

概率假设密度高斯混合实现的分量删减

闫小喜¹ 韩崇昭¹

摘要 针对概率假设密度 (Probability hypothesis density, PHD) 高斯混合实现算法中的分量删减问题, 提出了基于 Dirichlet 分布的分量删减算法以改进概率假设密度高斯混合实现算法的性能. 算法采用极大后验准则估计混合参数, 采用仅依赖于混合权重的负指数 Dirichlet 分布作为混合参数的先验分布, 利用拉格朗日乘子推导了混合权重的更新公式. 算法利用负指数 Dirichlet 分布的不稳定性, 在极大后验迭代过程中驱使与目标强度不相关的分量消亡. 该不稳定性还能够解决多个相近分量共同描述一个强度峰值的问题, 有利于后续多目标状态的提取. 仿真结果表明, 基于 Dirichlet 分布的分量删减算法优于典型高斯混合实现中的删减算法.

关键词 概率假设密度, 高斯混合实现, 分量删减, Dirichlet 分布, 极大后验

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01313

Component Pruning in Gaussian Mixture Implementation of Probability Hypothesis Density

YAN Xiao-Xi¹ HAN Chong-Zhao¹

Abstract As far as component pruning in Gaussian mixture (GM) implementation of probability hypothesis density (PHD) is concerned, a component pruning algorithm based on Dirichlet distribution is proposed to improve the performance of Gaussian mixture implementation of probability hypothesis density. The maximum a posteriori criterion is adopted for estimation of mixing parameters. Dirichlet distribution with negative exponent parameters, which only depends on mixing weights, is adopted as the prior distribution of mixing parameters. The update formulation of mixing weight is derived by Lagrange multiplier. The instability of Dirichlet distribution with negative exponent parameters is applied to driving the components irrelevant with target intensity to extinction during the maximum a posteriori iteration. Besides, the problem that one peak of intensity is presented by several proximate mixing component, can be solved by this instability. It is useful for the following state extraction. Simulation results show that the component pruning algorithm based on Dirichlet distribution is superior to that of typical Gaussian mixture implementation.

Key words Probability hypothesis density (PHD), Gaussian mixture implementation, component pruning, Dirichlet distribution, maximum a posteriori (MAP)

多目标跟踪是研究从目标量测和杂波构成的量测集合中估计目标数目与多目标状态的方法. 研究人员已经开发出了许多的多目标跟踪算法, 近期有关各种多目标跟踪算法的综述和分析可以参考文献 [1]. 到目前为止, 已有的多目标跟踪算法大部分是

基于数据关联思想的, 需要建立量测和目标的对应关系^[2]. 基于数据关联的多目标跟踪算法, 以分散角度看待多目标跟踪问题, 在每个目标与量测对应关系的基础上, 把多目标跟踪归结为多个单目标跟踪. 然而, 数据关联本身就是很复杂的问题, 以至于基于数据关联的多目标跟踪算法会变得更困难而难以解决. 从算法逻辑的角度看, 数据关联对于多目标跟踪来说可能是不必要的, 因为在解决一个困难的问题时没有必要再引入一个更困难的问题. 从集值估计的整体角度而不是从分散角度重新认识多目标跟踪问题, 为我们提供了一种在无需数据关联情况下解决多目标跟踪问题的可能. 虽然点过程理论被公认为解决无数据关联情况下多目标跟踪问题的数学基础^[3], 但是一直没有形成系统的、严密的算法, 直到 Mahler 利用随机有限集统计量的数学工具提出了概率假设密度 (Probability hypothesis density, PHD) 滤波器^[4-5]. PHD 是一个“单密度”, 把定义在多目标状态空间上的多目标后验密度映射到定义

收稿日期 2010-12-01 录用日期 2011-07-01
Manuscript received December 1, 2010; accepted July 1, 2011
国家重点基础研究发展计划 (973 计划)(2007CB311006), 国家自然科学基金创新研究群体科学基金 (60921003), 国家自然科学基金 (61074176) 资助

Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2007CB311006), Foundation for Innovative Research Groups of National Natural Science Foundation of China (60921003), and National Natural Science Foundation of China (61074176)

1. 西安交通大学电子与信息工程学院综合自动化研究所智能网络与网络安全教育部重点实验室、机械制造系统工程国家重点实验室 西安 710049

1. Ministry of Education Key Laboratory for Intelligent Networks and Network Security and State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Institute of Integrated Automation, School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049

在单目标状态空间上的单密度, 而且在单目标状态空间指定区域的积分为该区域的期望目标数. 从统计量的角度看, PHD 是多目标概率密度的一阶矩, 在每个真实目标状态附近取得峰值. PHD 滤波器完全实现了无数据关联的多目标跟踪, 把分散观点下的目标初始、目标跟踪和目标消亡的三个阶段无缝地合为一个整体而不必对跟踪过程的各个阶段进行判断. 最近有一种从位空间角度对 PHD 的新认识^[6]. PHD 滤波器主要有两种实现方式, 高斯混合 (Gaussian mixture, GM) 实现^[7-8] 和序贯蒙特卡罗实现^[9-10], 分别适合线性高斯情况和非线性、非高斯情况, 而且两种实现方式的收敛性已有证明^[11-12]. 蒙特卡罗方法是一种以概率统计理论为基础的统计抽样方法, 利用抽样点来计算统计量, 主要用于解决积分的数值计算问题. 同时传递 PHD 和目标数分布的势化 PHD (Cardinalized PHD, CPHD) 滤波器提高了 PHD 滤波器的性能^[13-15]; 然而, 因为它的计算量很大, 所以目前只有在线性高斯简化假设条件下的高斯混合实现形式^[16]. PHD 和 CPHD 所具有的优点使其在多目标跟踪的多个领域得到了初步应用并有着很好的应用前景, 如机动目标跟踪^[17-18]、航迹管理^[19]、拓展目标跟踪^[20-21]、图像目标跟踪^[22-24]、声纳跟踪^[25]、微弱信号检测^[26] 等.

PHD 滤波器虽然还被称为“滤波器”, 但与常用的卡尔曼滤波器、粒子滤波器已经不再是同一个层面的概念; 卡尔曼滤波器和粒子滤波器解决的是单目标的滤波问题, 它们利用关联后的目标量测更新目标状态, 卡尔曼滤波器解决线性对象, 粒子滤波器解决非线性对象, 而 PHD 滤波器本质上是一种统一的多目标跟踪算法; 因此, 不能够把 PHD 滤波器这种多目标跟踪算法与卡尔曼滤波器、粒子滤波器进行性能比较. 从多目标跟踪的层面上分析, 卡尔曼滤波器和粒子滤波器只是基于数据关联多目标跟踪算法的一个环节, 每个卡尔曼滤波器或者粒子滤波器对应一个目标, 它们只有在进行多目标多量测的数据关联后才能利用对应量测来更新目标状态. 确切地说, PHD 滤波器作为一种统一的多目标跟踪算法, 与基于数据关联的多目标跟踪算法是同一个层面的概念. 相比较基于数据关联的多目标跟踪算法, PHD 滤波器具有很多的优势, 如无需数据关联、无需目标数目先验信息、能够自动识别目标的初始和消亡等^[4-5].

PHD 滤波器的高斯混合实现的基本思想是: 在“多目标线性高斯”假设条件下, 利用高斯混合方法近似 PHD 滤波器的积分运算环节^[7-8]. 该实现方式利用大量加权高斯分量表示 PHD, 高斯分量通过预测步和更新步在时间上进行传播, 从而实现 PHD 在时间上的传播. 不同于一般的高斯和滤波器, 该高

斯混合算法的混合权重和为期望目标数而非 1, 因为 PHD 在目标状态空间上的积分值为期望目标数而非 1. PHD 在高斯分量均值附近取得峰值, 该峰值可以用来提取多目标状态. 然而, 高斯分量数目在更新步以几何方式增长, 而且增加趋势会一直持续、没有边界; 这样就导致经过几个时间步后, 算法会因众多分量所产生的巨大时间开销而无法应用于多目标跟踪; 除此之外, 更新后的高斯分量还存在多个相近分量描述同一强度峰值的情况, 不利于后续从分量均值中提取多目标状态; 因此, 删减更新后混合分量并使删减后混合分量能够充分隔离的操作, 对 PHD 滤波器的高斯混合实现就很关键了.

针对该问题, 提出了一种基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合实现算法. 该算法以负指数 Dirichlet 分布为更新后高斯混合分量参数的先验分布, 以极大后验为混合参数的估计准则, 利用负指数 Dirichlet 分布的不稳定性在极大后验迭代过程中删减与 PHD 相关较小的分量. 负指数 Dirichlet 分布的不稳定性还体现在共享数据的多个相近分量间的竞争关系上, 该性质可以用来解决多个分量描述同一强度峰值的问题, 在极大后验迭代过程中利用这种竞争关系淘汰分量, 尽量确保每个强度峰值只由一个高斯分量来描述.

1 问题描述

PHD 滤波器的预测步和更新步分别为

$$v_{k|k-1}(x) = \int p_{S,k}(\zeta) f_{k|k-1}(x|\zeta) v_{k-1}(\zeta) d\zeta + \int \beta_{k|k-1}(x|\zeta) v_{k-1}(\zeta) d\zeta + \gamma_k(x) \quad (1)$$

和

$$v_k(x) = [1 - p_{D,k}(x)] v_{k|k-1}(x) + \sum_{z \in Z_k} \frac{\varphi_{z,k}(x) v_{k|k-1}(x)}{\kappa_k(z) + \int \varphi_{z,k}(\xi) v_{k|k-1}(\xi) d\xi} \quad (2)$$

其中, $v(\cdot)$ 表示强度, $\gamma_k(x)$ 为时刻 k 出生目标强度, $\beta_{k|k-1}(\cdot|\zeta)$ 表示来自于时刻 $k-1$ 目标状态 ζ 的衍生强度, $\kappa_k(z)$ 为杂波强度, $p_{S,k}(\zeta)$ 为存活概率, $f_{k|k-1}(x|\zeta)$ 为状态转移密度, $p_{D,k}(x)$ 为检测概率, $\varphi_{z,k}(x) = p_{D,k}(x) g_k(z|x)$, $g_k(z|x)$ 为似然函数, Z_k 为时刻 k 量测集合^[4,6].

高斯混合实现在“多目标线性高斯”假设条件下, 利用加权高斯混合分量表示目标强度^[7], 其主要步骤总结如下.

预测步. 对时刻 $k-1$ 以高斯混合形式表示的目标强度

$$v_{k-1}(x) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}} w_{k-1}^{(i)} \mathcal{N}(x; m_{k-1}^{(i)}, P_{k-1}^{(i)}) \quad (3)$$

进行预测, 得预测强度

$$v_{k|k-1}(x) = v_{S,k|k-1}(x) + v_{\beta,k|k-1}(x) + \gamma_k(x) \quad (4)$$

其中, $\mathcal{N}(\cdot; m_{k-1}^{(i)}, P_{k-1}^{(i)})$ 表示均值为 $m_{k-1}^{(i)}$, 方差为 $P_{k-1}^{(i)}$ 的高斯分量, γ_k 为出生目标强度, $v_{S,k|k-1}$ 为存活目标强度, $v_{\beta,k|k-1}$ 为衍生目标强度.

更新步. 更新以高斯混合形式表示的预测强度

$$v_{k|k-1}(x) = \sum_{i=1}^{J_{k|k-1}} w_{k|k-1}^{(i)} \mathcal{N}(x; m_{k|k-1}^{(i)}, P_{k|k-1}^{(i)}) \quad (5)$$

得更新强度

$$v_k(x) = (1 - p_{D,k}) v_{k|k-1}(x) + \sum_{z \in Z_k} v_{D,k}(x; z) \quad (6)$$

其中, $v_{D,k}$ 为检测到的目标强度

$$v_{D,k}(x; z) = \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}} w_k^{(j)}(z) \mathcal{N}(x; m_{k|k}^{(j)}(z), P_{k|k}^{(j)}) \quad (7)$$

所以, 时刻 k 的目标强度为

$$v_k(x) = \sum_{i=1}^{J_k} w_k^{(i)} \mathcal{N}(x; m_k^{(i)}, P_k^{(i)}) \quad (8)$$

分量删减步. 对更新后的 J_k 个高斯混合分量进行删减, 得到较少的混合分量来表示时刻 k 的目标强度 v_k .

状态提取步. 计算更新权重和 \hat{N}_k , 从删减后分量中提取前 \hat{N}_k 个权重对应的均值作为状态估计 \hat{X}_k .

目标强度 v_k 的更新后混合分量数目为 $J_k = (J_{k-1} (1 + J_{\beta,k}) + J_{\gamma,k}) (1 + |Z_k|) = O(J_{k-1} |Z_k|)$, 其中 $J_{\beta,k}$ 为衍生目标强度的分量个数, $J_{\gamma,k}$ 为出生目标强度的分量个数. 混合分量数目随着时间步的递进而呈几何形式增长, 而且这种增长随着时间累积是无边界的; 所以, 高斯混合实现会面临着不断增加的混合分量所带来的计算量问题; 经过几个时间步后, 高斯混合实现算法会因巨大的时间开销而无法适用于多目标跟踪. 以第 4 节的仿真场景为例, 在没有分量删减算法的情况下, 基本 PHD 高斯混合实现算法在第 1 时刻输入 2 个分量, 输出 250 个分量, 时间开销等级为 10^{-1} s; 第 2 时刻输入 250 个

分量, 输出 25×10^3 个, 时间开销等级为小时; 在后续时刻输入的分量数目越来越多, 时间开销越来越大, 算法也就失去了意义. 因此, 删减更新后的混合分量对 PHD 高斯混合实现算法就很关键了. 此外, 更新后的混合分量还存在着多个相近分量 (均值和方差类似的分量) 共同描述一个强度峰值的问题, 该问题的存在不利于后续目标状态的提取. 针对这些问题, 我们提出了基于 Dirichlet 分布的混合分量删减算法, 删减更新混合分量中与目标强度相关性较小的分量, 解决多个相近分量描述同一个强度峰值的问题, 减少高斯混合实现算法的时间开销, 从而改进 PHD 高斯混合实现在多目标跟踪中的性能.

2 基于 Dirichlet 分布的分量删减算法

正如第 1 节所论述的, 我们的研究目的是对更新后表示时刻 k 目标强度的 J_k 个混合分量进行删减. 针对该问题, 我们提出了基于 Dirichlet 分布的极大后验分量删减算法. Dirichlet 分布已经用于 PHD 序贯蒙特卡罗实现中的多目标状态提取^[27]. 文献 [27] 主要针对 PHD 滤波器序贯蒙特卡罗实现算法中的多目标状态提取环节, 目的是从重采样后粒子集合中提取多目标状态估计值; 它利用有限混合模型对待估计的多目标状态进行建模, 即利用有限混合模型拟合重采样粒子集合, 但并不改变传递到下一时刻的该粒子集合, 而且假设权重服从 Dirichlet 分布; 它以粒子与分量之间未知的对应关系为基础, 利用期望极大化算法极大似然估计多目标状态, 在该极大似然迭代过程中发挥 Dirichlet 分布的作用. 而本文针对 PHD 高斯混合实现算法中的分量删减环节, 目的是减少表示时刻 k 目标强度的分量数目来传递到下一时刻, 以使 PHD 高斯混合实现算法在时间开销上可行. 出于算法公式表述简单的目的, 我们在此节省略时刻标注 k , 令 $M = J_k$ 表示更新后分量数目.

首先计算更新后混合分量的权重和 $w_S = \sum_{j=1}^M w_j$; 然后, 正规化权重 $\{w_1/w_S, \dots, w_M/w_S\}$ 得归一化的混合权重 w_1, \dots, w_M , 满足

$$\sum_{j=1}^M w_j = 1 \quad (9)$$

令 $\theta_j = \{m^{(j)}, P^{(j)}\}$ 表示混合分量 j 的参数, 其中, $m^{(j)}$ 与 $P^{(j)}$ 分别为省略时刻标注的更新后分量均值与分量方差, 则 M 个混合分量的参数集合为 $\{w_1, \dots, w_M, \theta_1, \dots, \theta_M\}$.

算法采用 Dirichlet 分布描述更新后混合权重 w_1, \dots, w_M 的分布. Dirichlet 分布 $Dir(\alpha)$ 是一类由正实数矢量 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ 参数化的连续多变量概率分布, 其中 α_j 表示变量 j 的证据. 因为 Dirichlet 分布的多变量与更新后混合分量的混合权重都满足式 (9) 的约束, 所以 Dirichlet 分布可以描述混合权重的分布. 混合权重 w_1, \dots, w_M 的概率密度函数为

$$p(w_1, \dots, w_M; \alpha) = \frac{1}{B(\alpha)} \prod_{j=1}^M w_j^{\alpha_j - 1} \quad (10)$$

其中, 正规化因子 $B(\alpha)$ 是多项式 β 分布. 两个不同混合分量 i 和 j 的混合权重协方差为

$$\text{cov}(w_i, w_j) = \frac{-\alpha_i \alpha_j}{\alpha_0^2 (\alpha_0 + 1)} \quad (11)$$

其中, $\alpha_0 = \sum_{j=1}^M \alpha_j$ 表示所有分量的证据和. 由此可见, 不同的两两分量的关系是负的.

混合分量参数集合 θ 的先验分布取为负指数 Dirichlet 分布

$$p(\theta) \propto \exp\left(\sum_{j=1}^M c_j \log w_j\right) \quad (12)$$

其中, $c_j = -N/2$ 是分量 j 的证据, N 是描述每个分量的元素数目^[28]. 此处混合分量参数集合 θ 的先验分布 $p(\theta)$ 仅仅依赖于混合权重 w_1, \dots, w_M ; 先验分布中负指数参数 $c_j = -N/2$ 的选择使得分量 j 只有在充分的证据的前提下才能确保其存在. 算法利用负指数 Dirichlet 分布的不稳定性, 在极大后验迭代过程中驱使与目标强度相关较小的分量消亡. 负指数 Dirichlet 分布的另外一个特点是, 对于具有类似参数的两个或多个分量近似共享数据点的情况, 该分布能够使此类情况不稳定, 提升这些相近分量间的竞争, 最终使它们中的一个胜出, 淘汰其他相近分量. 负指数 Dirichlet 分布的这一特点, 使之能够解决高斯混合实现中具有类似均值与方差的多个相近混合分量描述同一个强度峰值的问题.

采用极大后验 (Maximum a posterior, MAP) 准则估计混合分量参数 θ . 目标量测集合 $Z_t = \{z_{1,t}, \dots, z_{n,t}\}$ 在 θ 下的对数似然为

$$\log p(Z_t|\theta) = \sum_{i=1}^n \log \sum_{j=1}^M w_j g(z_{i,t}|\theta_j) \quad (13)$$

其中, $g(z_t|\theta_j)$ 为目标量测 z_t 在分量 j 中的似然函数. 混合分量参数集合 θ 的 MAP 估计为

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \{\log p(Z_t|\theta) + \log p(\theta)\} \quad (14)$$

令对数后验密度 $\log p(\theta|Z_t)$ 关于混合权重 w_j 的导数为零, 求混合分量参数 θ 的 MAP 解

$$\frac{\partial}{\partial w_j} (\log p(Z_t|\theta) + \log p(\theta)) = 0 \quad (15)$$

利用拉格朗日乘子法把式 (9) 对混合权重的约束代入到式 (15) 中

$$\frac{\partial}{\partial w_j} \left(\log p(\theta|Z_t) + \lambda \left(\sum_{j=1}^M w_j - 1 \right) \right) = 0 \quad (16)$$

其中, λ 是拉格朗日乘子. 然后, 利用拉格朗日乘子法处理掉乘子 λ , 得混合权重 w_j 的 MAP 估计为

$$w_j = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_j(z_{i,t}) - \frac{N}{2n}}{1 - \frac{MN}{2n}} \quad (17)$$

其中, $\omega_j(z_t)$ 表示目标量测 z_t 来自于分量 j 的程度:

$$\omega_j(z_t) = \frac{w_j g(z_t|\theta_j)}{\sum_{j=1}^M w_j g(z_t|\theta_j)} \quad (18)$$

负指数 Dirichlet 分布的作用体现在式 (17) 中的 $-N/2n$ 项. 作为混合分量参数 θ 先验的负指数 Dirichlet 分布, 通过该项在极大后验迭代过程中不断减小与目标强度相关较小分量的混合权重, 从而驱使与目标强度相关较小分量的消亡. 在极大后验迭代过程中, 当某一混合分量的权重为负值时, 需从混合分量集合中删减该分量; 此删减操作通过权重置零来实现, 删减后的分量在后续迭代中不再出现. 在极大后验迭代过程中, 该分布提升多个相近分量之间的竞争, 并通过 $-N/2n$ 项淘汰其中的竞争分量, 尽量做到每个强度峰值由一个高斯混合分量来描述. 当混合参数对数后验密度 $\log p(\theta|Z_t)$ 的相对变化率小于设定值时, 极大后验迭代过程终止.

对收敛后的混合权重进行正规化以调整各混合分量的证据, 删减分量的证据也通过该正规化分配给存活分量. 最后, 乘以目标数估计值 \hat{N} 得当前时刻目标强度的高斯混合表示.

3 多目标跟踪算法小结

出于算法完整的目的, 我们简要地列出基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合多目标跟踪算法主要步骤. 算法输入为时刻 $k-1$ 目标强度高斯混合表示 $\{w_1^{(k-1)}, \dots, w_M^{(k-1)}, \theta_1^{(k-1)}, \dots, \theta_M^{(k-1)}\}$, 时刻 $k-1$ 多目标状态估计 \hat{X}_{k-1} 与时刻 k 量测集合 Z_k , 算法的输出为时刻 k 目标强度高斯混合表示

$\{w_1^{(k)}, \dots, w_M^{(k)}, \theta_1^{(k)}, \dots, \theta_M^{(k)}\}$ 与时刻 k 多目标状态估计 \hat{X}_k .

多目标跟踪算法的主要步骤为:

步骤 1. 利用式 (4) ~ (7) 完成对时刻 $k-1$ 高斯分量 $\{w_1^{(k-1)}, \dots, w_M^{(k-1)}, \theta_1^{(k-1)}, \dots, \theta_M^{(k-1)}\}$ 的预测和更新;

步骤 2. 对 \hat{X}_{k-1} 进行预测, 得预测多目标状态 $\hat{X}_{k|k-1}$, 并从 Z_k 中依据 $\hat{X}_{k|k-1}$ 位置分量的距离提取时刻 k 目标量测集合 $Z_{k,t}$;

步骤 3. 令 M 表示更新后的分量总数;

步骤 4. 求更新后混合分量权重和 $\hat{N}_{k|k}$, 正规化 M 个混合分量权重;

步骤 5. 利用式 (17) 与 $Z_{k,t}$ 对 M 个混合分量权重进行逐一更新;

步骤 6. 判断更新后混合权重的正负, 令 M_d 表示混合权重为负的分量个数;

步骤 7. 通过混合权重置零来删除混合权重为负的分量, 删减后的分量数目为 $M = M - M_d$;

步骤 8. 判断时刻 k 目标量测集合 $Z_{k,t}$ 的对数后验密度 $\log p(\theta|Z_t)$ 的相对变化率是否小于设定值, 如果不小于, 则返回步骤 5;

步骤 9. 正规化极大后验收敛后的混合权重 $\{w_1^{(k)}, \dots, w_M^{(k)}\}$, 重新分配混合分量证据;

步骤 10. 依照混合权重对步骤 9 中的高斯混合分量从大到小进行排列, 选择前 $\hat{N}_{k|k}$ 个混合权重所对应的分量均值作为时刻 k 多目标状态估计值 \hat{X}_k .

步骤 11. 混合权重 $\{w_1^{(k)}, \dots, w_M^{(k)}\}$ 乘以 $\hat{N}_{k|k}$ 得时刻 k 目标强度的高斯混合表示 $\{w_1^{(k)}, \dots, w_M^{(k)}, \theta_1^{(k)}, \dots, \theta_M^{(k)}\}$, 为下一个时刻做准备.

4 仿真研究

以二维场景为例, 通过仿真实验证明基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合实现算法的优势. 监视区域为 $[-1000, 1000] \text{ m} \times [-1000, 1000] \text{ m}$, 区域内的目标数目是变化的和未知的. 目标状态由目标位置和目标速度构成, 观测到的是目标位置. 目标运动模型为

$$x_k = F \cdot x_{k-1} + G \cdot v_k$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

$x_k = [x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, x_{4,k}]^T$ 为目标状态, $[x_{1,k}, x_{2,k}]^T$ 为目标位置, $[x_{3,k}, x_{4,k}]^T$ 为目标速度. 采样周期 $T = 1 \text{ s}$, 场景设计 100 个周期. 过程噪声 $\{v_{1,k}\}$ 和 $\{v_{2,k}\}$ 是相互独立的零均值高斯白噪声, 相应的标准差分别为 $\sigma_{v_1} = 5 \text{ m/s}^2$ 和 $\sigma_{v_2} = 5 \text{ m/s}^2$.

在 100 个周期内共有 4 个目标, 但各个目标的产生时刻、持续时间和消亡时刻不尽相同, 目标 1 和目标 2 存在于所有周期, 目标 3 在第 31 个周期产生并在第 51 个周期消亡, 目标 4 衍生于目标 1 的第 66 个周期的状态并在后续所有周期内存在. 目标的存活概率为常值 $p_{S,k} = 0.99$. 新生目标依照泊松点过程生成, 其强度取为 $\gamma_k = 0.2\mathcal{N}(\cdot; \bar{x}, Q)$, 其中

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -400 \\ -400 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{N}(\cdot; \bar{x}, Q)$ 表示均值为 \bar{x} 、方差为 Q 的高斯分量. 目标衍生强度取为 $\beta_{k|k-1}(x|\zeta) = 0.05\mathcal{N}(x; \zeta, Q_\beta)$, 其中, 表示衍生强度的高斯分量的方差取为对角阵 $Q_\beta = \text{diag}\{[100, 100, 400, 400]^T\}$. 相当于目标衍生时刻的 F_β 为单位对角阵 $F_\beta = \text{diag}\{[1, 1, 1, 1]^T\}$, 衍生目标状态的跳跃 d_β 为 $\mathbf{0}$, 即 $d_\beta = [0, 0, 0, 0]^T$.

目标量测方程为

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} w_{1,k} \\ w_{2,k} \end{bmatrix}$$

其中, $\{w_{1,k}\}$ 和 $\{w_{2,k}\}$ 是相互独立的零均值高斯白噪声并有相同标准差 $\sigma_{w_1} = \sigma_{w_2} = 10 \text{ m}$, 而且与过程噪声相互独立. 目标检测概率 $p_{D,k}$ 设定为常值 $p_{D,k} = 0.98$. 杂波过程用泊松随机有限集来描述, 每个杂波假设在监视区域内均匀分布, 相应的杂波强度为

$$\kappa_k(z_k) = \lambda \cdot c_k(z_k)$$

其中, λ 是平均杂波个数, 即泊松分布的参数; $c(z)$ 是杂波在监视区域内的均匀分布密度. 实验中, 参数 λ 设定为 50.

算法单次蒙特卡罗仿真结果如图 1 ~ 3 所示.

从结果图上可以明显地看到, 基于 Dirichlet 分布的算法在目标数估计正确时能够估计多目标状态, 并能正确识别目标的产生、衍生和消亡. 以该次蒙特卡罗仿真第 86 时刻为例, 分析负指数 Dirichlet 分布解决多个相近分量描述同一个强度峰值的效果.

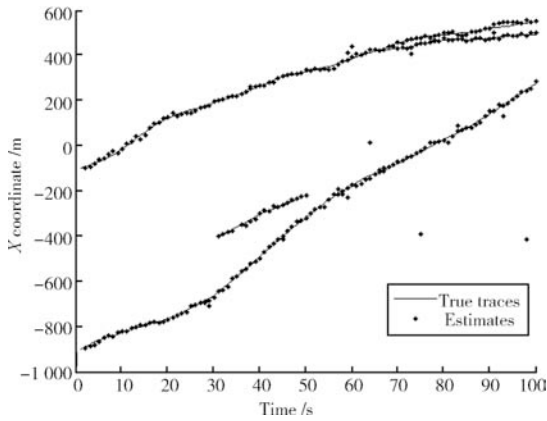


图 1 X 坐标的真实轨迹与估计值

Fig.1 True traces and estimates of X coordinate

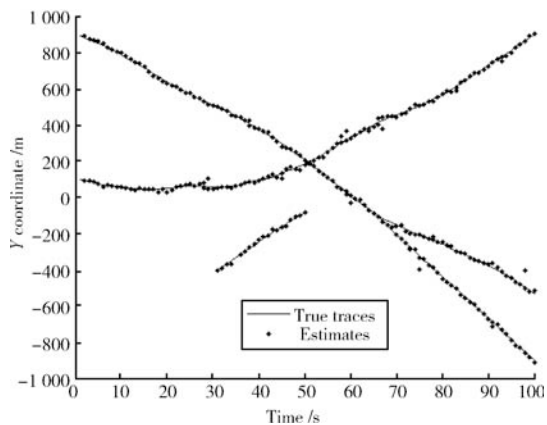


图 2 Y 坐标的真实轨迹与估计值

Fig.2 True traces and estimates of Y coordinate

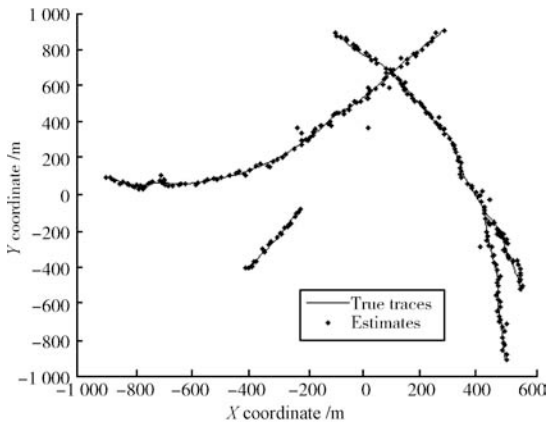


图 3 X 和 Y 坐标的真实轨迹与估计值

Fig.3 True traces and estimates of X and Y coordinates

在第 86 时刻, 更新后的分量数目为 858, 其中有 14 个分量的混合权重大于或等于 1×10^{-3} , 它们显示在图 4 中; 从该图中可以明显看出, 存在多个相近分量描述同一个强度峰值的问题. 图 5 显示了经过基于 Dirichlet 分布算法删减后的混合分量; 与图 4 的对比效果说明, 基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混

合实现算法能够尽量保证每个强度峰值由一个混合分量来表示, 而且可以删除没有目标量测支撑的混合分量.

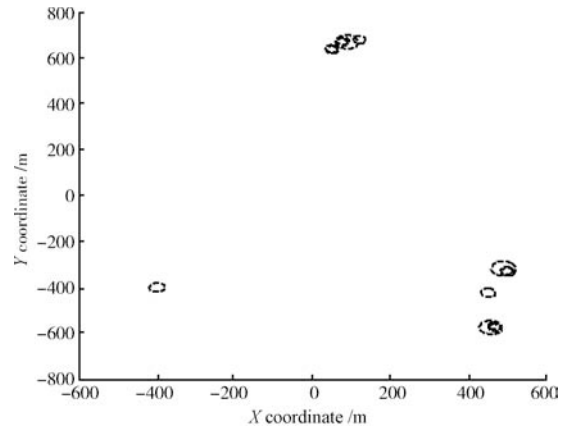


图 4 删减前高斯分量

Fig.4 Gaussian components before pruning

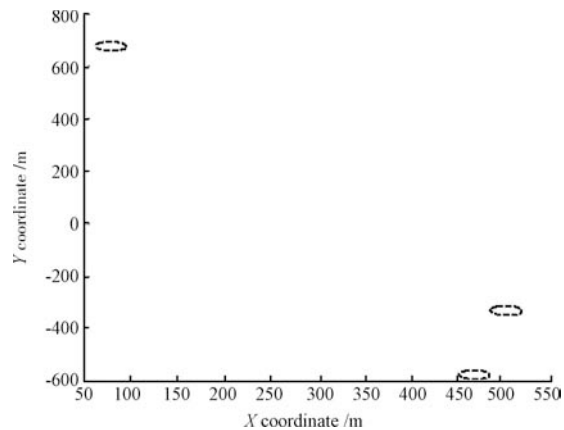


图 5 删减后高斯分量

Fig.5 Gaussian components after pruning

因为目标数估计也是 PHD 滤波器估计的一部分, 所以 PHD 滤波器输出的多目标状态估计集合的势与真实集合的势有可能不相等, 因而一般衡量多目标跟踪性能的均方根误差不再适用; 算法采用 Wasserstein 距离评价多目标跟踪的性能.

$$d_p(\hat{X}, X) = \min_C \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{|\hat{X}|} \sum_{j=1}^{|X|} C^{ij} \|\hat{x}^i - x^j\|^p}$$

其中, \hat{X} 和 X 分别是多目标状态的估计值和真实值^[29]. 它在所有可能中间矩阵 C 上取最小值 (元素 C^{ij} 是正实数且 $\sum_{j=1}^{|X|} C^{ij} = 1/|\hat{X}|$, $\sum_{i=1}^{|\hat{X}|} C^{ij} = 1/|X|$); 当 \hat{X} 和 X 为空时, 此距离没有定义. 基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合算法与典型 PHD 高斯混合实现算法^[7] 进行性能比

较,二者均以位置状态 Wasserstein 距离为指标来衡量多目标跟踪性能. 典型 PHD 高斯混合实现算法通过三个门限值来解决分量删减问题: 分量删除的权重门限 $Th = 10^{-5}$ (删除混合权重小于 Th 的混合分量), 分量融合距离门限 $U = 4$ (距离小于 U 的多个分量合并为一个分量), 最大允许分量数目 $J_{max} = 100$ (如果经过门限 Th 和 U 删减后的分量数目仍旧大于 J_{max} , 则只保留混合权重较大的前 J_{max} 个分量, 删除其他分量). 与典型 PHD 高斯混合实现算法中的门限删减方法不同, 基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合实现算法通过 Dirichlet 分布在迭代过程中调整分量权重, 从而实现分量的删减. 图 6 显示了 100 次蒙特卡罗仿真的对比效果, 基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合实现现在绝大多数时刻上优于典型 PHD 高斯混合实现算法.

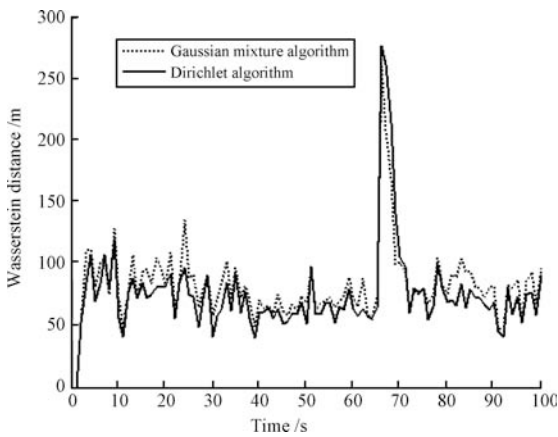


图 6 平均 Wasserstein 距离

Fig. 6 The averaged Wasserstein distances

二者目标数估计的对比效果如图 7 所示, 基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合实现算法更接近真实目标数 (除了目标衍生时刻及随后几个时刻).

每个时刻删减后的平均分量数目的对比效果如图 8 所示. 可以看出, 基于 Dirichlet 分布算法的平均分量数目要少些, 因为算法利用了负指数 Dirichlet 的不稳定性, 提升了相近分量之间的竞争, 进而删减了更多的分量.

PHD 高斯混合实现算法的时间开销集中在更新步, 该步的复杂度为 $O(J_{k-1} |Z_k|)$. 基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合实现算法时间开销增加在极大后验迭代过程; 另一方面, 经过 Dirichlet 分布删减后的混合分量的数目比典型 PHD 高斯混合实现算法的要少 (典型 PHD 高斯混合实现算法平均每个时刻 9.91 个, 而此算法为 4.84 个), 随后时刻更新步时间开销也相应较少, 消弱了极大后验迭代过程所增加的时间开销; 增加与减少两个方面综合后,

基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合实现算法整体时间开销比典型 PHD 高斯混合实现算法要大. 典型 PHD 高斯混合实现算法的平均每步时间开销为 1.49s, 此算法为 1.61s (Matlab 7.1 环境, Intel(R), Pentium(R), D CPU 2.80 GHz 2.79 GHz, 504 MB 内存).

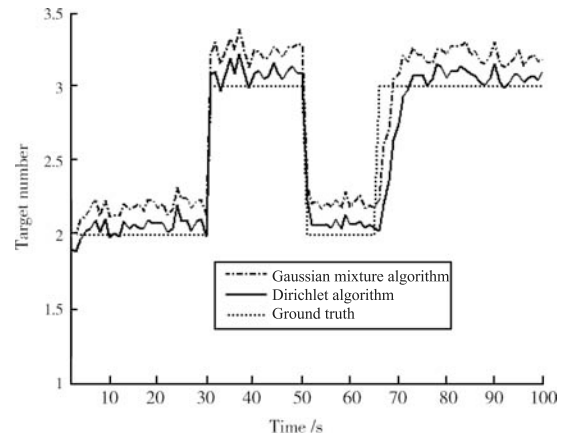


图 7 目标数目估计

Fig. 7 Estimates of target numbers

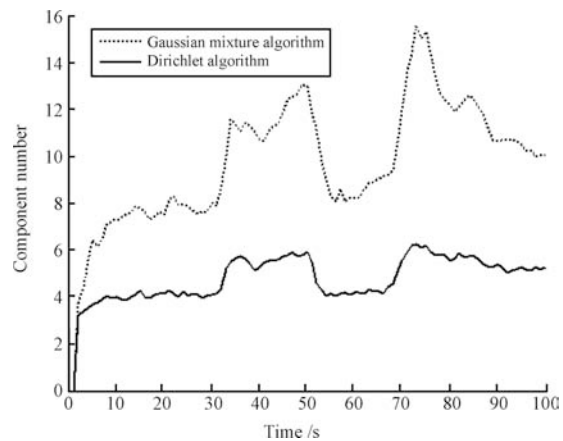


图 8 平均分量数目

Fig. 8 The averaged target numbers

进一步对比更低信噪比条件下二者的性能, 令 $\lambda_c = 80$. 此条件下 100 次蒙特卡罗仿真的对比效果如图 9 所示, 可以看出, 基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合实现算法在低信噪比条件下仍然优于典型 PHD 高斯混合实现算法.

扩大监视区域到 $[-1500, 1500]m \times [-1500, 1500]m$ 的范围, 再增加 2 个、3 个和 4 个使目标总数分别达到 6 个、7 个和 8 个, 在相应设置下的 100 次蒙特卡罗仿真对比效果如图 10 ~ 12 所示. 从图中可以看出, 基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合实现算法仍然可以保持性能上的优势; 两种实现算法在有目标衍生时刻的跟踪效果都较差.

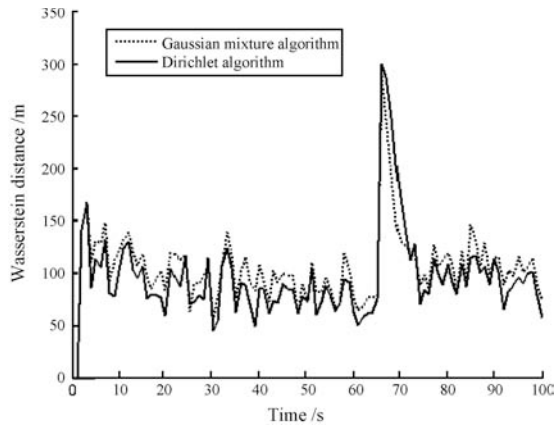


图 9 低信噪比 Wasserstein 距离

Fig. 9 The Wasserstein distances under low SNR

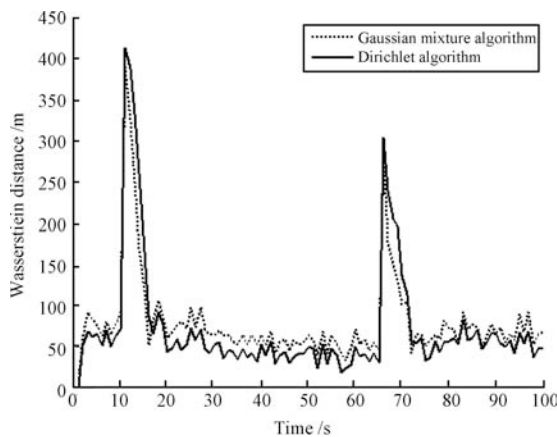


图 10 6 目标平均 Wasserstein 距离

Fig. 10 The averaged Wasserstein distances of 6 targets

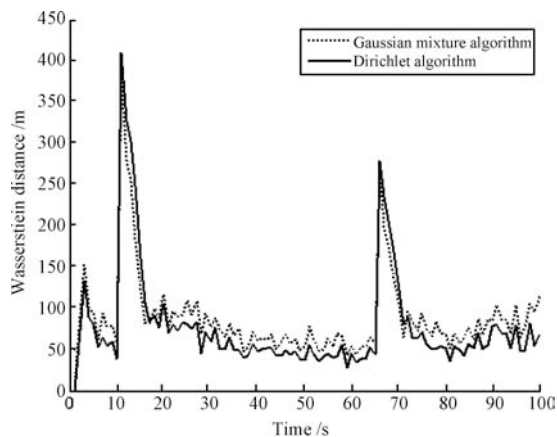


图 11 7 目标平均 Wasserstein 距离

Fig. 11 The averaged Wasserstein distances of 7 targets

5 结论

提出了基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合实现算法. 该算法利用负指数 Dirichlet 分布的不稳定

性在极大后验迭代过程中删减与强度相关性较小的分量, 从而实现高斯混合分量的精简和时间开销的减少, 并使每个强度峰值尽量由一个混合分量表示. 仿真结果表明, 基于 Dirichlet 分布的 PHD 高斯混合实现在多目标跟踪中的性能优于典型 PHD 高斯混合实现算法. 在下一步研究中, 将利用合理方法将该算法拓展到具有更为复杂运动形式的多目标跟踪中去.

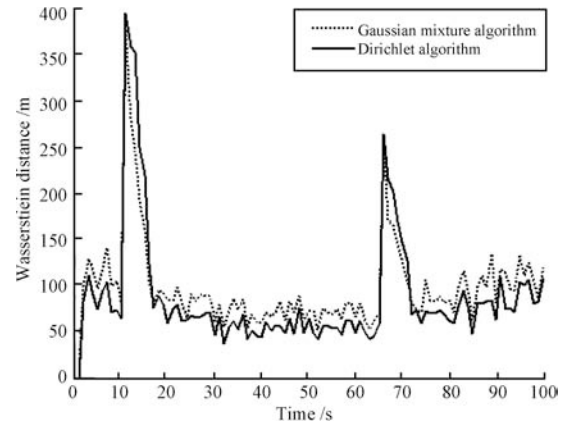


图 12 8 目标平均 Wasserstein 距离

Fig. 12 The averaged Wasserstein distances of 8 targets

References

- 1 Pulford G E. Taxonomy of multiple target tracking methods. *IET Proceedings of Radar, Sonar, and Navigation*, 2005, **152**(2): 291–304
- 2 Blackman S, Popoli R. *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Boston: Artech House, 1999
- 3 Daley D, Vere-Jones D. *An Introduction to the Theory of Point Processes (Second Edition)*. New York: Springer, 2002
- 4 Mahler R P S. Multi-target Bayes filtering via first-order multi-target moments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, **39**(4): 1152–1178
- 5 Mahler R P S. *Statistical Multisource-Multitarget Information Fusion*. Norwood: Artech House, 2007
- 6 Erdinc O, Willett P, Bar-Shalom Y. The bin-occupancy filter and its connection to the PHD filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(11): 4232–4246
- 7 Vo B N, Ma W K. The Gaussian mixture probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(11): 4091–4104
- 8 Pasha S A, Vo B N, Tuan H D, Ma W K. A Gaussian mixture PHD filter for jump Markov system models. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, **45**(3): 919–936
- 9 Vo B N, Singh S, Doucet A. Sequential Monte Carlo methods for multi-target filtering with random finite sets. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, **41**(4): 1224–1245
- 10 Whiteley N, Singh S, Godsill S. Auxiliary particle implementation of the probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, **46**(3): 1437–1454

- 11 Clark D E, Bell J. Convergence results for the particle PHD filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(7): 2652–2661
- 12 Clark D E, Vo B N. Convergence analysis of the Gaussian mixture PHD filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(4): 1204–1212
- 13 Mahler R P S. PHD filters of higher order in target number. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(4): 1523–1543
- 14 Vo B T, Vo B N, Cantoni A. The cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filter and its implementations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(2): 409–423
- 15 Franken D, Schmidt M, Ulmke M. “Spooky action at a distance” in the cardinalized probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, **45**(4): 1657–1664
- 16 Vo B T, Vo B N, Cantoni A. Analytic implementations of the cardinalized probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(7): 3553–3567
- 17 Punithakumar K, Kirubaran T, Sinha A. Multiple-model probability hypothesis density filter for tracking maneuvering targets. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, **44**(1): 87–98
- 18 Lian Feng, Han Chong-Zhao, Liu Wei-Feng, Yuan Xiang-Hui. Multiple-model probability hypothesis density smoother. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 939–950
(连峰, 韩崇昭, 刘伟峰, 元向辉. 多模型概率假设密度平滑器. *自动化学报*, 2010, **36**(7): 939–950)
- 19 Panta K, Clark D E, Vo B N. Data association and track management for the Gaussian mixture probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, **45**(3): 1003–1016
- 20 Vo B T, Vo B N, Cantoni A. A Bayesian filtering with random finite set observations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(4): 1313–1326
- 21 Rezaeian M, Vo B N. Error bounds for joint detection and estimation of a single object with random finite set observation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(3): 1493–1506
- 22 Wang Y D, Wu J K, Kassim A A, Huang W M. Data-driven probability hypothesis density filter for visual tracking. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2008, **18**(8): 1085–1095
- 23 Maggio E, Taj M, Cavallaro A. Efficient multitarget visual tracking using random finite sets. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2008, **18**(8): 1016–1027
- 24 Maggio E, Cavallaro A. Learning scene context for multiple object tracking. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, **18**(8): 1873–1884
- 25 Clark D E, Ruiz I T, Petilot Y, Bell J. Particle PHD filter multiple target tracking in sonar images. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(1): 409–416
- 26 Clark D E, Ristic B, Vo B N, Vo B T. Bayesian multi-object filtering with amplitude feature likelihood for unknown object SNR. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(1): 26–37
- 27 Yan Xiao-Xi, Han Chong-Zhao. Multiple target tracking by probability hypothesis density based on Dirichlet distribution. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2011, **45**(2): 6–10
(闫小喜, 韩崇昭. 应用 Dirichlet 分布的概率假设密度多目标跟踪. *西安交通大学学报*, 2011, **45**(2): 6–10)
- 28 Figueiredo M A F, Jain A K. Unsupervised learning of finite mixture models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, **24**(3): 381–396
- 29 Hoffman J R, Mahler R P S. Multitarget miss distance via optimal assignment. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part A: Systems and Humans*, 2004, **34**(3): 327–336



闫小喜 西安交通大学电子与信息工程学院综合自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为多源信息融合, 多目标跟踪和随机有限集. 本文通信作者.

E-mail: yanxiaoxi1981@gmail.com

(YAN Xiao-Xi Ph.D. candidate at the Institute of Integrated Automation, School of Electronic and Information

Engineering, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers multisource information fusion, multiple target tracking and random finite set. Corresponding author of this paper.)



韩崇昭 西安交通大学电子与信息工程学院自动化系教授. 主要研究方向为多源信息融合, 随机控制与自适应控制, 非线性频谱分析.

E-mail: czhan@mail.xjtu.edu.cn

(HAN Chong-Zhao Professor in the Department of Automation, School of Electronic and Information Engineer-

ing, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers multisource information fusion, stochastic control and adaptive control, and nonlinear spectral analysis.)