别方法, 如果系统 (1) 是稳定的, 则要求 $F(w)$ 的特征根 λ_i 满足 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2}$. 但是这种方法不能像整数阶系统那样可以根据 λ_i 实部的符号来判别系统的稳定性, 所以下面给出利用复平面的方法来判定分数阶系统 (1) 的稳定性. 当 α 不为整数时, s^α 为多值函数, 本文取其主分支函数, 即要求 $\text{Arg}(s) \in (-\pi, \pi]$.

引理 1. 当 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, 如果 $F(j\omega) = a_n (j\omega)^{\alpha_n} + a_{n-1} (j\omega)^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 (j\omega)^{\alpha_1} + a_0$ 的相角增量为 $\frac{\alpha_n \pi}{2}$, 则分数阶系统 (1) 是稳定的.

引理 2. 如果定义满足 $\frac{q\pi}{2} < |\arg(\lambda_i)| \leq \pi$ 的 λ_i 为分数阶系统稳定的极点, $|\arg(\lambda_i)| \leq \frac{q\pi}{2}$ 为分数阶系统不稳定的极点. 设分数阶系统 (1) 不稳定的极点个数为 $r (0 \leq r \leq \gamma_n)$, 那么当 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, $F(j\omega) = a_n (j\omega)^{\alpha_n} + a_{n-1} (j\omega)^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 (j\omega)^{\alpha_1} + a_0$ 的相角增量为 $\frac{\alpha_n \pi}{2} - r\pi$.

引理 1 和引理 2 的证明如下:

证明. 因为式 (4) 是一个实系数的多项式, 所以特征根为实数或者成对的共轭复数, 分布在实轴上或者关于实轴对称.

令 $s = j\omega$, 则 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, $s^q = (j\omega)^q$ 映射到关于 w 的复平面上是一条与 w 正实轴夹角

为 $\frac{q\pi}{2}$ 的射线 L .

如果 λ_i 在负实轴上 (图 1 中的点 A), 则当 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, $(j\omega)^q - \lambda_i$ 逆时针变化 $\frac{q\pi}{2}$, 相角增量为 $\frac{q\pi}{2}$; 如果 λ_i 在正实轴上 (图 1 中的点 B), 则 $(j\omega)^q - \lambda_i$ 顺时针变化 $\pi - \frac{q\pi}{2}$, 相角增量为 $\frac{q\pi}{2} - \pi$.

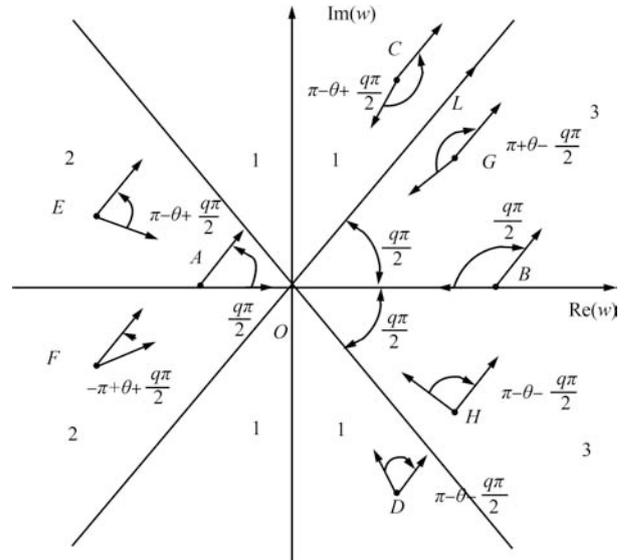


图 1 $F(w)$ 的特征根分布与角度变化关系

Fig. 1 The relationship between the distribution of the characteristic roots and the angle increments for $F(w)$

如果 $F(w)$ 有一组共轭复数根 λ_i, λ_{i+1} , 并且设 $(j\omega)^q - \lambda_i$ 的起始角度为 θ , 则 $(j\omega)^q - \lambda_{i+1}$ 的起始角度为 $-\theta$. 假设 λ_i, λ_{i+1} 在稳定区域 1 内 (图 1 中的点 C 和点 D), 则 $\frac{q\pi}{2} < \theta \leq \pi - \frac{q\pi}{2}$, 当 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, $(j\omega)^q - \lambda_i$ 逆时针变化为 $\pi - \theta + \frac{q\pi}{2}$, 相角增量为 $\pi - \theta + \frac{q\pi}{2}$; $(j\omega)^q - \lambda_{i+1}$ 顺时针变化 $\pi - \theta - \frac{q\pi}{2}$, 相角增量为 $-\pi + \theta + \frac{q\pi}{2}$, 所以 $[(j\omega)^q - \lambda_i][(j\omega)^q - \lambda_{i+1}]$ 的相角增量为 $q\pi$. 由于 $(j\omega)^q - \lambda_i$ 和 $(j\omega)^q - \lambda_{i+1}$ 相角的变化方向是相反的, 所以 $[(j\omega)^q - \lambda_i][(j\omega)^q - \lambda_{i+1}]$ 相角增量可能在某一个 ω 处大于 $q\pi$.

同理分析, 可以得到区域 2 和区域 3 内 $[(j\omega)^q - \lambda_i][(j\omega)^q - \lambda_{i+1}]$ 的相角增量.

假设 λ_i, λ_{i+1} 在稳定区域 2 内 (图 1 中的点 E 和点 F), 则 $[(j\omega)^q - \lambda_i][(j\omega)^q - \lambda_{i+1}]$ 的相角增量为 $q\pi$.

当 λ_i, λ_{i+1} 位于不稳定区域 3 (图 1 中的点 G 和点 H), 则 $[(j\omega)^q - \lambda_i][(j\omega)^q - \lambda_{i+1}]$ 的相角增量为 $q\pi - 2\pi$.

如果 λ_i, λ_{i+1} 位于射线 L 上, 即 $\theta = \frac{q\pi}{2}$, 那么 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, 相角增量仍然是 $q\pi - 2\pi$.

如果令 $\frac{q\pi}{2} < |\arg(\lambda_i)| \leq \pi$ 中 λ_i 的个数为 l , 代表稳定的极点个数, $|\arg(\lambda_i)| \leq \frac{q\pi}{2}$ 的 λ_i 个数为

r , 代表不稳定极点的个数, 且 $l + r = \gamma_n$, 当 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, $F(j\omega) = a_n(j\omega)^{\alpha_n} + a_{n-1}(j\omega)^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1(j\omega)^{\alpha_1} + a_0 = a_n \prod_{i=1}^{\gamma_n} [(j\omega)^q - \lambda_i]$ 的相角增量为 $l\frac{q\pi}{2} + r(\frac{q\pi}{2} - \pi) = \frac{\gamma_n q \pi}{2} - r\pi = \frac{\alpha_n \pi}{2} - r\pi$.

如果分数阶系统 (1) 是稳定的, 即满足 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2}$, 也就是 $r = 0$, 那么 $F(j\omega) = a_n(j\omega)^{\alpha_n} + a_{n-1}(j\omega)^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1(j\omega)^{\alpha_1} + a_0 = a_n \prod_{i=1}^{\gamma_n} [(j\omega)^q - \lambda_i]$ 的相角增量为 $\frac{\alpha_n \pi}{2}$, 所以引理 1 是引理 2 的一种特殊情况. \square

注 1. 如果常数项 $a_0 = 0$, 那么分数阶系统 (1) 在 w 平面的原点处至少有一个极点, 系统 (1) 是不稳定的.

对于整数阶线性系统, 可以利用 Hermite-Biehler 定理来判断系统的稳定性. 根据 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时的特征多项式相角变化关系, 提出了一种根据实部方程和虚部方程解的关系来判断系统稳定性的准则.

Hermite-Biehler 定理^[18]. 假设 $F(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n$ 为 n 阶实系数多项式, $F(s) = \delta_e(s) + s\delta_o(s)$, 其中, $\delta_e(s)$ 和 $s\delta_o(s)$ 分别由 $F(s)$ 的偶数次项和奇数次项构成. 设 $\omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \dots$ 和 $\omega_{o_1}, \omega_{o_2}, \dots$ 分别是按照从小到大的顺序排列的函数 $\delta_e(-\omega^2)$ 和函数 $\delta_o(-\omega^2)$ 的正实数根, 如果 $F(s)$ 是 Hurwitz 稳定的, 则 $\delta_e(-\omega^2)$ 和 $\delta_o(-\omega^2)$ 的所有根都是实的, 没有重根且满足:

- 1) $0 < \omega_{e_1} < \omega_{o_1} < \omega_{e_2} < \omega_{o_2} < \dots$;
- 2) 多项式系数 δ_n 和 δ_{n-1} 同号.

下面给出类似于 Hermite-Biehler 定理的定理 1, 来判别分数阶系统的稳定性.

定理 1. 设 $F(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0$, 设 $\rho = [\alpha_n] - \alpha_n, [\alpha_n]$ 为大于或等于 α_n 的最小整数, 令 $F(j\omega)e^{\frac{\rho\pi}{2}j} = R(\omega) + jI(\omega)$, 其中 $R(\omega)$ 和 $I(\omega)$ 的表达式如下

$$R(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \omega^{\alpha_i} \cos\left(\frac{\alpha_i \pi + \rho \pi}{2}\right) + a_0 \cos\left(\frac{\rho \pi}{2}\right) \tag{5}$$

$$I(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \omega^{\alpha_i} \sin\left(\frac{\alpha_i \pi + \rho \pi}{2}\right) + a_0 \sin\left(\frac{\rho \pi}{2}\right) \tag{6}$$

记 ω_{R_i} 和 ω_{I_i} 分别为 $R(\omega) = 0$ 和 $I(\omega) = 0$ 的正实数解. 设 W 为 ω_{R_i} 和 ω_{I_i} 的个数之和. 如果 $r = 0$, 也就是分数阶系统 (1) 是稳定的, 那么应满足以下条件:

1) 当 $W = [\alpha_n] - 1$ 时, 如果 $\alpha_n \notin \mathbf{Z}^+$, W 为奇数, 则需要满足 $0 < \omega_{R_1} < \omega_{I_1} < \omega_{R_2} < \omega_{I_2} < \dots < \omega_{R_{\frac{W+1}{2}}} < +\infty$; W 为偶数, 则需要满足 $0 < \omega_{R_1} < \omega_{I_1} < \omega_{R_2} < \omega_{I_2} < \dots < \omega_{R_{\frac{W}{2}}} <$

$\omega_{I_{\frac{W}{2}}} < +\infty$. 如果 $\alpha_n \in \mathbf{Z}^+$, 除了需满足上述条件, 还需满足 $a_n a_{n-1} > 0$.

2) 当 $W = [\alpha_n]$ 时, W 为奇数, 则需满足 $0 < \omega_{R_1} < \omega_{I_1} < \omega_{R_2} < \omega_{I_2} < \dots < \omega_{R_{\frac{W+1}{2}}} < +\infty$. W 为偶数, 则需满足 $0 < \omega_{R_1} < \omega_{I_1} < \omega_{R_2} < \omega_{I_2} < \dots < \omega_{R_{\frac{W}{2}}} < \omega_{I_{\frac{W}{2}}} < +\infty$.

证明. 因为 $a_0 \neq 0$, 将式 (2) 两边除以系数 a_0 不会改变系统 (1) 的稳定性和 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时 $F(j\omega)$ 的相角增量, 设 $H(s) = \frac{F(s)}{a_0} = c_n s^{\alpha_n} + c_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + c_1 s^{\alpha_1} + 1$, 其中 $c_i = \frac{a_i}{a_0} (i = 1, 2, \dots, n)$.

令 $s = j\omega$, 则有

$$H(j\omega) = \sum_{i=1}^n c_i (j\omega)^{\alpha_i} + 1 \tag{7}$$

根据引理 1 可知, 如果分数阶系统 (1) 稳定, 则当 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, $H(j\omega)$ 相角增量为 $\frac{\alpha_n \pi}{2}$.

若取 $\rho = [\alpha_n] - \alpha_n$, 其中 $\rho \in [0, 1)$, 则令 $L(j\omega) = H(j\omega)e^{\frac{\rho\pi}{2}j}$, 那么有初始角 $\arg[L(j0)] = \frac{\rho\pi}{2}$, $L(j0)$ 位于第一象限或者正实轴上, 终止角 $\arg[L(+j\infty)] = \frac{[\alpha_n]\pi}{2}$, 点 $L(+j\infty)$ 落在实轴或者虚轴上. 根据引理 2 可知, 如果不稳定的极点个数为 r , 那么有 $\arg[L(+j\infty)] = \frac{[\alpha_n]\pi}{2} - r\pi$.

根据欧拉公式 $e^{xj} = \cos(x) + \sin(x)j$, 有 $(j\omega)^{\alpha_i} = \omega^{\alpha_i} e^{\frac{\alpha_i \pi}{2}j} = \omega^{\alpha_i} [\cos(\frac{\alpha_i \pi}{2}) + \sin(\frac{\alpha_i \pi}{2})j]$, 那么

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \\ H(j\omega)e^{\frac{\rho\pi}{2}j} &= \\ \left[\sum_{i=1}^n c_i (j\omega)^{\alpha_i} + 1 \right] e^{\frac{\rho\pi}{2}j} &= \\ \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \omega^{\alpha_i} \left[\cos\left(\frac{\alpha_i \pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha_i \pi}{2}\right)j \right] \left[\cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\rho\pi}{2}\right)j \right] \right\} + \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\rho\pi}{2}\right)j &= \\ \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \omega^{\alpha_i} \left[\cos\left(\frac{\alpha_i \pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha_i \pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \right] + \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \right\} + & \\ \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \omega^{\alpha_i} \left[\cos\left(\frac{\alpha_i \pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha_i \pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \right] \right\} j &= \\ \left[\sum_{i=1}^n c_i \omega^{\alpha_i} \cos\left(\frac{\alpha_i \pi + \rho\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \right] + & \\ \left[\sum_{i=1}^n c_i \omega^{\alpha_i} \sin\left(\frac{\alpha_i \pi + \rho\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \right] j & \end{aligned} \tag{8}$$

$$X(\omega) = \operatorname{Re}[L(j\omega)] = \sum_{i=1}^n c_i \omega^{\alpha_i} \cos\left(\frac{\alpha_i \pi + \rho \pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\rho \pi}{2}\right) \quad (9)$$

$$Y(\omega) = \operatorname{Im}[L(j\omega)] = \sum_{i=1}^n c_i \omega^{\alpha_i} \sin\left(\frac{\alpha_i \pi + \rho \pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\rho \pi}{2}\right) \quad (10)$$

注 2. 当 $i = n$ 时, 有

$$\cos\left(\frac{\alpha_n \pi + \rho \pi}{2}\right) = \cos\frac{[\alpha_n] \pi}{2} = \begin{cases} \pm 1, & [\alpha_n] \text{ 为偶数} \\ 0, & [\alpha_n] \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (11)$$

$$\sin\left(\frac{\alpha_n \pi + \rho \pi}{2}\right) = \sin\frac{[\alpha_n] \pi}{2} = \begin{cases} 0, & [\alpha_n] \text{ 为偶数} \\ \pm 1, & [\alpha_n] \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (12)$$

所以无论 α_n 取何值, $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 中关于 ω 最高阶次项 ω^{α_n} 的系数必有一个为零.

记 ω_{X_i} 和 ω_{Y_i} 分别是 $X(\omega) = 0$ 和 $Y(\omega) = 0$ 的正实数解. W 为 ω_{X_i} 和 ω_{Y_i} 个数之和. 先不考虑 λ_i 在射线 L 上, 下面分情况讨论.

情况 1. $0 < \alpha_n < 1$, $\arg[L(+j\infty)] = \frac{[\alpha_n] \pi}{2} - r\pi = \frac{\pi}{2} - r\pi$. 当 $r = 0, 1, 2$ 时, $L(j\omega)$ 相角变化如图 2(a) 所示. 如果 $r = 0$, 那么当 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, $L(j\omega)$ 不会穿越 x 轴, $Y(\omega) = 0$ 没有正实解. $X(\omega) = 0$ 没有正实解时, $W = [\alpha_n] - 1 = 0$. 当 $X(\omega) = 0$ 有一个正实数解 ω_{X_1} 时, 有 $0 < \omega_{X_1} < +\infty$, $W = [\alpha_n] = 1$. 如果 $r \geq 1$, 那么 $L(j\omega)$ 将首先穿越 x 轴, $Y(\omega) = 0$ 有正实解, 有 $0 < \omega_{Y_1} < \omega_{X_1} < \dots$.

情况 2. $1 < \alpha_n < 2$, $\arg[L(+j\infty)] = \frac{[\alpha_n] \pi}{2} - r\pi = \pi - r\pi$. 当 $r = 0, 1, 2$ 时, $L(j\omega)$ 相角变化如图 2(b) 所示. 如果 $r = 0$, 那么当 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, $L(j\omega)$ 首先会穿越 y 轴, $X(\omega) = 0$ 有一个正实解 ω_{X_1} . $Y(\omega) = 0$ 没有正实解时, 有 $0 < \omega_{X_1} < +\infty$, $W = [\alpha_n] - 1 = 1$. $Y(\omega) = 0$ 有一个正实解 ω_{Y_1} 时, 有 $0 < \omega_{X_1} < \omega_{Y_1} < +\infty$, $W = [\alpha_n] = 2$. 当 $r \geq 1$ 时, 那么 $L(j\omega)$ 不会首先穿越 y 轴, 有 $0 < \omega_{Y_1} < \omega_{X_1} < \dots$.

情况 3. $2 < \alpha_n < 3$, $\arg[L(+j\infty)] = \frac{[\alpha_n] \pi}{2} - r\pi = \frac{3\pi}{2} - r\pi$. 当 $r = 0, 1, 2$ 时, $L(j\omega)$ 相角变化如图 2(c) 所示.

情况 4. $3 < \alpha_n < 4$, $\arg[L(+\infty)] = \frac{[\alpha_n] \pi}{2} - r\pi = 2\pi - r\pi$. 当 $r = 0, 1, 2$ 时, $L(j\omega)$ 相角变化如图 2(d) 所示.

情况 3 与情况 4 的分析过程和情况 1 与情况 2 类似, 这里省略.

情况 5. 当 $\alpha_n = 1$ 时, $\arg[L(+j\infty)] = \frac{[\alpha_n] \pi}{2} - r\pi = \frac{\pi}{2} - r\pi$. 当 $r = 0, 1, 2$ 时, $L(j\omega)$ 相角变化如图 2(e) 所示. 如果 $r = 0$, 当 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, 对应曲线 1, $L(j\omega)$ 穿越 y 轴一次, 有 $0 < \omega_{X_1} < +\infty$, $W = [\alpha_n] = 1$. 如果对应曲线 2 或者 $r = 1$ 对应的曲线, $L(j\omega)$ 都不会穿越 y 轴, $X(\omega) = 0$ 没有正实根, $Y(\omega) = 0$ 没有正实根, $W = [\alpha_n] - 1 = 0$, 所以分辨不出 r 是否为 0. 但是, 当 $\alpha_n = 1$ 时, 有

$$X(\omega) = c_{n-1} \cos\left(\frac{\alpha_{n-1} \pi}{2}\right) \omega^{\alpha_{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-2} c_i \omega^{\alpha_i} \cos\left(\frac{\alpha_i \pi}{2}\right) + 1 \quad (13)$$

$$Y(\omega) = c_n \omega + c_{n-1} \sin\left(\frac{\alpha_{n-1} \pi}{2}\right) \omega^{\alpha_{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-2} c_i \omega^{\alpha_i} \sin\left(\frac{\alpha_i \pi}{2}\right) \quad (14)$$

如果 $r = 0$, 则 $\omega \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\arg(L(+j\infty)) = \arctan\left(\frac{Y(+\infty)}{X(+\infty)}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{c_n}{c_{n-1} \cos\left(\frac{\alpha_{n-1} \pi}{2}\right)}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

所以 $\frac{c_n}{c_{n-1} \cos\left(\frac{\alpha_{n-1} \pi}{2}\right)} > 0$, 其中“sgn”为符号函数. 又因为 $0 < \frac{\alpha_{n-1} \pi}{2} < \frac{\pi}{2}$, 所以有 $c_n c_{n-1} > 0$.

如果 $r = 1$, 那么

$$\arg(L(+j\infty)) = \arctan\left(\frac{Y(+\infty)}{X(+\infty)}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{c_n}{c_{n-1} \cos\left(\frac{\alpha_{n-1} \pi}{2}\right)}\right) \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

则有 $c_n c_{n-1} < 0$.

情况 6. $\alpha_n = 2$.

情况 7. $\alpha_n = 3$.

情况 8. $\alpha_n = 4$.

对于情况 6 ~ 8, 如果要求 $r = 0$, 除了要分别满足情况 2 ~ 4 的约束外, 还需要满足 $c_n c_{n-1} > 0$. 证明过程和情况 5 一样, 这里省略.

情况 9. $\alpha_n > 4$, 设 $\alpha_n = 4k + \chi_n$, 其中 $k \in \mathbf{Z}^+$, $\chi_n \in (0, 4]$. 如果 $r = 0$, 当 $\omega = 0 \rightarrow +\infty$ 时, $L(j\omega)$

的相图相当于 $\alpha_n = \chi_n$ 时的相图再逆时针绕原点旋转 k 圈, 依次与 x 轴和 y 轴相交 $2k$ 次, $X(\omega) = 0$ 和 $Y(\omega) = 0$ 交错地各自增加两个正实数根.

如果 λ_i 在 L 上, 当 $\omega = \omega_{\lambda_i} = -(\lambda_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}j$ 时, 向量 $(j\omega_{\lambda_i})^{\alpha_i} - \lambda_i$ 角度是不确定的, $L(j\omega)$ 将穿越原点, 存在 $\omega = \omega_{\lambda_i}$ 使得 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 同时为 0, 即 $\omega_{X_i} = \omega_{Y_i} = \omega_{\lambda_i}$.

通过上面的分析可知, 如果 $r = 0$, 分数阶系统 (1) 稳定, 则需满足:

1) 当 $W = [\alpha_n] - 1$ 时, 如果 $\alpha_n \notin \mathbf{Z}^+$, 且 W 为奇数, 则需满足 $0 < \omega_{X_1} < \omega_{Y_1} < \omega_{X_2} < \omega_{Y_2} < \dots < \omega_{X_{\frac{W+1}{2}}} < +\infty$; W 为偶数, 则需满足 $0 < \omega_{X_1} < \omega_{Y_1} < \omega_{X_2} < \omega_{Y_2} < \dots < \omega_{X_{\frac{W}{2}}} < \omega_{Y_{\frac{W}{2}}} < +\infty$. 如果 $\alpha_n \in \mathbf{Z}^+$, 除了满足上述条件外, 还需满足 $c_n c_{n-1} > 0$.

2) 当 $W = [\alpha_n]$ 时, W 为奇数, 则需满足 $0 < \omega_{X_1} < \omega_{Y_1} < \omega_{X_2} < \omega_{Y_2} < \dots < \omega_{X_{\frac{W+1}{2}}} < +\infty$; W 为偶数, 则需满足 $0 < \omega_{X_1} < \omega_{Y_1} < \omega_{X_2} < \omega_{Y_2} < \dots < \omega_{X_{\frac{W}{2}}} < \omega_{Y_{\frac{W}{2}}} < +\infty$.

因为 $a_0 \neq 0$, 所以有 $c_n c_{n-1} = \frac{a_n a_{n-1}}{a_0^2}$, 同时考虑到 $a_0 L(j\omega) = F(j\omega)e^{\frac{\rho\pi}{2}j} = R(\omega) + jI(\omega)$, 且 $L(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$, 所以有

$$R(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \omega^{\alpha_i} \cos\left(\frac{\alpha_i \pi + \rho \pi}{2}\right) + a_0 \cos\left(\frac{\rho \pi}{2}\right)$$

$$I(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \omega^{\alpha_i} \sin\left(\frac{\alpha_i \pi + \rho \pi}{2}\right) + a_0 \sin\left(\frac{\rho \pi}{2}\right)$$

也就是 $R(\omega) = a_0 X(\omega)$ 和 $I(\omega) = a_0 Y(\omega)$. 因此 $R(\omega) = 0$ 和 $I(\omega) = 0$ 的正实数解与 $X(\omega) = 0$ 和 $Y(\omega) = 0$ 正实数解完全一样, 即 $\omega_{X_i} = \omega_{R_i}$, $\omega_{Y_i} = \omega_{I_i}$, 且 $a_n a_{n-1}$ 的符号与 $c_n c_{n-1}$ 也完全一样. \square

注 3. 如果 $\alpha_i \in \mathbf{Z}^+ (i = 1, 2, \dots, n)$, 那么 $\rho = 0$ 和 $W = [\alpha_n] - 1$, 定理 1 就变成判断整数阶系统稳定性条件的 Hermite-Biehler 定理. 也就是说, Hermite-Biehler 定理是定理 1 的特殊情况.

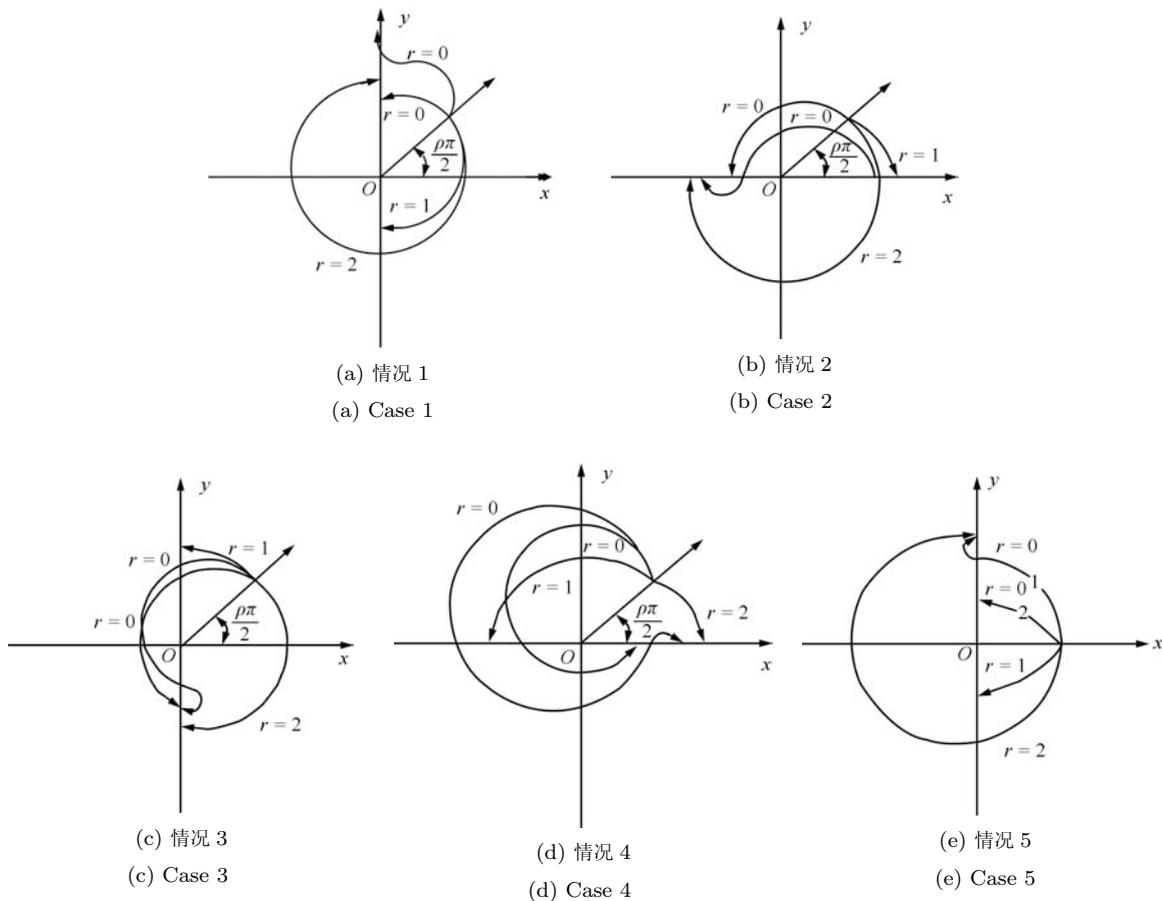


图 2 当 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, $L(j\omega)$ 的相图
 Fig. 2 The phase diagrams of $L(j\omega)$ when ω increases from 0 to $+\infty$

3 数值算例

算例 1.

$$G_1(s) = \frac{1}{s^{1.5} + as + bs^{0.5} + c}$$

其中, $\rho = [1.5] - 1.5 = 0.5, \gamma_n = 3$, 那么

$$R_1(\omega) = -\omega^{1.5} - \frac{\sqrt{2}}{2}a\omega + c \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$I_1(\omega) = a \frac{\sqrt{2}}{2}\omega + b\omega^{0.5} + c \frac{\sqrt{2}}{2}$$

如果 $G_1(s)$ 稳定, 方程 $R_1(\omega) = 0$ 有一个正实数根 ω_{R_1} , 方程 $I_1(\omega) = 0$ 没有正实数根或者有一个正实数根 ω_{I_1} , 且满足 $0 < \omega_{R_1} < \omega_{I_1} < +\infty$. 当 a, b, c 取不同组数值时, 系统 $G_1(s)$ 稳定情况如表 1 所示.

当 a, b, c 取表 1 的 6 种情况时, $G_1(s)$ 的单位阶跃响应曲线如图 3 所示. 从图 3 的阶跃响应可以看出, 根据定理 1 得到的分数系统稳定条件是正确的. 也就是说, 如果分数阶系统 $G_1(s)$ 稳定, 方程 $R_1(\omega) = 0$ 的最小的正实数解一定要比方程 $I_1(\omega) = 0$ 的正实数解小, 两个方程解的总数等于 $W = [1.5] = 2$ 或者 $W = [1.5] - 1 = 1$. 如果方程 $R_1(\omega) = 0$ 和 $I_1(\omega) = 0$ 有相同的根, 则系统处于临

界稳定情况 (不稳定的一种情况), 如图 3 (b) 所示的情况.

表 1 参数 a, b, c 的取值与分数阶系统 $G_1(s)$ 稳定性关系
Table 1 The relationship between the parameters a, b, c and the stability of the fractional order system $G_1(s)$

序号	(a, b, c)	ω_{R_i}	ω_{I_i}	稳定
1	(5, 9, 5)	0.79834	—	是
2	(-1, 3, 5)	3.2375	27.076	是
3	(-1, 0, 2)	2	2	否 (临界稳定)
4	(2, -1, -2)	—	2	否
5	(-5, 9, 5)	14.309	8.3608	否
6	(-5, 9, -5)	1.5411, 10.161	0.23560, 4.2446	否

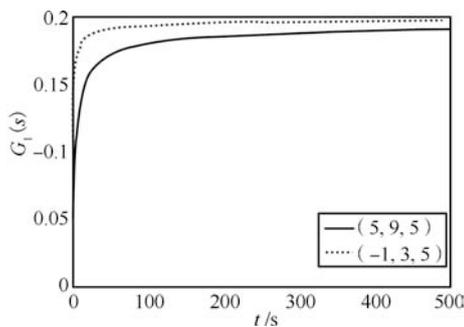
(注: 表 1 中, “—” 表示正实数解不存在.)

上面分析了 $\alpha_n \notin \mathbf{Z}^+$ 时的情况, 可以看出, 即使系数符号不相同, 分数阶系统仍然是稳定的, 这恰恰是与整数阶系统不同之处. 下面考虑当 $\alpha_n \in \mathbf{Z}^+$ 时系统稳定与参数的关系.

算例 2.

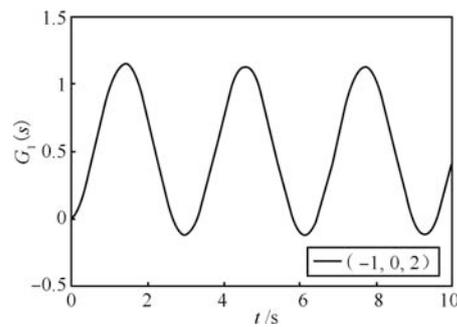
$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + as^{\frac{4}{3}} + bs^{\frac{2}{3}} + c}$$

其中, $\rho = 0, q = \frac{2}{3}, \gamma_n = 3$, 那么



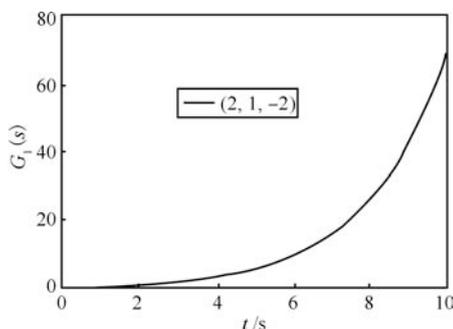
(a) 组 1 和组 2 的单位阶跃响应

(a) Unit step responses in No. 1 and No. 2



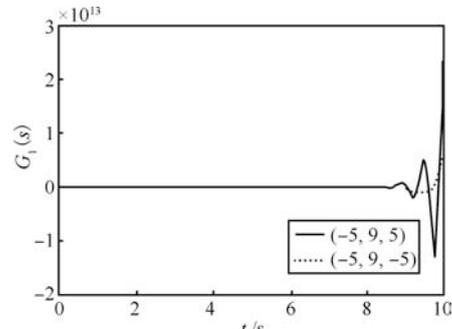
(b) 组 3 的单位阶跃响应

(b) Unit step response in No. 3



(c) 组 4 的单位阶跃响应

(c) Unit step response in No. 4



(d) 组 5 和组 6 的单位阶跃响应

(d) Unit step responses in No. 5 and No. 6

图 3 分数阶系统 $G_1(s)$ 的单位阶跃响应

Fig. 3 The unit step responses of the fractional order system $G_1(s)$

$$R_2(\omega) = -\omega^2 - \frac{1}{2}a\omega^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}b\omega^{\frac{2}{3}} + c$$

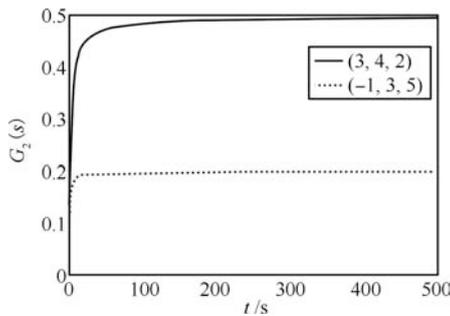
$$I_2(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2}a\omega^{\frac{4}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}b\omega^{\frac{2}{3}}$$

根据定理 1, 如果分数阶系统 $G_2(s)$ 稳定, 方程 $R_2(\omega) = 0$ 有一个正实数根 ω_{R_1} , 方程 $I_2(\omega) = 0$ 没有正实数根或者有一个正实数根 ω_{I_1} , 且满足 $0 < \omega_{R_1} < \omega_{I_1} < +\infty$. 当 $W = [2] - 1 = 1$ 时, 还需要满足 $a_n a_{n-1} > 0$. 当 a, b, c 取不同参数时, 系统 $G_2(s)$ 稳定性情况如表 2 所示.

表 2 参数 a, b, c 的取值与分数阶系统 $G_2(s)$ 稳定性关系
Table 2 The relationship between the parameters a, b, c and the stability of the fractional order system $G_2(s)$

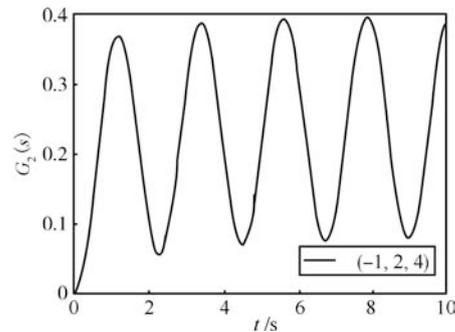
序号	(a, b, c)	ω_{R_i}	ω_{I_i}	稳定
1	(3, 4, 2)	1.4495	—	是
2	(-1, 3, 5)	3.2779	5.1962	是
3	(-1, 2, 4)	2.8284	2.8284	否 (临界稳定)
4	(1, 0, -2)	—	—	否
5	(-5, -1, 5)	4.9805	—	否
6	(-3, 3, 7)	4.8656	1	否
7	(-5, 9, -5)	1, 6.5479	3.2631	否

(注: 表 2 中, “—” 表示正实数解不存在.)



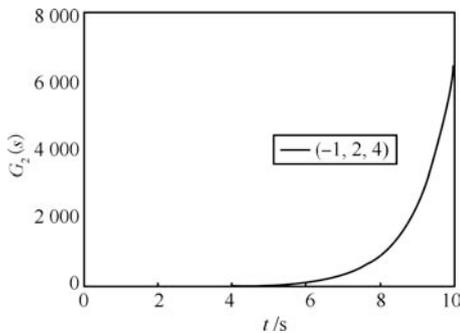
(a) 组 1 和组 2 的单位阶跃响应

(a) Unit step responses in No. 1 and No. 2



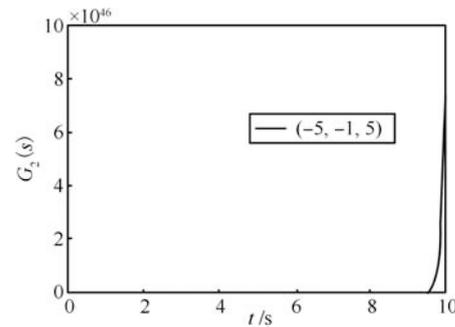
(b) 组 3 的单位阶跃响应

(b) Unit step response in No. 3



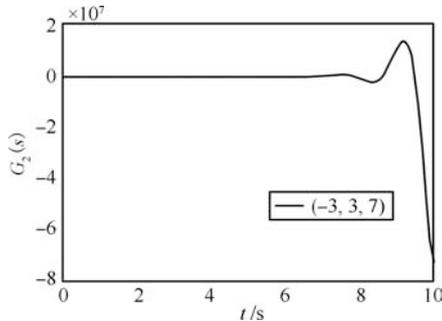
(c) 组 4 的单位阶跃响应

(c) Unit step response in No. 4



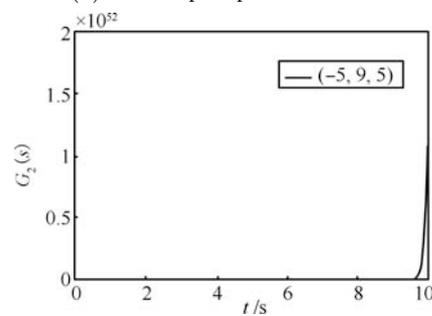
(d) 组 5 的单位阶跃响应

(d) Unit step response in No. 5



(e) 组 6 的单位阶跃响应

(e) Unit step response in No. 6



(f) 组 7 的单位阶跃响应

(f) Unit step response in No. 7

图 4 分数阶系统 $G_2(s)$ 的单位阶跃响应

Fig. 4 The unit step responses of the fractional order system $G_2(s)$

当 a, b, c 取表 2 中 7 种情况时, 分数阶系统 $G_2(s)$ 的单位阶跃响应如图 4 所示. 图 4(a) 和图 4(d) 说明, 如果 $W = [2] = 2$ 且 $0 < \omega_{R_1} < \omega_{I_1} < +\infty$ 或者 $0 < \omega_{R_1} < +\infty$, 那么 $G_2(s)$ 是稳定的. 但是如果 $W = [2] - 1 = 1$ 时, 那么系统还需满足 $a > 0$, 否则即使满足 $0 < \omega_{R_1} < +\infty$, 那么系统 $G_2(s)$ 仍然不是稳定的.

4 结 论

本文提出了一种线性分数阶系统的频域稳定判别方法. 定义了关于分数阶系统分母系数的两个函数 $R(\omega) = 0$ 和 $I(\omega) = 0$, 通过分析两个方程解与分母的最高阶数 α_n 的关系, 给出了分数阶系统的稳定性条件. 如果分数阶系统分母各个项的阶数都取整数, 那么本文给出的定理就变为 Hermite-Biehler 定理, 对于整数阶系统仍然成立, 所以本文提出的判断准则将用于整数阶系统频域稳定判别准则的 Hermite-Biehler 定理推广到分数阶系统稳定性的判定.

References

- Machado J T, Kiryakova V, Mainardi F. Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, **16**(3): 1140–1153
- Gabano J D, Poinot T. Fractional modelling and identification of thermal systems. *Signal Processing*, 2011, **91**(3): 531–541
- Chen Y Q, Petras I, Xue D Y. Fractional control—a tutorial. In: *Proceedings of the American Control Conference*. St. Louis, USA: IEEE, 2009. 1397–1410
- Podlubny I. Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers. *IEEE Transactrans on Automatic Control*, 1999, **44**(1): 208–214
- Chen Y Q, Vinagre B M. A new IIR-type digital fractional order differentiator. *Signal Processing*, 2003, **83**(11): 2359–2365
- Tavazoei M S, Haeri M. A note on the stability of fractional order systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2009, **79**(5): 1566–1576
- Chen Y Q, Ahn H S, Podlubny I. Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties. *Signal Processing*, 2006, **86**(10): 2611–2618
- Lu J G, Chen Y Q. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems with the fractional order: the $0 < \alpha < 1$ case. *IEEE Transactrans on Automatic Control*, 2010, **55**(1): 152–158
- Ahn H S, Chen Y Q, Podlubny I. Robust stability test of a class of linear time-invariant interval fractional-order system using Lyapunov inequality. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **187**(1): 27–34

- Balochian S, Sedigh A K, Zafer A. Stabilization of multi-input hybrid fractional-order systems with state delay. *ISA Transactions*, 2011, **50**(1): 21–27
- Wang Zhen-Bin, Cao Guang-Yi, Zhu Xin-Jian. Stability conditions and criteria for fractional order linear time-invariant systems. *Control Theory and Application*, 2004, **21**(6): 922–926
(王振滨, 曹广益, 朱新坚. 分数阶线性定常系统的稳定性条件及其判据. *控制理论与应用*, 2004, **21**(6): 922–926)
- Ho M T, Datta A, Bhattacharyya S P. A generalization of the Hermite-Biehler theorem. In: *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control*. New Orleans, USA: IEEE, 1995. 130–131
- Roy A, Iqbal K. PID controller tuning for the first-order-plus-dead-time process model via Hermite-Biehler theorem. *ISA Transactions*, 2005, **44**(3): 363–378
- Fang B. Computation of stabilizing PID gain regions based on the inverse Nyquist plot. *Journal of Process Control*, 2010, **20**(10): 1183–1187
- Ho M T. Synthesis of H_{∞} PID controllers: a parametric approach. *Automatica*, 2003, **39**(6): 1069–1075
- Das S. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Berlin: Springer, 2008. 26–33
- Wang Zhen-Bin, Cao Guang-Yi, Zhu Xin-Jian. Research on the internal and external stability of fractional order linear systems. *Control and Decision*, 2004, **19**(10): 1171–1174
(王振滨, 曹广益, 朱新坚. 分数阶线性系统的内部和外部稳定性研究. *控制与决策*, 2004, **19**(10): 1171–1174)
- Ho M T, Datta A, Bhattacharyya S P. Generalizations of the Hermite-Biehler theorem: the complex case. *Linear Algebra and Its Applications*, 2000, **320**(1–3): 23–26



高 哲 北京理工大学自动化学院博士研究生. 2008 年获东北大学硕士学位. 主要研究方向为分数阶系统与智能优化方法. 本文通信作者.

E-mail: gaozhe2@yahoo.cn

(GAO Zhe Ph.D. candidate at the School of Automation, Beijing Institute of Technology. He received his master

degree from Northeastern University in 2008. His research interest covers fractional order systems and intelligent optimization. Corresponding author of this paper.)



廖晓钟 北京理工大学自动化学院教授. 主要研究方向为运动控制, 电力电子技术, 绿色能源变换与控制技术.

E-mail: liaoxiaozhong@bit.edu.cn

(LIAO Xiao-Zhong Professor at the School of Automation, Beijing Institute of Technology. Her research interest covers power electronics, motor

drive, and energy converter and control.)