

基于空间共线点的单光心反射折射摄像机标定

段福庆¹ 吕科² 周明全¹

摘要 一条空间直线的单光心反射折射图像是一个二次曲线段, 大多数利用直线进行单光心反射折射摄像机标定的方法都需要对直线的像进行二次曲线拟合, 曲线拟合的精度严重影响着标定的精度. 然而, 一条空间直线的像仅占整个二次曲线的一小段, 这使得曲线拟合的效果非常差. 本文利用空间三个共线点的反射折射投影给出了摄像机内参数的一个非线性约束. 当反射镜面为抛物面时, 在主点已知的情况下, 该约束变为线性约束. 如其他参数已知, 该约束变为关于有效焦距的多项式约束. 由此, 本文提出了三种不同条件下的标定算法, 算法中无需对直线的像进行二次曲线拟合, 无需场景的任何信息, 标定精度较高. 实验验证了算法的有效性.

关键词 单光心反射折射摄像机, 摄像机标定, 摄像机内参数, 球成像模型

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01296

Central Catadioptric Camera Calibration Based on Collinear Space Points

DUAN Fu-Qing¹ LV Ke² ZHOU Ming-Quan¹

Abstract For central catadioptric cameras, the projection of a space line is a conic segment, and most of the calibration methods using lines need conic fitting of line images, which highly affects the calibration accuracy. However, generally only a small segment of the conic is visible, which makes the conic fitting error-prone. In this paper, we derive a nonlinear constraint on all camera intrinsic parameters from the projections of any three collinear space points. With the principal point known, the constraint becomes linear for para-catadioptric cameras. With all other parameters known, the constraint becomes a polynomial constraint on the effective focal length. Based on this constraint, we propose three calibration algorithms under different conditions. The proposed algorithms need no conic fitting of line images, need no scene information, and the calibration accuracy is high. Experiments demonstrate the efficiency of the proposed algorithms.

Key words Central catadioptric camera, camera calibration, camera intrinsic parameter, sphere imaging model

许多计算机视觉应用都希望成像系统有一个较大的视角 (Field of view, FOV), 如机器人导航、视觉监控、虚拟现实等. 然而, 普通摄像机的视角非常有限, 一种有效地增大视角的方法是将普通摄像机与反射镜面相结合构成反射折射摄像机^[1-3]. 由于单光心反射折射摄像机获取的图像能够很容易地转化为透视图像而备受关注^[3-4]. Baker 等^[3]指出, 一个单光心反射折射摄像机可以通过以下方式构造: 1) 在一个正交投影摄像机前面放置一个旋转抛物面镜, 此时, 正交投影摄像机应处于旋转抛物面镜的对称轴上; 2) 在一个透视摄像机前面放置一个旋转双曲面镜或旋转椭球面镜, 此时, 透视摄像机的光心应位于反射镜面的另一个焦点上; 3) 在一个透视摄像机前面放置一个平面镜. 摄像机标定就是要估计从

三维景物到二维图像的物理成像参数, 是许多应用的前提与基础. 目前, 单光心反射折射摄像机的标定已成为一个研究热点.

文献中一些方法利用已知场景点的单幅图像来标定单光心反射折射摄像机. 例如: Wu 等^[5] 从一维空间点标定摄像机的主点; Scaramuzza 等^[6] 和 Gasparini 等^[7] 分别利用二维标定板进行标定; Sturm 等^[8] 利用二维或三维空间点标定一般类型的全向摄像机. 这类方法的标定精度较高, 但是需要制作精密的标定物以及三维空间点到二维图像点的精确对应, 因而灵活性和适用性较差. 还有一类方法不需要任何场景信息, 利用多幅图像中的点对应进行自标定^[9-10], 如 Ramalingam 等^[9] 利用摄像机作特定运动时的点对应来标定一般的单光心摄像机. 这类方法的灵活性较高, 然而, 由于全向图像的分辨率不均匀, 自动寻找多幅图像的对应点本身还是没有得到很好解决的难题.

直线是人造场景中普遍存在的几何元素, 因而被广泛应用于摄像机标定^[11-18]. Geyer 等^[12-13] 利用两组平行线或者三条直线的单幅图像来标定抛物镜面反射折射摄像机, 他们还提出了一个统一的球成像模型^[4] 来描述所有单光心反射折射摄像机的

收稿日期 2010-10-22 录用日期 2011-06-05
Manuscript received October 22, 2010; accepted June 5, 2011
国家自然科学基金 (60872127, 60736008) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60872127, 60736008)

1. 北京师范大学信息科学与技术学院 北京 100875 2. 中国科学院研究生院计算与通信工程学院 北京 100049

1. College of Information Science and Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875 2. College of Computing and Communication Engineering, Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

成像过程. 文献 [7, 13–16] 基于这个统一的球成像模型给出了单光心反射折射摄像机的标定算法. Ying 等^[14] 利用直线或者球的几何不变量进行标定. Barreto 等^[11] 研究了空间直线在反射折射图像中的射影不变量, 指出任何单光心反射折射摄像机都能由三条或更多条直线的图像来实现完全标定. Wu 等^[15] 基于空间直线的反射折射投影给出了摄像机参数的一组线性约束, 并由此提出了一种线性标定算法. Ying 等^[16] 给出了直线和球的单光心反射折射图像的一些等同的几何性质, 并将这些性质应用于标定. 一条空间直线的单光心反射折射图像是一个二次曲线段, 几乎所有这些方法都需要对直线的像进行二次曲线拟合, 摄像机标定的精度严重依赖于这些曲线拟合的精度. 然而, 由于镜面遮挡, 一条空间直线的像仅仅占整个二次曲线的一小段, 这使得曲线拟合的效果非常差. 尽管 Barreto 等^[19] 提出了一种在抛物镜面反射折射摄像机中对直线的像进行二次曲线拟合的有效方法, 但对其他类型反射折射摄像机, 还没有好的解决方法. Wu 等^[20] 针对抛物镜面反射折射摄像机, 在主点已知的条件下, 提出了一种不需要进行曲线拟合的线性标定方法. Ying 等^[21] 采用了一种计算量较大的搜索策略: 根据未知内参数的每一个可能值, 通过二维 Hough 变换检测直线的二次曲线像, 对应最高置信度的那一组内参数即为标定结果.

本文的主要贡献在于: 1) 利用空间三个共线点的反射折射投影给出了摄像机内参数的一个非线性约束, 当反射镜面为抛物面时, 类似于文献 [20], 在主点已知的情况下, 该约束变为线性约束; 如其他参数已知, 该约束变为关于有效焦距的多项式约束. 2) 基于该约束, 提出了三个不同条件下的标定算法, 算法中无需对直线的像进行二次曲线拟合, 无需场景的任何信息, 灵活性和标定精度较高. 第 1 节介绍 Geyer 等提出的统一的球成像模型; 第 2 节导出摄像机内参数的约束; 第 3 节给出标定算法; 第 4 节是实验结果; 最后给出本文结论.

1 成像模型

1.1 针孔摄像机

假定针孔摄像机的内参数矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} rf & s & u_0 \\ 0 & f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, f 是有效焦距; r 是纵横比; $\mathbf{p} = [u_0, v_0, 1]^T$ 是主点; s 是畸变因子, 或称为倾斜因子, 用于描述 CCD 摄像机数字离散化后的像素倾斜 (非矩形).

令空间点 $\mathbf{X} = [x, y, z]^T$ 在图像平面上的投影为 $\mathbf{m} = [u, v, 1]^T$, 则成像模型可表示为

$$\mathbf{m} = \lambda K [R, \mathbf{t}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中, λ 是非零的常数因子, R, \mathbf{t} 是摄像机外参数矩阵, 表示从世界坐标系到摄像机坐标系的旋转矩阵和平移向量.

1.2 单光心反射折射摄像机

Geyer 等^[4] 指出, 单光心反射折射成像过程等价于一个经过单位球的两步成像模型 (见图 1, 单位球称为视球): 首先, 在单位球坐标系 $O-xyz$ 下, 以球心 O 为透视中心, 三维空间点 $\mathbf{X} = [x, y, z]^T$ 被投影到单位球上的点 $\mathbf{X}^s = [x/r, y/r, z/r]^T$, $r = \|\mathbf{X}\|$, $\|\cdot\|$ 表示向量的模长; 然后, 以空间点 O^c 为中心, 点 \mathbf{X}^s 被一个虚拟针孔摄像机透视投影到垂直于直线 O^cO 的平面 Π 上形成图像点 \mathbf{m} , 点 O^c 称为虚拟摄像机光心, 平面 Π 称为反射折射图像平面.

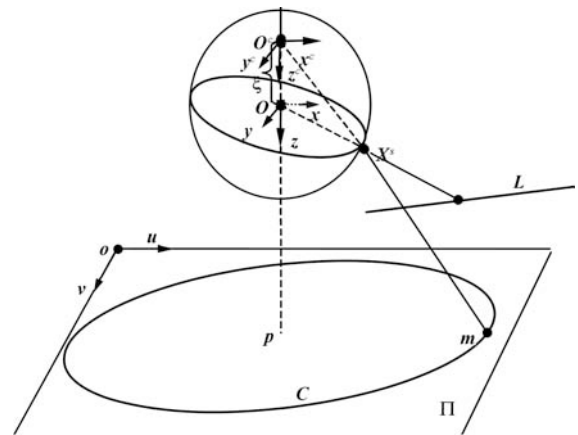


图 1 单光心反射折射摄像机成像模型

Fig. 1 Imaging model of central catadioptric camera

在这个成像模型中, 直线 O^cO 是虚拟摄像机的光轴, 它与像平面 Π 的交点 $\mathbf{p} = [u_0, v_0, 1]^T$ 是摄像机的主点, O^c 到 O 的距离 ξ 称为镜面参数. 不同的镜面参数对应不同类型的反射镜面: 当 $\xi = 1$ 时, 是旋转抛物面; 当 $0 < \xi < 1$ 时, 是旋转双曲面或旋转椭球面; 当 $\xi = 0$ 时, 是平面, 详细的描述见文献 [4]. 本文假定 $0 < \xi < 1$, 即不考虑平面镜的情况.

根据上述描述, 一个空间点 \mathbf{X} 在反射折射图像上的投影 \mathbf{m} 为

$$\mathbf{m} = \lambda K [I, \xi \mathbf{e}] \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\lambda K \left(\frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} + \xi \mathbf{e} \right) \quad (3)$$

其中, K 为虚拟针孔摄像机的内参数矩阵, λ 是一个常数, I 是一个单位矩阵, $\mathbf{e} = [0, 0, 1]^T$. $[f, r, s, u_0, v_0, \xi]$ 是单光心反射折射摄像机的内参数. 一条空间直线的反射折射图像为一个二次曲线段^[4], 该二次曲线是单位球上大圆在虚拟摄像机下的图像 (见图 1), 当且仅当空间直线与虚拟摄像机光轴 $\mathbf{O}^c\mathbf{O}$ 共面时, 图像曲线退化为直线.

2 摄像机内参数约束

文献 [15] 给出了空间点的射影如下:

定理 1. 设 \mathbf{m} 是空间点 \mathbf{X} 的反射折射图像, 在虚拟针孔摄像机坐标系 $\mathbf{O}^c-x^cy^cz^c$ 下, 点 \mathbf{X} 在单位视球上的投影可以表示为

$$\mathbf{X}^s = \frac{\xi(1 + \sqrt{1 + \tau\eta})}{\eta} K^{-1} \mathbf{m} \quad (4)$$

如果反射镜面是旋转抛物面, 即 $\xi = 1$, 则

$$\mathbf{X}^s = \frac{2}{\eta} K^{-1} \mathbf{m} \quad (5)$$

其中, $\tau = (1 - \xi^2)/\xi^2$, $\omega = K^{-T}K^{-1}$, $\eta = \mathbf{m}^T\omega\mathbf{m}$.

利用定理 1, 我们得到下述关于单光心反射折射内参数的约束.

定理 2. 令 $\{\mathbf{m}_j : j = 1, 2, 3\}$ 是三个共线空间点 $\{\mathbf{x}_j : j = 1, 2, 3\}$ 的反射折射图像, 则:

$$\begin{aligned} \phi(\tau, \omega) = \det[& (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_1}) \mathbf{m}_1 - \eta_1 \mathbf{p}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_2}) \mathbf{m}_2 - \eta_2 \mathbf{p}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_3}) \mathbf{m}_3 - \eta_3 \mathbf{p}] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中, \det 表示矩阵的行列式, $\eta_j = \mathbf{m}_j^T\omega\mathbf{m}_j$, $j = 1, 2, 3$.

$$\omega = K^{-T}K^{-1} =$$

$$\frac{1}{r^2 f^4} \begin{bmatrix} f^2 & -sf & a_1 \\ -sf & s^2 + r^2 f^2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

其中, $a_1 = sv_0f - u_0f^2$, $a_2 = su_0f - s^2v_0 - v_0r^2f^2$, $a_3 = (sv_0 - u_0f)^2 + r^2v_0^2f^2 + r^2f^4$.

证明. 根据单位球成像模型, 三个共线空间点 $\{\mathbf{x}_j : j = 1, 2, 3\}$ 在视球上的投影 $\{\mathbf{X}_j^s : j = 1, 2, 3\}$ 处于视球的一个大圆上, 因此, 三个单位向量 \mathbf{OX}_1^s , \mathbf{OX}_2^s , \mathbf{OX}_3^s 共面. 从而

$$\det[\mathbf{X}_1^s - \mathbf{O}, \mathbf{X}_2^s - \mathbf{O}, \mathbf{X}_3^s - \mathbf{O}] = 0 \quad (7)$$

根据式 (4) 有:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_j^s - \mathbf{O} &= \frac{\xi(1 + \sqrt{1 + \tau\eta_j})}{\eta_j} K^{-1} \mathbf{m}_j - \xi \mathbf{e} = \\ & \xi K^{-1} \left(\frac{(1 + \sqrt{1 + \tau\eta_j})}{\eta_j} \mathbf{m}_j - K \mathbf{e} \right) = \\ & \frac{\xi K^{-1}}{\eta_j} ((1 + \sqrt{1 + \tau\eta_j}) \mathbf{m}_j - \eta_j \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (8)$$

由于 $\det K^{-1} \neq 0$, 则:

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{X}_1^s - \mathbf{O}, \mathbf{X}_2^s - \mathbf{O}, \mathbf{X}_3^s - \mathbf{O}] &= \\ \frac{\xi^3 \det K^{-1}}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} \det[& (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_1}) \mathbf{m}_1 - \eta_1 \mathbf{p}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_2}) \mathbf{m}_2 - \eta_2 \mathbf{p}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_3}) \mathbf{m}_3 - \eta_3 \mathbf{p}] = 0 \\ & \propto \det[& (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_1}) \mathbf{m}_1 - \eta_1 \mathbf{p}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_2}) \mathbf{m}_2 - \eta_2 \mathbf{p}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_3}) \mathbf{m}_3 - \eta_3 \mathbf{p}] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

定理 2 得证. □

令

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -u_0 \\ 0 & 1 & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{K} = T_p K = \begin{bmatrix} rf & s & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $\hat{\mathbf{m}} = T_p \mathbf{m}$ 是将图像原点移至主点 \mathbf{p} 的平移变换. 从式 (6) 可得:

$$\begin{aligned} \det(T_p) \det[& (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_1}) \mathbf{m}_1 - \eta_1 \mathbf{p}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_2}) \mathbf{m}_2 - \eta_2 \mathbf{p}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_3}) \mathbf{m}_3 - \eta_3 \mathbf{p}] = \\ \det(T_p) [& (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_1}) \mathbf{m}_1 - \eta_1 \mathbf{p}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_2}) \mathbf{m}_2 - \eta_2 \mathbf{p}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_3}) \mathbf{m}_3 - \eta_3 \mathbf{p}] = \\ \det[& (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_1}) \hat{\mathbf{m}}_1 - \eta_1 \mathbf{e}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_2}) \hat{\mathbf{m}}_2 - \eta_2 \mathbf{e}, \\ & (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_3}) \hat{\mathbf{m}}_3 - \eta_3 \mathbf{e}] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

当 $\tau = 0$, 即镜面为抛物面时, 式 (10) 变为

$$\det [2\hat{\mathbf{m}}_1 - \eta_1 \mathbf{e}, 2\hat{\mathbf{m}}_2 - \eta_2 \mathbf{e}, 2\hat{\mathbf{m}}_3 - \eta_3 \mathbf{e}] =$$

$$8 \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}}_{1x} & \hat{\mathbf{m}}_{2x} & \hat{\mathbf{m}}_{3x} \\ \hat{\mathbf{m}}_{1y} & \hat{\mathbf{m}}_{2y} & \hat{\mathbf{m}}_{3y} \\ 1 - \frac{\eta_1}{2} & 1 - \frac{\eta_2}{2} & 1 - \frac{\eta_3}{2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\propto D_3\eta_1 - D_2\eta_2 + D_1\eta_3 - 2(D_3 - D_2 + D_1) = 0 \quad (11)$$

其中

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}}_{1x} & \hat{\mathbf{m}}_{2x} \\ \hat{\mathbf{m}}_{1y} & \hat{\mathbf{m}}_{2y} \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}}_{1x} & \hat{\mathbf{m}}_{3x} \\ \hat{\mathbf{m}}_{1y} & \hat{\mathbf{m}}_{3y} \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}}_{2x} & \hat{\mathbf{m}}_{3x} \\ \hat{\mathbf{m}}_{2y} & \hat{\mathbf{m}}_{3y} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{m}}_i = (\hat{\mathbf{m}}_{ix}, \hat{\mathbf{m}}_{iy}, 1)^T, \quad i = 1, 2, 3$$

由于

$$\eta_i = \mathbf{m}_i^T \omega \mathbf{m}_i = \hat{\mathbf{m}}_i^T T_p^{-T} \omega T_p^{-1} \hat{\mathbf{m}}_i = \hat{\mathbf{m}}_i^T \hat{\omega} \hat{\mathbf{m}}_i$$

$$\hat{\omega} = \hat{K}^{-T} \hat{K}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_{11} & \hat{\omega}_{21} & 0 \\ \hat{\omega}_{12} & \hat{\omega}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\omega}_{12} = \hat{\omega}_{21}$$

则式 (11) 展开可得:

$$(D_3\hat{\mathbf{m}}_{1x}^2 - D_2\hat{\mathbf{m}}_{2x}^2 + D_1\hat{\mathbf{m}}_{3x}^2) \hat{\omega}_{11} +$$

$$(D_3\hat{\mathbf{m}}_{1y}^2 - D_2\hat{\mathbf{m}}_{2y}^2 + D_1\hat{\mathbf{m}}_{3y}^2) \hat{\omega}_{22} +$$

$$2(D_3\hat{\mathbf{m}}_{1x}\hat{\mathbf{m}}_{1y} - D_2\hat{\mathbf{m}}_{2x}\hat{\mathbf{m}}_{2y} + D_1\hat{\mathbf{m}}_{3x}\hat{\mathbf{m}}_{3y}) \hat{\omega}_{21} =$$

$$D_3 - D_2 + D_1 \quad (12)$$

因此, 当主点已知时, 式 (12) 构成了一个线性约束. 当其他参数都已知时, 式 (11) 或式 (12) 可以化成一个关于有效焦距的 4 次多项式约束, 特别地, 如果 $s = \delta f$ (δ 是一个常数), 这个 4 次多项式方程变成一个关于 f^2 的 2 次方程.

当 $\tau \neq 0$, 即镜面为椭球面或双曲面时, 有:

$$\det \left[(1 + \sqrt{1 + \tau\eta_1}) \hat{\mathbf{m}}_1 - \eta_1 \mathbf{e}, \right.$$

$$\left. (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_2}) \hat{\mathbf{m}}_2 - \eta_2 \mathbf{e}, \right.$$

$$\left. (1 + \sqrt{1 + \tau\eta_3}) \hat{\mathbf{m}}_3 - \eta_3 \mathbf{e} \right] = 0$$

$$\propto \det \left[\hat{\mathbf{m}}_1 + \frac{1 - \sqrt{1 + \tau\eta_1}}{\tau} \mathbf{e}, \right.$$

$$\hat{\mathbf{m}}_2 - \frac{1 - \sqrt{1 + \tau\eta_2}}{\tau} \mathbf{e},$$

$$\left. \hat{\mathbf{m}}_3 - \frac{1 - \sqrt{1 + \tau\eta_3}}{\tau} \mathbf{e} \right] = 0$$

$$\propto \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}}_{1x} & \hat{\mathbf{m}}_{2x} & \hat{\mathbf{m}}_{3x} \\ \hat{\mathbf{m}}_{1y} & \hat{\mathbf{m}}_{2y} & \hat{\mathbf{m}}_{3y} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\propto D_3\sqrt{\lambda_1} - D_2\sqrt{\lambda_2} + D_1\sqrt{\lambda_3} -$$

$$(1 + \tau)(D_3 - D_2 + D_1)rf^2 = 0 \quad (13)$$

其中, $b_i = (1 + \tau)rf^2 - \sqrt{\lambda_i}$, $\lambda_i = (1 + \tau)r^2f^4 + \tau(\hat{\mathbf{m}}_{ix}^2 + \hat{\mathbf{m}}_{iy}^2r^2)f^2 - 2\tau s\hat{\mathbf{m}}_{ix}\hat{\mathbf{m}}_{iy}f + \tau\hat{\mathbf{m}}_{iy}^2s^2$. 通过消去根号, 式 (13) 可以整理成一个关于有效焦距 f 的 16 次多项式方程. 如果 $s = \delta f$, 这个 16 次多项式方程变成一个关于 f^2 的 4 次方程.

3 标定算法

3.1 算法描述

利用约束方程 (6), 可以从三条或者三条以上空间直线的单幅图像标定任意单光心反射折射摄像机的内参数, 算法执行如下:

算法 1. 输入: L ($L \geq 3$) 条以上空间直线的图像点集 Q_i , $i = 1, 2, \dots, L$. 输出: 摄像机的 6 个内参数.

步骤 1. 从每个点集 Q_i , $i = 1, 2, \dots, L$ 中随机采样 M ($M \geq 2$) 组图像点, 每组由三个不同点组成.

步骤 2. 根据式 (6), 每组图像点建立一个约束方程 $\phi_i(\tau, \omega) = 0$, $i = 1, 2, \dots, L \times M$, 由这些约束方程建立目标函数 $\psi(\tau, \omega) = \sum_{i=1}^{L \times M} \phi_i(\tau, \omega)$.

步骤 3. 利用 Levenberg-Marquart 等优化方法最小化目标函数进行参数求解.

由于一条空间直线的反射折射图像可以对内参数提供最多三个自由度的约束, 因而, 当主点已知时, 对抛物镜面单光心反射折射摄像机, 利用约束方程 (12), 可以从一条空间直线单幅图像中的三组图像点 (每组三个) 线性标定其他三个未知参数. 利用多组图像点或多条直线可以提高计算的稳定性.

算法 2. 输入: L ($L \geq 1$) 条以上空间直线的图像点集、主点. 输出: 抛物镜面摄像机的 3 个内参数.

步骤 1. 从每个点集 Q_i , $i = 1, 2, \dots, L$ 中随机采样 M ($M \geq 2$) 组图像点, 每组由三个不同点组成.

步骤 2. 根据式 (12), 用每组图像点建立一个关于 $\hat{\omega}_{11}$, $\hat{\omega}_{22}$, $\hat{\omega}_{21}$ 的约束方程, 并利用 SVD (Singular value decomposition) 方法求解所构成的线性方程组.

步骤 3. 通过对矩阵 $\hat{\omega}^{-1}$ 进行 Cholesky 分解, 得到有效焦距 f 、纵横比 r 和倾斜因子 s .

在摄像机标定中, 焦距是最重要的参数. 例如, Sturm 等^[22] 在假定其他参数已知的情况下, 从两幅图像标定焦距. 对椭球面或双曲面单光心反射折射摄像机, 如果主点、纵横比、倾斜因子和镜面参数已知, 利用约束方程 (13), 可以从三个共线空间点的单幅图像确定有效焦距 f . 下面给出一种类似 RANSAC 的鲁棒标定算法.

算法 3. 输入: 1 条空间直线的图像点集 Q , 主点、纵横比、倾斜因子和镜面参数. 输出: 有效焦距 f .

步骤 1. 从点集 Q 中随机采样 M ($M \geq 1$) 组图像点, 每组由三个不同点组成.

步骤 2. 根据式 (13), 用每组图像点确定一个多项式方程, 并求得一个有效焦距的估计值.

步骤 3. 为去掉极端的估计, 对 M 个估计值排序, 丢弃前后各 k ($k < M/2$) 个估计值.

步骤 4. 对剩余每个估计值, 根据式 (4) 确定点集 Q 在单位视球上的投影, 并确定一个平面通过球心 O 和这些投影点.

步骤 5. 对剩余每个估计值, 计算相应的投影点到所确定平面的平均距离, 对应最小平均距离的估计值即为该算法的输出.

注 1. 在以上三个算法中, 为提高计算的稳定性, 采样一组图像点时应尽可能使三个点分散开. 在算法 3 的步骤 2 中, 尽管每个方程有多个根, 但只有一个是有用的, 其他都接近 0 或为复根.

注 2. 在算法 3 的步骤 4 和步骤 5 中, 假定平面的单位法向量为 \mathbf{n} , 投影点集为 $\{\mathbf{X}_i^s, i = 1, 2, \dots, m\}$, 可以建立如下方程:

$$A\mathbf{n} = 0, \quad \|\mathbf{n}\| = 1 \quad (14)$$

其中, $A = [\mathbf{X}_1^s - \mathbf{O}, \mathbf{X}_2^s - \mathbf{O}, \dots, \mathbf{X}_m^s - \mathbf{O}]^T$. 利用 SVD 方法, 单位法向量 \mathbf{n} 为最小奇异值对应的奇异向量, 最小奇异值即为从这些投影点到所确定平面的距离之和.

注 3. 算法 3 类似于 RANSAC, 因而采样次数 M 也可以按 RANSAC 方法确定, 本文取 M 为 50, k 为 20.

注 4. 由于检测到的不同直线的像可能有不同的信噪比, 因而算法 3 在实际应用中可以利用多条直线的像分别估计有效焦距, 然后按步骤 5 中的最小平均距离确定最优估计.

3.2 初始估计

随着制造工艺与技术的不断提高, 摄像机的一些内参数可以根据对场景或系统配置的先验信息得到. 如主点可设为图像中心或由反射镜面边缘的像^[10] 很好地确定, 畸变因子为 0, 纵横比为 1 等. 本节我们主要讨论利用摄像机中反射镜面的配置进行摄像机内参数的初始估计.

由于反射镜面的离心率 ε 通常是已知的, 因此, 镜面参数 ξ 可以由 ε 求得^[4]:

$$\xi = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \quad (15)$$

摄像机的镜面边缘在球模型中对应着一个与虚拟针孔像机光轴垂直的圆 (图 2 中的圆 O^b), 其投影是一个椭圆 (称为边界椭圆), 椭圆中心即为主点. 一般来说, 不同于一条空间直线的像, 边界椭圆是一条较完整的二次曲线 (见图 4(a)、图 5(a)), 因而能够较好地拟合出它的代数方程. 在文献 [10, 12, 14] 中, 摄像机的部分内参数就是利用边界椭圆来确定. 假设边界椭圆表示为

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f' = 0 \quad (16)$$

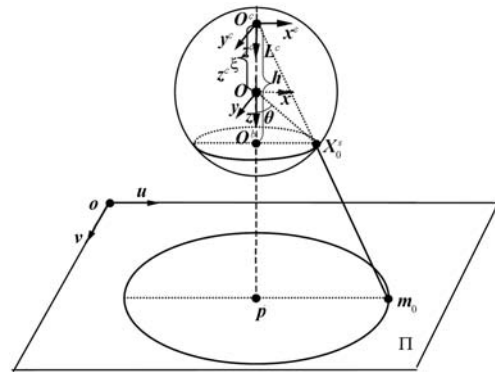


图 2 初始估计

Fig. 2 Initial estimation

文献 [14] 的作者给出了以下初始估计:

$$\begin{cases} r = \sqrt{-\frac{b^2}{a^2} + \frac{c}{a}} \\ \frac{s}{f} = -\frac{b}{a} \\ u_0 = \frac{be - cd}{ac - b^2} \\ v_0 = \frac{bd - ae}{ac - b^2} \end{cases} \quad (17)$$

这些信息已满足算法 2 和算法 3 的需求, 而对算法 1 来说, 还需要 f 和 s 的初始值. 通常摄像机的视角 (FOV) 大致已知, 如图 2 所示, 假设虚拟光心 O^c 到反射镜面边缘中心 O^b 之间的距离为 h , 圆的半径为 q , q 和 h 可以通过 FOV 来确定, 即 $q = \sin(\theta)$, $h = \xi + \cos(\theta)$, $\theta = \text{FOV}/2$, 则在虚拟针孔摄像机坐标系下, 点 $X_0^s = [q, 0, h]^T$ 的投影为

$$m_0 = \lambda K X_0^s = \left[\frac{rfq}{h} + u_0, v_0, 1 \right]^T \quad (18)$$

m_0 是直线 $v = v_0$ 与边界椭圆的一个交点. 因此, 通过式 (15)~(18), 可以确定所有的参数.

4 实验

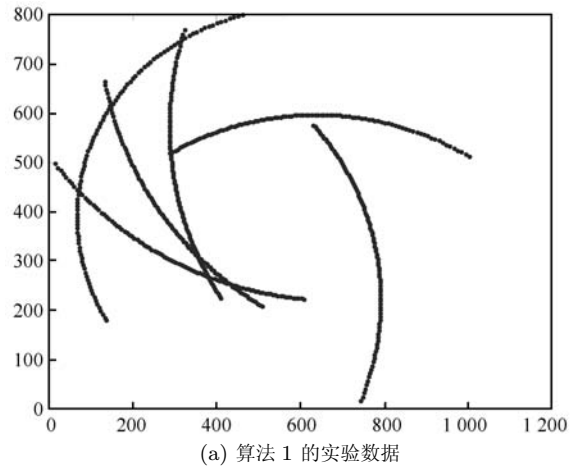
4.1 模拟数据

4.1.1 算法 1 的实验

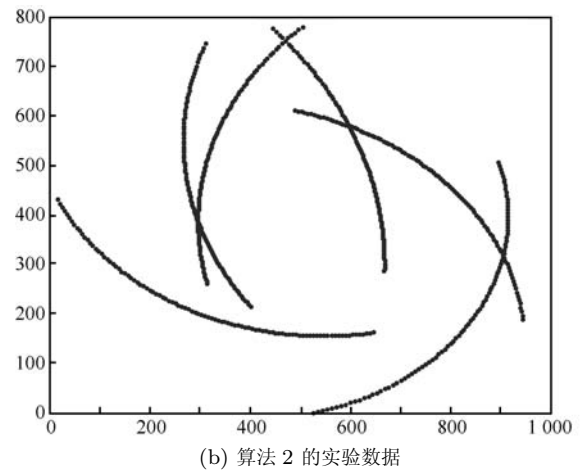
模拟反射折射摄像机的内参数为 $(rf, f, s, u_0, v_0, \xi) = (500, 400, 1, 512, 384, 0.96)$, 6 条空间直线的图像由单位球上随机选取的 6 个大圆投影产生. 为模拟实际情况, 从每个大圆的三分之一部分选择了 100 个点, 并将这些点投影到反射折射图像平面. 图 3(a) 显示的是实验中所使用的空间直线的模拟图像. 为每个图像点添加均值为 0、标准差为 σ 的高斯噪声, 噪声水平 σ 从 0 到 5 个像素, 按步长 1 个像素递增. 在每个噪声水平下, 分别做 100 次独立实验. 在每次独立实验中, 对每条直线的图像随机采样 50 组图像点, 每组 3 个, (rf, f, u_0, v_0) 的初始值都在以其真实值为中心, 以 100 像素为半径的范围内按均匀分布采样获得, 畸变因子 s 的初值为 0. 由于镜面参数通常能很精确地得到, 我们只标定这 5 个内参数. 在每个噪声水平下参数估计的均值和方差显示于表 1 中, 从表 1 中可以看出, $\sigma = 0$ 时, 估计结果是精确的, 估计的精度随噪声水平的提高而缓慢降低, 畸变因子 s 的误差最大. 这是因为, 相对焦距和主点而言, 畸变因子的值非常小, 因而它对噪声最为敏感, 计算最不稳定. 所幸的是, 由于制造工艺水平的提高, 畸变因子 s 的真实值非常小, 对成像的影响可以忽略, 实际应用中往往将其设为 0 以简化问题求解, 提高算法的稳定性. 当我们将畸变因子 s 设置为已知零值时, 其他参数的估计精度也有了较大的提高.

为了与利用二次曲线拟合实现标定的算法进行比较, 我们也用模拟数据执行了文献 [11] 中的算法 (称为 CP). 其中, 直线像的二次曲线拟合采用传统的二次曲线拟合方法. 当图像噪声 $\sigma = 0$ 时, 估计结果是精确的, 而当 $\sigma = 1$, 即加入 1 个像素的噪声时, 该算法则不能得到标定结果. 这是由于我们

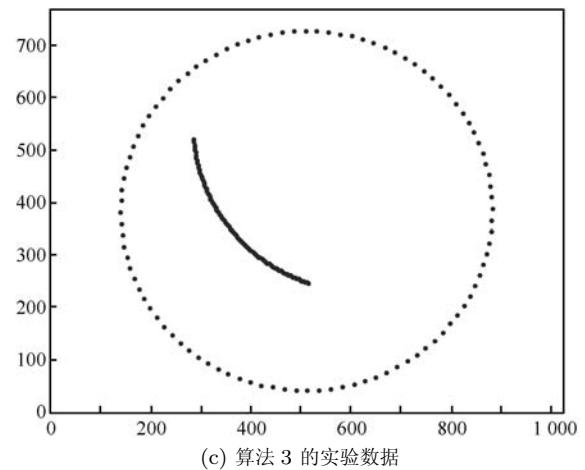
模拟生成的直线的像仅占整个二次曲线的一小段, 而利用一小段采样点的二次曲线拟合对噪声非常敏感.



(a) The simulated data for Algorithm 1



(b) The simulated data for Algorithm 2



(c) The simulated data for Algorithm 3

图 3 模拟数据

Fig. 3 Simulated data

4.1.2 算法 2 的实验

模拟抛物面反射折射摄像机的内参数为 $(rf, f, s, u_0, v_0, \xi) = (500, 400, 1, 512, 384, 1)$, 按照上述过程生成 6 条空间直线的像如图 3(b), 噪声的变化如第 4.1.1 节, 在每个噪声水平下, 分别做 100 次独立实验. 在每次独立实验中, 对每条直线的图像随机采样 50 组图像点, 假定主点已知, 在给图像点加噪声的同时, 也给主点 $(u_0, v_0) = (500, 400)$ 加上同样水平的噪声. 在每个噪声水平下参数估计的均值和方差显示于表 2 中. 可以看出, 在每个噪声水平下, 有效焦距和纵横比的均值非常接近真值, 方差随噪声水平的提高而逐渐提高, 与算法 1 相同, 畸变因子 s 的误差较大.

4.1.3 算法 3 的实验

模拟反射折射摄像机的内参数为 $(rf, f, s, u_0, v_0, \xi) = (260, 240, 1, 512, 384, 0.96)$, 假定其他参数已知, 仅标定有效焦距. 随机产生一条空间直线的图像, 如图 3(c) 所示. 噪声的变化仍如 4.1.1 节, 在每个噪声水平下, 分别做 100 次独立实验. 在每次独立实验中, 随机采样 50 组图像点, 在给图像点

加噪声的同时, 也给主点加上同样水平的噪声, 并且对其他参数进行相应的扰动. 有效焦距估计的均值和方差随噪声水平变化的分布显示于表 3 中. 可以看出, 均值和方差的变化与第 4.1.2 节中相似. 上述几组实验的结果表明: 所提出的算法是有效且鲁棒的.

4.2 真实数据

实验中算法 1 的初始值、算法 2 和算法 3 中部分参数的先验值都按照第 3.2 节进行估计, 边界椭圆的拟合采用文献 [23] 中的方法.

图 4(a) 中显示的是一幅室内场景的双曲面反射折射图像, 分辨率为 2048 像素 \times 1536 像素. 所用的双曲面反射折射摄像机由一台 NIKON COOLPIX990 数码相机和一个旋转双曲面反射镜面构成, 反射镜面由捷克技术大学视觉与听觉信息中心设计, 摄像机的视角为 217.2 度, 双曲面离心率为 1.302, 对应的镜面参数 $\xi = 0.966$. 手工选取了 5 条直线的像显示于图 4(a). 首先, 用算法 3 进行标定, 结果为 $(rf, f, s, u_0, v_0) = (555.6, 556.2, -0.5, 1017, 753)$, 然后, 用算法 1 对

表 1 算法 1 的估计结果

Table 1 The estimation results using Algorithm 1

Noise	0	1	2	3	4	5
rf	500 ± 0	500.4 ± 1.7	501.8 ± 3.3	502.9 ± 5.3	506.6 ± 6.2	508.9 ± 9.7
f	400 ± 0	400.2 ± 0.6	400.3 ± 1.3	401.1 ± 1.9	402.7 ± 2.8	403.5 ± 3.8
u_0	512 ± 0	512.7 ± 1.9	514.4 ± 3.7	517.8 ± 5.1	521.4 ± 7.7	525.1 ± 8.8
v_0	384 ± 0	383.7 ± 1.5	382.9 ± 2.8	381.6 ± 3.9	379.9 ± 6.1	378 ± 8.1
s	1 ± 0	0.82 ± 0.8	0.90 ± 0.83	1.03 ± 0.82	1.05 ± 0.83	1.2 ± 0.70

表 2 算法 2 的估计结果

Table 2 The estimation results using Algorithm 2

Noise	0	1	2	3	4	5
f	400 ± 0	400.11 ± 0.6	400.22 ± 1.4	400.37 ± 2.0	400.02 ± 2.9	400.13 ± 3.0
r	1.25 ± 0	1.250 ± 0.005	1.250 ± 0.005	1.251 ± 0.014	1.253 ± 0.019	1.262 ± 0.022
s	1 ± 0	0.96 ± 0.79	0.71 ± 2.16	0.77 ± 2.92	0.89 ± 3.96	0.87 ± 4.88

表 3 算法 3 的估计结果

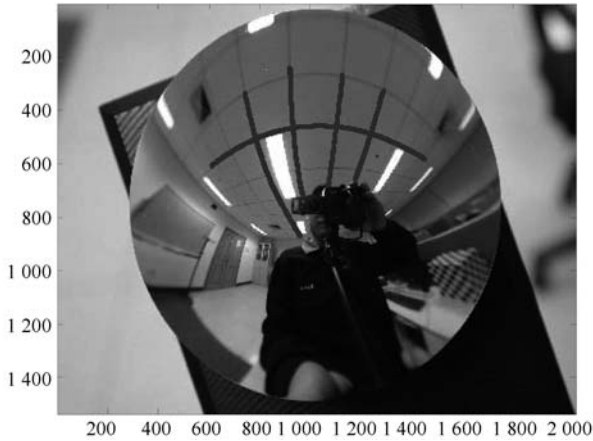
Table 3 The estimation results using Algorithm 3

Noise	0	1	2	3	4	5
f	240 ± 0.53	240.2 ± 1.49	240.8 ± 3.03	240.8 ± 3.62	241.4 ± 5.64	241.8 ± 8.39

该结果进行优化, 结果为 $(rf, f, s, u_0, v_0) = (561.8, 550.3, 0.8, 1047.3, 756.7)$. 可以看出, 优化后结果变化不大. 为了验证算法的有效性, 我们利用算法 3 的标定结果对原始图像进行了校正, 由于视角较大, 仅在图 4(b) 中显示部分视角的校正图像, 可以看出校正后的线是直的. 我们也利用文献 [11] 中的 CP 算法进行标定, 由于目前双曲面反射折射图像中直线的像二次曲线拟合还没有有效的方法, 我们采用最小二乘法拟合直线的像二次曲线, 标定结果无解.

优化的结果同样变化不大. 利用算法 2 的结果对原始图像进行了校正, 校正后的图像显示于图 5(b) 中, 可以看出校正后的线是直的. 用文献 [11] 中的 CP 算法进行了标定, 由于文献 [19] 针对抛物镜面反射折射摄像机提出的直线的像二次曲线拟合方法比较有效, 因此, 采用该方法进行曲线拟合. 标定的结果为 $(rf, f, s, u_0, v_0, \xi) = (367.7, 324, 19.8, 534.4, 402, 1.08)$, 利用该结果校正后的图像显示在图 5(c) 中, 可以看出其中几条线仍然不直. 进一步, 我们在采用该方法进行曲线拟合时, 利用先验知识纵横比为 1, 并利用拟合到的二次曲线进行标定, 标定结果为 $(rf, f, s, u_0, v_0, \xi) = (319.3, 319.3, -0.0225, 516.9, 394.1, 1)$, 利用该结果校正后的图像显示在图 5(d) 中. 可以看出标定结果和校正图像都与算法 2 的结果相近.

从这两例可以看出, 直线的像二次曲线拟合是一些利用直线的标定算法标定精度不高的主要因素, 而利用一些先验知识往往能够提高问题的可解性和解的精度.



(a) 用于标定摄像机内参数的直线的图像

(a) The used line images



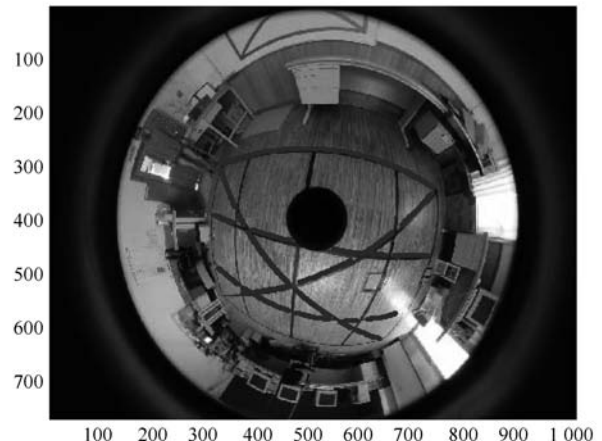
(b) 利用算法 3 的结果校正后的图像

(b) Rectified image by the calibration result using Algorithm 3

图 4 双曲面反射折射摄像机

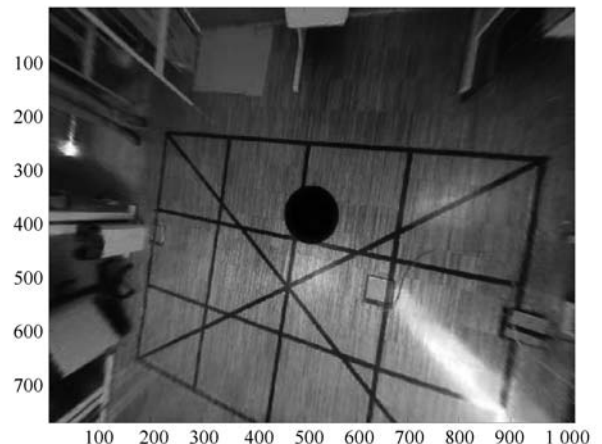
Fig.4 Hypercatadioptric camera

图 5(a) 显示了一幅从 <http://mail.isr.uc.pt/~carloss/software/software.htm> 上下载的分辨率为 1024 像素 \times 768 像素的抛物镜面反射折射摄图像. 在图像中手工选择 5 条直线的图像如图 5(a) 中所示. 利用算法 2 进行了标定, 标定的结果为 $(rf, f, s, u_0, v_0) = (316.7, 318.6, -0.36, 520.2, 395.8)$, 利用算法 1



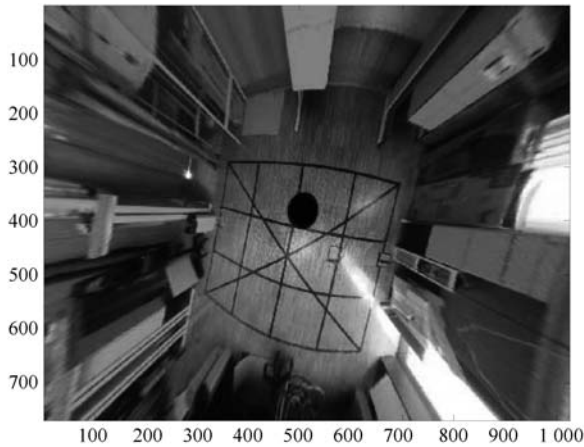
(a) 用于标定摄像机内参数的直线的图像

(a) The used line images



(b) 利用算法 2 的结果校正后的图像

(b) Rectified image by the calibration result using Algorithm 2



(c) 利用 CP 算法的结果校正后的图像

(c) Rectified image by the result using CP

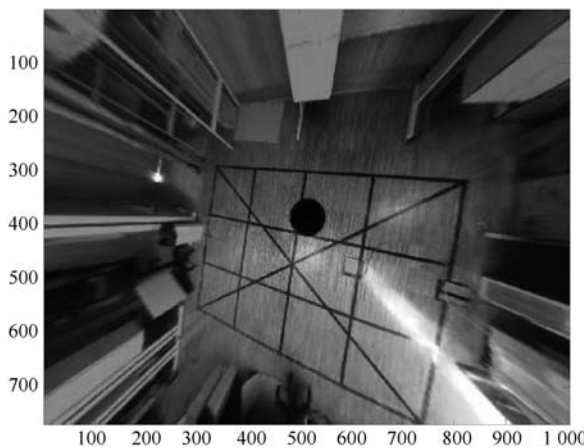
(d) 已知 $r = 1$ 时利用 CP 算法标定后的校正图像(d) Rectified image by the result using CP with $r = 1$

图 5 抛物镜面反射折射摄像机

Fig. 5 Paracatadioptric camera

5 结论

大多数利用直线进行单光心反射折射摄像机标定的方法都需要对直线的像进行二次曲线拟合, 标定的精度严重依赖于这些曲线拟合的精度, 这使得摄像机标定的精度较低, 甚至经常无解. 本文利用空间三个共线点的反射折射投影给出了摄像机内参数的一个非线性约束; 当反射镜面为抛物面时, 在主点已知的情况下, 该约束变为线性约束; 如其他参数已知, 该约束变为关于有效焦距的多项式约束. 由此, 我们提出了三个不同条件下的标定算法. 算法中无需对直线的像进行二次曲线拟合, 无需场景的任何信息, 具有较高的灵活性和标定精度. 模拟和真实实验验证了算法的有效性.

References

1 Yagi Y, Yachida M. Real-time omnidirectional image sensors. *International Journal of Computer Vision*, 2004, **58**(3):

173–207

- 2 Swaminathan R, Grossberg M D, Nayar S. Non-single viewpoint catadioptric cameras: geometry and analysis. *International Journal of Computer Vision*, 2006, **66**(3): 211–229
- 3 Baker S, Nayar S. A theory of single-viewpoint catadioptric image formation. *International Journal of Computer Vision*, 1999, **35**(2): 175–196
- 4 Geyer C, Daniilidis K. Catadioptric projective geometry. *International Journal of Computer Vision*, 2001, **45**(3): 223–243
- 5 Wu Y H, Hu Z Y. Geometric invariants and applications under catadioptric camera model. In: Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Computer Vision. Beijing, China: IEEE, 2005. 1547–1554
- 6 Scaramuzza D, Martinelli A, Siegwart R. A flexible technique for accurate omnidirectional camera calibration and structure from motion. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision Systems. Washington D. C., USA: IEEE, 2006. 45–45
- 7 Gasparini S, Sturm P, Barreto J. Plane-based calibration of central catadioptric cameras. In: Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Computer Vision. Kyoto, Japan: IEEE, 2009. 1195–1202
- 8 Sturm P, Ramalingam S. A generic concept for camera calibration. In: Proceedings of the European Conference on Computer Vision. Prague, Czech Republic: Springer, 2004. 1–13
- 9 Ramalingam S, Sturm P, Lodha S K. Towards generic self-calibration of central cameras. In: Proceedings of the 6th Workshop on Omnidirectional Vision Camera Networks and Nonclassical Cameras. Beijing, China: IEEE, 2005. 20–27
- 10 Kang S B. Catadioptric self-calibration. In: Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Hilton Head Island, USA: IEEE, 2000. 201–207
- 11 Barreto J P, Araujo H. Geometric properties of central catadioptric line images and their application in calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(8): 1327–1333
- 12 Geyer C, Daniilidis K. Catadioptric camera calibration. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. Kerkyra, Greece: IEEE, 1999. 398–404
- 13 Geyer C, Daniilidis K. Para catadioptric camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, **24**(5): 687–695
- 14 Ying X H, Hu Z Y. Catadioptric camera calibration using geometric invariants. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, **26**(10): 1260–1271
- 15 Wu F C, Duan F Q, Hu Z Y, Wu Y H. A new linear algorithm for calibrating central catadioptric cameras. *Pattern Recognition*, 2008, **41**(10): 3166–3172

- 16 Ying X H, Zha H B. Identical projective geometric properties of central catadioptric line images and sphere images with applications to calibration. *International Journal of Computer Vision*, 2008, **78**(1): 89–105
- 17 Duan F Q, Wu F C, Hu Z Y. Pose determination and plane measurement using a trapezium. *Pattern Recognition Letters*, 2008, **29**(3): 223–231
- 18 Deng Xiao-Ming, Wu Fu-Chao, Wu Yi-Hong. An easy calibration method for central catadioptric cameras. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(8): 801–808
- 19 Barreto J P, Araujo H. Fitting conics to paracatadioptric projection of lines. *Computer Vision and Image Understanding*, 2006, **101**(3): 151–165
- 20 Wu Y H, Li Y F, Hu Z Y, Easy calibration for paracatadioptric-like camera. In: Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Beijing, China: IEEE, 2006. 5719–5724
- 21 Ying X H, Zha H B. Simultaneously calibrating catadioptric camera and detecting line features using Hough transform. In: Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Edmonton, Canada: IEEE, 2005. 412–417
- 22 Sturm P, Cheng Z L, Chen P C Y, Poo A N. Focal length calibration from two views: method and analysis of singular cases. *Computer Vision and Image Understanding*, 2005, **99**(1): 58–95
- 23 Fitzgibbon A, Pilu M, Fisher R B. Direct least square fitting of ellipses. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, **21**(5): 476–480



段福庆 博士, 北京师范大学信息学院副教授. 主要研究方向为摄像机标定, 模式识别与机器学习. 本文通信作者.

E-mail: fqduan@bnu.edu.cn

(DUAN Fu-Qing Ph. D., associate professor at the College of Information Science and Technology, Beijing Normal University. His research interest

covers camera calibration, pattern recognition, and machine learning. Corresponding author of this paper.)



吕科 博士, 中国科学院研究生院计算与通信工程学院教授. 主要研究方向为计算机图形学, 数字图像处理, XBRL 技术与应用. E-mail: luk@gucas.ac.cn

(LV Ke Ph. D., professor at the College of Computing and Communication Engineering, Graduate University of Chinese Academy of Sciences. His

research interest covers computer graphics, image processing, and XBRL technology and applications.)



周明全 北京师范大学信息学院教授. 主要研究方向为虚拟现实, 三维可视化.

E-mail: mqzhou@bnu.edu.cn

(ZHOU Ming-Quan Professor at the College of Information Science and Technology, Beijing Normal University. His research interest covers virtual reality and 3D Visualization.)