

机器人系统非线性分散重复学习轨迹跟踪控制

田慧慧¹ 苏玉鑫¹

摘要 采用一类具有“小误差放大、大误差饱和”功能的非线性饱和函数来改进传统重复学习控制 (Repetitive control, RC) 机器人系统动力学控制, 形成一类新的非线性分散重复学习控制 (Nonlinear decentralized repetitive control, NRC), 使得在不增加驱动力矩的条件下获得了更快的响应速度和更高的轨迹跟踪精度. 应用 Lyapunov 直接稳定性理论和 LaSalle 不变性原理证明了闭环系统的全局渐近稳定性. 三自由度机器人系统数值仿真结果表明了所提出的非线性分散重复学习控制具有良好的控制品质.

关键词 机器人控制, 轨迹跟踪, 重复学习控制, 分散控制, 全局渐近稳定性

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01264

Nonlinear Decentralized Repetitive Control for Global Asymptotic Tracking of Robot Manipulators

TIAN Hui-Hui¹ SU Yu-Xin¹

Abstract A new kind of nonlinear decentralized repetitive control (NRC) for robot manipulators is proposed to give faster response and higher tracking precision over the commonly used repetitive control (RC) without increased torque. The proposed NRC is formulated with a class of nonlinear saturated functions with the characteristics of “enlargement of small error and saturated in large error”. The global asymptotic stability of the resulting closed-loop system is proved by the Lyapunov’s direct method and LaSalle invariance principle. The simulation results on a three degree-of-freedom robot illustrate the effectiveness and improved performance of the proposed controller.

Key words Robot control, tracking control, repetitive control (RC), decentralized control, global asymptotic stability

机器人系统是一个典型的高度非线性、强耦合的动力学系统, 其高精度控制问题一直是工业自动化领域研究的热点. 随着工业自动化水平和对运动精度要求的不断提高, 机器人系统的高精度控制得到了快速发展^[1-2]. 同时, 机器人系统经常会执行具有重复性质的任务, 需要跟踪周期性参考输入或抑制周期性扰动 (例如: 执行诸如搬运、装配、喷涂等重复操作的工业机器人). 重复学习控制是 20 世纪 80 年代提出的一种源于内模原理^[3], 能够精确跟踪周期性参考输入和抑制周期性扰动的控制方案. 该方案的实现不需要精确已知系统动力学模型.

鉴于机器人系统周期性运动的特点以及重复学习控制特有的性质, 作为机器人系统高精度运动的有效控制策略, 重复学习控制近年来受到越来越多学者的关注^[4-7]. Kasac 等^[4] 提出的一类基于无源性设计的重复学习控制策略, 保证了闭环系统对模型不确定性和外扰的鲁棒性, 并且获得了较快的收

敛速度. 文献 [5-6] 将自适应技术引入传统的重复学习控制, 形成了一类混合学习控制方案, 具有更强的学习能力, 获得了更好的跟踪效果. Liu 等^[7] 提出的基于滑模的重复学习控制器较之于传统的学习控制具有更强的鲁棒性.

虽然上述重复学习控制都取得了不错的效果, 但有一点不足的是控制器采取集中控制方式. 众所周知: 由于非线性机器人系统各关节的高度耦合, 使得我们不能将整个机器人系统分解为一些其状态和输入转矩都独立的子系统, 所以机器人系统的分散控制不易实现^[8-11]. 因此大多数重复学习控制器采取集中控制方式, 这种耦合控制器结构十分复杂且难于工程实现.

本文提出了一种简单易行的非线性机器人系统非线性分散重复学习控制策略. 相比于上述的重复学习控制, 本文的控制器具有分散的结构形式, 易于实现并有很高的容错性和可靠性. 另外, 本文提出的控制算法显著提高了系统的控制品质, 使得机器人系统具有更快的响应速度、更高的轨迹跟踪精度以及更强的鲁棒性, 并能最大限度地克服驱动器饱和带来的潜在影响.

1 机器人系统动力学模型与特性

含 n 自由度旋转关节的非线性机器人系统的动

收稿日期 2011-03-04 录用日期 2011-05-17
Manuscript received March 4, 2011; accepted May 17, 2011
国家自然科学基金 (50675167) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (50675167)

1. 西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071
1. School of Electro-Mechanical Engineering, Xidian University, Xi’an 710071

力学模型可描述为^[2]

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$ 分别为关节位置、速度和加速度向量; $M(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为对称正定惯性矩阵; $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为哥氏力和离心力矩阵; $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^n$ 为重力向量; $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ 为控制力矩向量。

非线性机器人系统 (1) 通常具有如下结构特性:

特性 1^[2, 4, 12-13]. 惯性矩阵 $M(\mathbf{q})$ 对称正定, 即

$$\lambda_m(M) \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \leq \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \leq \lambda_M(M) \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \quad (2)$$

其中, $\lambda_M(\cdot)$ 和 $\lambda_m(\cdot)$ 分别表示对称正定矩阵的最大和最小特征值, $\|\cdot\|$ 表示标准的欧几里德范数。

特性 2^[4, 12-13]. $\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为反对称矩阵, 即

$$\xi^T (\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \xi = 0, \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \xi \in \mathbf{R}^n \quad (3)$$

特性 3^[13]. 哥氏力和离心力矩阵 $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 满足如下关系:

$$C(\mathbf{q}, \xi)\mathbf{v} = C(\mathbf{q}, \mathbf{v})\xi, \quad \forall \mathbf{q}, \xi, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n \quad (4)$$

$$\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq \zeta_{c1} \|\dot{\mathbf{q}}\|, \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n \quad (5)$$

其中, ζ_{c1} 为正常数。

为了后续分析的方便, 首先定义向量 $\mathbf{Tanh}(\cdot) \in \mathbf{R}^n$ 和正定对角矩阵 $\mathbf{Sech}(\cdot) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为

$$\mathbf{Tanh}(\xi) = [\tanh(\xi_1), \dots, \tanh(\xi_n)]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{Sech}(\xi) = \text{diag}\{\text{sech}(\xi_1), \dots, \text{sech}(\xi_n)\} \quad (7)$$

其中, $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T \in \mathbf{R}^n$, $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵, $\tanh(\cdot)$, $\text{sech}(\cdot) \in \mathbf{R}$ 分别为双曲正切和正割函数。根据式 (7), 我们可以得到

$$\lambda_M(\mathbf{Sech}^2(\xi)) = 1 \quad (8)$$

特性 4^[13]. 对于任意的 $\xi, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, 存在正的常数 ζ_m , ζ_g 和 ζ_{c2} , 使得下式成立:

$$\|M(\xi) - M(\mathbf{v})\| \leq \zeta_m \|\mathbf{Tanh}(\xi - \mathbf{v})\|$$

$$\|\mathbf{g}(\xi) - \mathbf{g}(\mathbf{v})\| \leq \zeta_g \|\mathbf{Tanh}(\xi - \mathbf{v})\| \quad (9)$$

$$\|C(\xi, \dot{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq \zeta_{c2} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{Tanh}(\xi - \mathbf{v})\|$$

周期为 T 的 C^2 光滑的连续参考输入 $\mathbf{q}_d(t)$ 可以表示为如下傅里叶级数形式^[4]:

$$\mathbf{q}_d(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{\bar{N}} [\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)] \quad (10)$$

其中, $\omega = (2\pi/T)$ 为基频, \bar{N} 为谐波分量的项数, \mathbf{a}_0 , \mathbf{a}_k 和 \mathbf{b}_k 分别为已知常向量。

对于 C^2 光滑的连续期望轨迹 $\mathbf{q}_d(t)$, 若定义关节位置和速度误差 $\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \in \mathbf{R}^n$ 分别为

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d, \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d \quad (11)$$

则本文要解决的问题可描述为: 设计非线性分散重复学习控制律 \mathbf{u} , 使得对于任意初值 $(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0))$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 使得 $\tilde{\mathbf{q}}(t) \rightarrow 0$ 和 $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \rightarrow 0$ 。

2 控制器设计

2.1 非线性分散重复学习控制律

为了后续设计和分析的方便, 首先提出如下的一类近似势能函数^[12]:

$$S(x) = \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(\alpha-1)\delta^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}, & \delta < |x| < \beta \\ \frac{\delta^{\alpha-1}x^2}{2}, & |x| \leq \delta \\ \beta^\alpha |x| + \frac{(\alpha-1)\delta^{\alpha+1} - 2\alpha\beta^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}, & |x| \geq \beta \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\alpha, \delta \in (0, 1]$, $\beta > \delta$ 为设计参数。

将式 (12) 对 x 求导, 可得到如下所示的一类非线性饱和函数:

$$s(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \text{sgn}(x), & \delta < |x| < \beta \\ \delta^{\alpha-1}x, & |x| \leq \delta \\ \beta^\alpha \text{sgn}(x), & |x| \geq \beta \end{cases} \quad (13)$$

其中, $\text{sgn}(\cdot)$ 为标准的符号函数。

对于式 (12) 和 (13) 所示的 $S(x)$ 和 $s(x)$ 非线性函数, 有如下的引理:

引理 1. 函数 $S(x)$ 和 $s(x)$ 有如下性质:

1) $S(x)$ 连续二次可微, 若 $x \neq 0$, 则 $S(x) > 0$; 若 $x = 0$, 则 $S(x) = 0$ 和 $s(x) = 0$ 。

2) 对于 $x \neq 0$, 存在正常数 $\kappa > 0$, 使得下式成立:

$$S(x) \geq \kappa s^2(x) > 0 \quad (14)$$

3) 对于任意的 x 有下式成立:

$$|s(x)| \geq |\tanh(x)| \quad (15)$$

证明. 通过简单的运算即可证明上述性质。□

应用式 (13) 所示的非线性函数, 提出如下的非线性分散重复学习控制律:

$$u_i = -k_{pi}s(\tilde{q}_i) - k_{di}\dot{\tilde{q}}_i - k_{ii}z_{0i} - \sum_{k=1}^{\bar{N}} q_{ki}\dot{z}_{ki} \quad (16)$$

$$\ddot{z}_{ki} + k^2\omega^2 z_{ki} = q_{ki}\dot{z}_{0i}, \quad k = 1, \dots, \bar{N} \quad (17)$$

$$\dot{z}_{0i} = \dot{\tilde{q}}_i + a \tanh(\tilde{q}_i) \quad (18)$$

其中, u_i 为第 i 关节的控制输入, k_{pi} 与 k_{di} 分别为恒定的正的比例和微分增益, k_{ii} 与 q_{ki} 为恒定正的重复学习控制增益, \tilde{q}_i 和 $\dot{\tilde{q}}_i$ 分别为式 (11) 定义的轨迹跟踪误差 $\tilde{\mathbf{q}}$ 和 $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ 的第 i 个分量, ω 如式 (10) 所定义, a 为正常数, N 为谐振子的个数.

对于 C^2 光滑的连续期望轨迹 $\mathbf{q}_d(t)$, 期望速度 $\dot{\mathbf{q}}_d$ 和期望加速度 $\ddot{\mathbf{q}}_d$ 的范数存在上界, 分别记为 $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M$ 和 $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M$. N 个级联的谐振子 (17) 和积分器 (18) 代表可以产生周期性参考信号 $\mathbf{q}_d(t)$ 以及由于机器人非线性动态特性所引起的高次谐波的内模, 根据内模原理闭环系统在 $N \geq \bar{N}$ 时可获得较好的跟踪效果^[4], 这一点在仿真结果中也可明显看出.

2.2 闭环系统误差方程

机器人系统动力学模型 (1) 可以写为如下形式:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \mathbf{u} - \mathbf{f}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \quad (19)$$

其中,

$$\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = [M(\mathbf{q}) - M(\mathbf{q}_d)]\ddot{\mathbf{q}}_d + [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)]\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \quad (20)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) = M(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \quad (21)$$

周期函数 $\mathbf{f}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)$ 具有与 $\mathbf{q}_d(t)$ 相同的基频, 可以用无限傅里叶级数展开如下:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) = \bar{\mathbf{a}}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{\mathbf{a}}_k \cos(k\omega t) + \bar{\mathbf{b}}_k \sin(k\omega t)] \quad (22)$$

其中, $\bar{\mathbf{a}}_0$, $\bar{\mathbf{a}}_k$ 和 $\bar{\mathbf{b}}_k$ 为未知常向量.

引入变量 $\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^*$, $k = 0, 1, \dots, N$, 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k &= [z_{k1}, \dots, z_{kn}]^T \in \mathbf{R}^n \\ \mathbf{z}_0^* &= -K_I^{-1}\bar{\mathbf{a}}_0 \\ \mathbf{z}_k^* &= k^{-1}\omega^{-1}Q_k^{-1}[\bar{\mathbf{b}}_k \cos(k\omega t) - \bar{\mathbf{a}}_k \sin(k\omega t)] \end{aligned} \quad (23)$$

应用式 (16) ~ (19), (22) 和 (23), 闭环系统的误差方程可表示为

$$M(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \bar{\mathbf{u}} + \bar{\omega} \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = -K_P \mathbf{s}(\tilde{\mathbf{q}}) - K_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - K_I \tilde{\mathbf{z}}_0 - \sum_{k=1}^N Q_k \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_k \quad (25)$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{z}}}_k + k^2 \omega^2 \tilde{\mathbf{z}}_k = Q_k \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_0, \quad k = 1, \dots, N \quad (26)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_0 = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + a \mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (27)$$

$$\bar{\omega} = - \sum_{k=N+1}^{\infty} [\bar{\mathbf{a}}_k \cos(k\omega t) + \bar{\mathbf{b}}_k \sin(k\omega t)] \quad (28)$$

其中, $K_P = \text{diag}\{k_{p1}, \dots, k_{pn}\}$, $K_D = \text{diag}\{k_{d1}, \dots, k_{dn}\}$, $K_I = \text{diag}\{k_{i1}, \dots, k_{in}\}$, $Q_k = \text{diag}\{q_{k1}, \dots, q_{kn}\}$, 即由恒定正的比例、微分和重复学习增益所组成的对角正定矩阵, 向量 $\mathbf{s}(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^n$ 定义如下

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\tilde{\mathbf{q}}) &= [s(\tilde{q}_1), \dots, s(\tilde{q}_n)]^T \\ \tilde{\mathbf{q}} &= [\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n]^T \in \mathbf{R}^n \end{aligned} \quad (29)$$

2.3 稳定性分析

对于式 (16) ~ (18) 所示的非线性分散重复学习控制的闭环系统 (24) ~ (28), 有如下的稳定性定理:

定理 1. 对于式 (1) 所示的非线性机器人系统, 应用所提出的非线性分散重复学习控制律 (16) ~ (18), 并选择控制器的比例和微分增益参数分别满足不等式 (30) ~ (32), 则当 $\bar{\omega} = 0$, 即 $N \rightarrow \infty$ 时可实现闭环系统的位置和速度跟踪误差的全局渐近收敛, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0$.

$$K_P \geq 2K^{-1}a^2\lambda_M(M)I \quad (30)$$

$$\lambda_m(K_P) > c_1 + \frac{1}{2}a\zeta_{c1}\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|_M + \frac{1}{2a}(c_1 + ac_2) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \lambda_m(K_D) &> a\lambda_M(M) + a\zeta_{c1}\sqrt{n} + \frac{1}{2}a\zeta_{c1}\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|_M + \\ &c_2 + \frac{1}{2}(c_1 + ac_2) \end{aligned} \quad (32)$$

其中, $K = \text{diag}\{\kappa, \dots, \kappa\}$, 可由引理 1 的式 (14) 确定, a 为如式 (18) 所示的正常数, I 为相应维数的单位矩阵, c_1 与 c_2 分别为如下所示的正常数:

$$c_1 = \zeta_m \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|_M + \zeta_{c2} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|_M^2 + \zeta_g \quad (33)$$

$$c_2 = \sqrt{n}\zeta_{c2} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|_M + \zeta_{c1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|_M \quad (34)$$

证明. 应用 Lyapunov 直接方法和 LaSalle 不变性原理来证明上述定理. 为此, 提出如下的候选 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + a \mathbf{Tanh}^T(\tilde{\mathbf{q}})M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \\ &\sum_{i=1}^n k_{pi} S(\tilde{q}_i) + a \sum_{i=1}^n k_{di} \ln(\cosh(\tilde{q}_i)) + \\ &\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}_0^T K_I \tilde{\mathbf{z}}_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_k^T \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N k^2 \omega^2 \tilde{\mathbf{z}}_k^T \tilde{\mathbf{z}}_k \end{aligned} \quad (35)$$

其中, $\ln(\cdot)$ 和 $\cosh(\cdot) \in \mathbf{R}$ 分别为自然对数和双曲余弦函数.

为了证明式 (35) 所示的候选 Lyapunov 函数的正定性, 首先考虑下式:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + a \mathbf{Tanh}^T(\tilde{\mathbf{q}}) M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{pi} S(\tilde{q}_i) = \\
& \frac{1}{4} (\dot{\mathbf{q}} + 2a \mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}}))^T M(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}} + 2a \mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}})) - \\
& a^2 \mathbf{Tanh}^T(\tilde{\mathbf{q}}) M(\mathbf{q}) \mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{pi} S(\tilde{q}_i) \geq \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{pi} S(\tilde{q}_i) - a^2 \mathbf{Tanh}^T(\tilde{\mathbf{q}}) M(\mathbf{q}) \mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}}) \geq \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\kappa k_{pi} - 2a^2 \lambda_M(M)] \tanh^2(\tilde{q}_i)
\end{aligned} \quad (36)$$

注意上式的推导利用了引理 1 的式 (14) 和 (15)。

将式 (36) 代入式 (35), 并应用式 (30) 和引理 1 的性质 1, 可得, 对于任意的 $\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\mathbf{q}}^T, \mathbf{z}_k^T \neq \mathbf{0}, k = 0, 1, \dots, N$, 有

$$\begin{aligned}
V \geq & \frac{1}{4} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\kappa k_{pi} - 2a^2 \lambda_M(M)] \times \\
& \tanh^2(\tilde{q}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{pi} S(\tilde{q}_i) + \\
& a \sum_{i=1}^n k_{di} \ln(\cosh(\tilde{q}_i)) + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}_0^T K_I \tilde{\mathbf{z}}_0 + \\
& \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{z}}_k^T \dot{\mathbf{z}}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N k^2 \omega^2 \tilde{\mathbf{z}}_k^T \tilde{\mathbf{z}}_k > 0 \quad (37)
\end{aligned}$$

即式 (35) 定义的候选 Lyapunov 函数是对于 $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{z}_k$ 正定的. 而且, 由式 (12) 的定义可知, $S(\cdot)$ 为正定的. 因此式 (35) 定义的候选 Lyapunov 函数是相对于 $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{z}_k$ 正则正定的.

式 (35) 沿闭环系统 (24) ~ (28) 对时间求导数, 可得:

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \\
& a (\text{Sech}^2(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + a \mathbf{Tanh}^T(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \\
& a \mathbf{Tanh}^T(\tilde{\mathbf{q}}) M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{s}^T(\tilde{\mathbf{q}}) K_P \dot{\mathbf{q}} + \\
& a \mathbf{Tanh}^T(\tilde{\mathbf{q}}) K_D \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{z}}_0^T K_I \dot{\mathbf{z}}_0 + \\
& \sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{z}}_k^T \dot{\mathbf{z}}_k + \omega^2 \sum_{k=1}^N k^2 \tilde{\mathbf{z}}_k^T \dot{\mathbf{z}}_k \quad (38)
\end{aligned}$$

将由式 (24) 求得的 $M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}$ 及由式 (26) 和 (27) 求得的 $\dot{\mathbf{z}}_k, \dot{\mathbf{z}}_0$ 代入式 (38), 并应用特性 2, 可得:

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\dot{\mathbf{q}}^T K_D \dot{\mathbf{q}} + a (\text{Sech}^2(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \\
& a \mathbf{Tanh}^T(\tilde{\mathbf{q}}) C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - a \mathbf{Tanh}^T(\tilde{\mathbf{q}}) K_P \mathbf{s}(\tilde{\mathbf{q}}) - \\
& (\dot{\mathbf{q}} + a \mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}}))^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (39)
\end{aligned}$$

应用特性 3 中式 (5) 和三角不等式 $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| +$

$\|\dot{\mathbf{q}}_d\|$, 则有:

$$\begin{aligned}
& a \mathbf{Tanh}^T(\tilde{\mathbf{q}}) C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \leq \\
& a \sqrt{n} \zeta_{c1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + a \zeta_{c1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M \|\mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad (40)
\end{aligned}$$

并且, 由特性 3 中式 (4) 和三角不等式 $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \|\dot{\mathbf{q}}_d\|$ 以及特性 4, 可得:

$$\|\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq c_1 \|\mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\| + c_2 \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad (41)$$

因此, 式 (39) 最后一项的上界为

$$\begin{aligned}
& -(\dot{\mathbf{q}} + a \mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}})) \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq \\
& a c_1 \|\mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 + c_2 \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \\
& (c_1 + a c_2) \|\mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad (42)
\end{aligned}$$

其中, c_1, c_2 如式 (33) 和 (34) 所定义.

将式 (40) 和 (42) 代入式 (39), 并应用式 (8) 和 (15), 可得

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -\dot{\mathbf{q}}^T K_D \dot{\mathbf{q}} + a \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \\
& a \zeta_{c1} \sqrt{n} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + a \zeta_{c1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M \|\mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \\
& a c_1 \|\mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 - a \mathbf{Tanh}^T(\tilde{\mathbf{q}}) K_P \mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}}) + \\
& c_2 \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + (c_1 + a c_2) \|\mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \leq \\
& -[\lambda_m(K_D) - (a \lambda_M(M) + a \zeta_{c1} \sqrt{n} + \\
& \frac{1}{2} a \zeta_{c1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M + c_2 + \frac{1}{2} (c_1 + a c_2))] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 - \\
& [a \lambda_m(K_P) - (a c_1 + \frac{1}{2} a \zeta_{c1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M + \\
& \frac{1}{2} (c_1 + a c_2))] \|\mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \quad (43)
\end{aligned}$$

那么, 由式 (31) 和 (32) 及 a 为一正常数的事实, 可得 $\dot{V} \leq 0$. 事实上, $\dot{V} = 0$ 意味着 $\mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$ 和 $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. 根据 LaSalle 不变性原理^[12], 可得对于任何初值 $(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0))$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}}) \rightarrow \mathbf{0}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \rightarrow \mathbf{0}$. 由双曲正切函数的特性可知 $\mathbf{Tanh}(\tilde{\mathbf{q}}) \rightarrow \mathbf{0}$ 等价于 $\tilde{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{0}$, 因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$. \square

注 1. 上述过程证明了 $\bar{\omega} = \mathbf{0}$ (其中 $\bar{\omega}$ 如式 (28) 所示) 时闭环系统的全局渐近稳定性, 即当 $N \rightarrow \infty$ 时闭环系统可实现渐近稳定跟踪; 但对于实际系统来说, N 只能取确定的常数, 使得 $\bar{\omega} \neq \mathbf{0}$, 此时我们可以把 $\bar{\omega}$ 看作外部扰动. 实际系统还存在其他如非线性摩擦等未建模非线性和外部扰动, 这些不确定性将会对系统的高精度运动控制和稳定性产生负面影响. 而本文所提出的非线性分散重复学习控制器

使得闭环系统具有 L_2 稳定性, 其中表征扰动衰减能力的 L_2 增益为 $\gamma \leq (1/\delta_0)$ (证明过程类似于文献 [4] 中的证明, 在此不再详述), 其中

$$\delta_0 \leq \frac{a_1 a_2}{a_2 + a^2 a_1} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_m(K_D) - (a\lambda_M(M) + a\zeta_{c1}\sqrt{n} + \\ &\quad \frac{1}{2}a\zeta_{c1}\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M + c_2 + \frac{1}{2}(c_1 + ac_2)) \\ a_2 &= a\lambda_m(K_P) - (ac_1 + \frac{1}{2}a\zeta_{c1}\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M + \\ &\quad \frac{1}{2}(c_1 + ac_2)) \end{aligned} \quad (45)$$

a 如式 (18) 所定义. 这表明了闭环系统对模型不确定性及外部扰动具有良好的鲁棒性, 实现了机器人系统的高精度运动控制, 这一点在仿真结果中也可明显看出.

3 仿真分析

三自由度机器人系统的轨迹跟踪仿真结果, 进一步说明了所提出的非线性重复学习分散控制的有效性. 机器人系统的动力学模型详见文献 [14]. 期望的跟踪轨迹 (单位: rad) 为

$$q_{dj} = \frac{1}{2j} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \frac{j}{jk+1} \sin\left(k\omega t + \frac{\pi j}{2k}\right) \quad (46)$$

其中, $j = 1, 2, 3$, $\omega = 1$ rad/s. 采样周期为 $T = 1$ ms. 非线性饱和函数的参数为 $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.0$, $\delta = 0.03$. 所提出的非线性分散重复学习控制器 (Nonlinear decentralized repetitive control, NRC) 的参数确定为 $K_P = \text{diag}\{5, 25, 20\}$, $K_D = \text{diag}\{4, 6, 5\}$, $K_I = \text{diag}\{3, 8, 5\}$, $Q_k = \text{diag}\{4, 4, 4\}$, $k = 1, \dots, 12$ (即谐振子的个数 $N = 12$), $a = 4$. 为了说明所提出 NRC 对系统控制性能的改善, 仿真对比 Kasac 等 [4] 提出的集中式重复学习控制器 (Repetitive control, RC). 该 RC 控制的控制律为

$$\mathbf{u} = -K_P \bar{\mathbf{q}} - K_D \dot{\bar{\mathbf{q}}} - k_D^{(1)} \|\bar{\mathbf{q}}\| \dot{\bar{\mathbf{q}}} - K_I \mathbf{z}_0 - \sum_{k=1}^N Q_k \dot{\mathbf{z}}_k \quad (47)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_k + k^2 \omega^2 \mathbf{z}_k = Q_k \dot{\mathbf{z}}_0, \quad k = 1, \dots, N \quad (48)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_0 = \dot{\bar{\mathbf{q}}} + a \bar{\mathbf{q}} \quad (49)$$

为了体现比较的公平性, RC 采用与所提出的 NRC 相同的参数, 额外的参数 $k_D^{(1)} = 2$; 系统的初值都为 $\mathbf{q}(0) = (0.716, 0.421, 0.130)^T$, $\dot{\mathbf{q}}(0) = (0.280, -0.061, -0.152)^T$, $\mathbf{z}_k = (0, 0, 0)^T$, $\dot{\mathbf{z}}_k = (0, 0, 0)^T$.

所提出 NRC 与 RC 的位置跟踪误差与速度跟踪误差分别如图 1 和图 2 所示, 所需的驱动力矩分别如图 3 和图 4 所示.

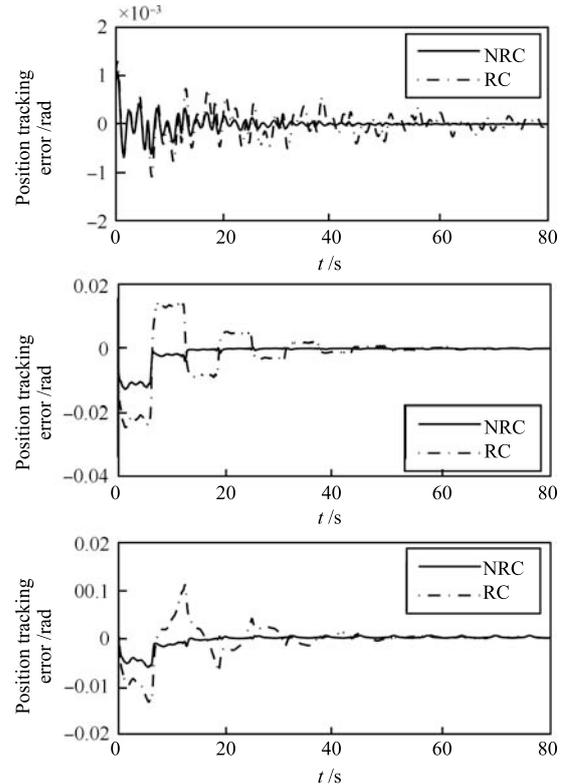


图 1 位置跟踪误差

Fig. 1 Position tracking errors

由图 1 和图 2 的仿真结果可以看出, 所提出的 NRC 相比于 RC 具有更高的轨迹跟踪精度和更快的响应速度. 另外, 从图 3 和图 4 的比较可以看出, 所提出的 NRC 控制的良好动态性能并不以驱动力矩的大幅度增加为代价, 这一点对于克服驱动器饱和和对运动系统带来的潜在影响有着重要意义.

注 2. 传统的集中式 RC 控制器含有类似于式 (47) 中 $k_D^{(1)} \|\bar{\mathbf{q}}\| \dot{\bar{\mathbf{q}}}$ 这样的耦合项, 使得各个关节的控制不能只基于本关节的测量信息而实现. 本文所提出的 NRC 控制器可以实现各个关节的完全独立控制, 各控制器之间无相互耦合的影响, 其中任一的控制器发生故障, 并不导致其他控制器的连锁反应, 因而显著提高了系统的可靠性和容错性.

此外, 为进一步说明所提出的非线性分散重复学习控制策略对系统控制性能的改善, 仿真对比了谐振子的个数 N 对 NRC 和 RC 系统的不同影响, 分别如图 5 和图 6 所示.

由图 5 和图 6 可见, 两类控制算法取相同 N 值时, 所提出的 NRC 使系统具有更快的收敛速度, 即能够在较短的时间内达到稳态平衡. 并且, 稳态误差

更小, 这说明 NRC 相比于 RC 具有更好的鲁棒性. 另外, 由图 5 还可看 NRC 系统的稳态误差随着 N 值增大而减小, 而误差收敛率与谐振子的个数 N 无

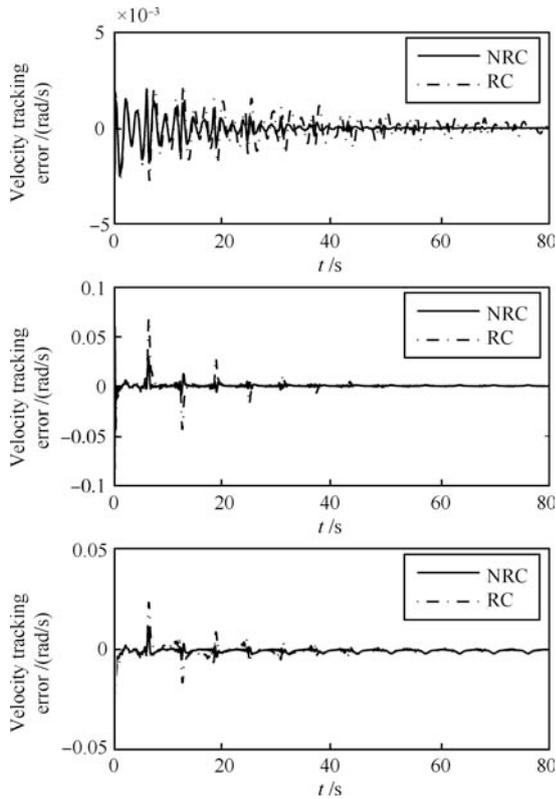


图 2 速度跟踪误差

Fig. 2 Velocity tracking errors

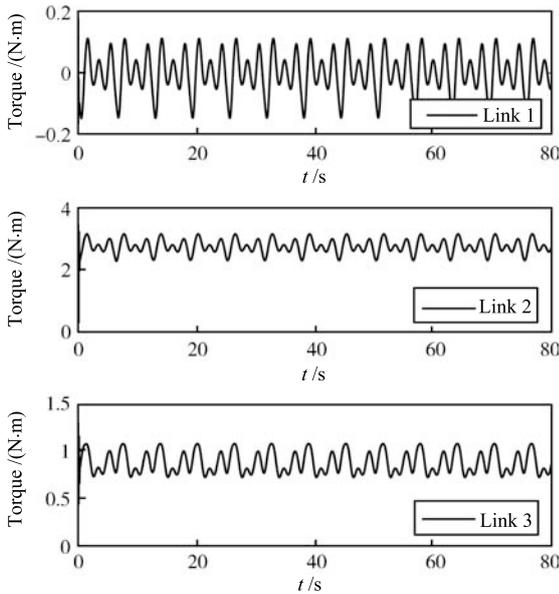


图 3 NRC 所需驱动力矩

Fig. 3 Input torques of the nonlinear decentralized repetitive control

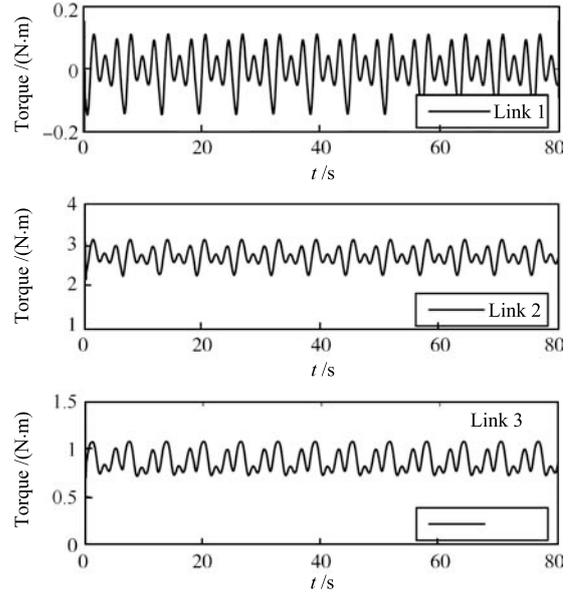


图 4 RC 所需驱动力矩

Fig. 4 Input torques of the repetitive control

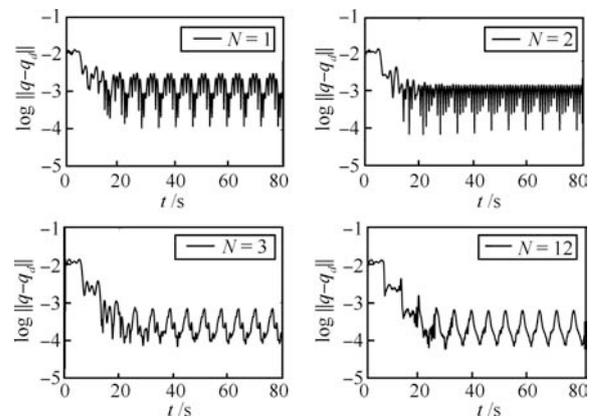


图 5 NRC 控制的系统收敛率

Fig. 5 Convergence rates of the nonlinear decentralized repetitive control

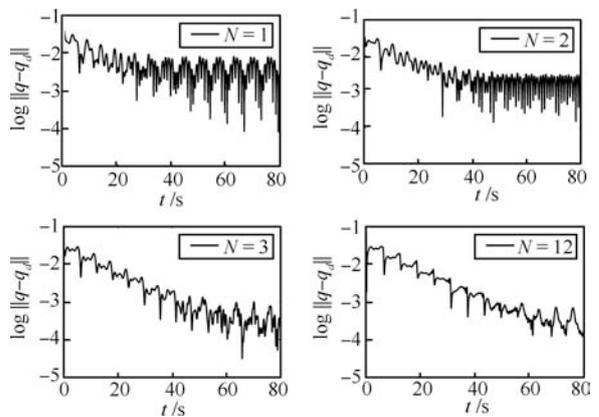


图 6 RC 控制的系统收敛率

Fig. 6 Convergence rates of the repetitive control

关(曲线斜率不变).因此,收敛率与控制精度之间不需要权衡,这是许多基于内模原理的重复学习控制所不具备的特性.

图7和图8为NRC和RC两种控制系统分别在无摩擦和有摩擦存在时的跟踪误差.其中图8为有非线性摩擦 $\mathbf{d} = [0.5\text{sgn}(\dot{q}_1), 0.5\text{sgn}(\dot{q}_2), 0.5\text{sgn}(\dot{q}_3)]^T$ 存在时两种控制系统的跟踪误差.由上述两图可以看出即使在有较大扰动存在的情况下NRC控制系统仍然获得了较快的收敛速度和较高的稳态精度,这进一步说明NRC具有较好的鲁棒性.

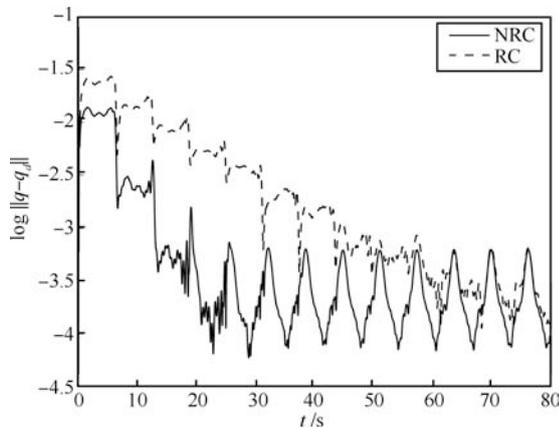


图7 无摩擦时的跟踪误差比较

Fig.7 Comparison of tracking error with compensated friction

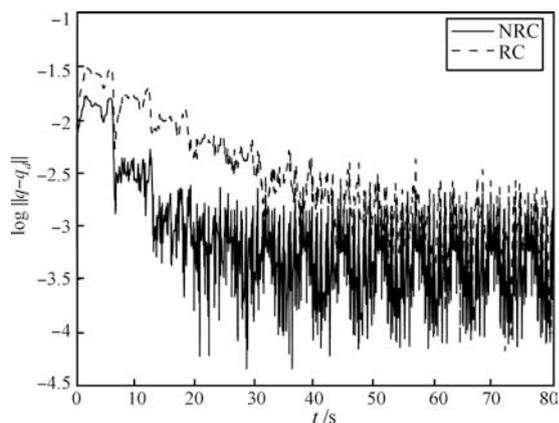


图8 有摩擦时的跟踪误差比较

Fig.8 Comparison of tracking error with uncompensated friction

由上述仿真结果可见,本文所提出的NRC控制器相比于传统的集中式RC控制器具有更优越的性能,这主要是由于所引入的非线性饱和函数具有“小误差放大、大误差饱和”的功能.为了更形象地说明这种功能,图9给出了传统双曲正切函数($\tanh(e)$)、线性函数(e)和所提出的非线性饱和函

数($s(e)$)的形态,其中 $s(e)$ 的参数为 $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.0$, $\delta = 0.03$.从图中可以明显看出,当误差较小时(即当 $|e| \leq \beta$ 时), $|s(e)| \geq |e|$;而当误差较大时(即当 $|e| \geq \beta$ 时), $|s(e)| \leq |e|$ 且饱和于 β^α .其中 α 和 β 为改变误差性态的设计参数.这种“小误差放大、大误差饱和”的非线性饱和函数可以方便地通过选择不同的 α 和 β 值来获得期望的误差性态,而另一个较小的设计参数 δ 则保证其在原点的连续性,避免不连续函数所带来的系统颤振的影响^[12].“大误差饱和”功能使得在误差较大时控制作用不会过分大,可有效克服驱动器饱和和对控制系统带来的潜在影响.“小误差放大”功能使得控制系统在误差较小时可以获得相对较大的控制作用,因此可以大大改善系统的过渡过程,有效缩短调整时间,而通常所应用的诸如双曲正切等饱和函数,在误差较小时,不具有“小误差放大”的功能.

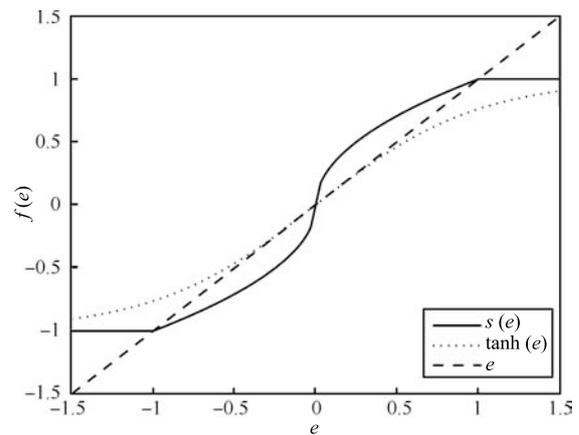


图9 不同的函数形态

Fig.9 The shapes of different functions

4 结论

本文所提出的非线性分散重复学习控制策略实现了闭环系统的全局渐近稳定跟踪,三自由度非线性机器人系统数值仿真结果表明,即使在有扰动存在的情况下该NRC控制算法依然可以获得较好的控制品质.该分散控制策略不基于系统模型,且各控制器之间无相互耦合的影响,易于工程实现.具有“小误差放大、大误差饱和”功能的非线性饱和函数的引入,使得该控制策略在易于实现的同时更可以获得较高的响应速度和轨迹跟踪精度,并可最大限度地克服驱动器饱和和带来的潜在影响.

References

- 1 Jin M, Lee J, Chang P H, Choi C. Practical nonsingular terminal sliding-mode control of robot manipulators for high-accuracy tracking control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, **56**(9): 3593–3601

- 2 Wang H, Xie Y. Adaptive inverse dynamics control of robots with uncertain kinematics and dynamics. *Automatica*, 2009, **45**(9): 2114–2119
- 3 Francis B A, Wonham W M. The internal model principle for linear multivariable regulators. *Applied Mathematics and Optimization*, 1975, **2**(2): 170–194
- 4 Kasac J, Novakovic B, Majetic D, Brezak D. Passive finite-dimensional repetitive control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2008, **16**(3): 570–576
- 5 Sun M, Ge S S, Mareels I M Y. Adaptive repetitive learning control of robotic manipulators without the requirement for initial repositioning. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, **22**(3): 563–568
- 6 Liuzzo S, Tomei P. A global adaptive learning control for robotic manipulators. *Automatica*, 2008, **44**(5): 1379–1384
- 7 Liu T S, Lee W S. A repetitive learning method based on sliding mode for robot control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2000, **122**(1): 40–48
- 8 Chen Guo-Dong, Jia Pei-Fa. Robust decentralized trajectory tracking control of robot manipulators based on extended state observer. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(7): 828–832
(陈国栋, 贾培发. 基于扩张状态观测的机器人分散鲁棒跟踪控制. 自动化学报, 2008, **34**(7): 828–832)
- 9 Tarokh M. Decoupled nonlinear three-term controllers for robot trajectory tracking. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1999, **15**(2): 369–380
- 10 Liu M. Decentralized control of robot manipulators: nonlinear and adaptive approaches. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(2): 357–363
- 11 Hsu S H, Fu L C. A fully adaptive decentralized control of robot manipulators. *Automatica*, 2006, **42**(10): 1761–1767
- 12 Su Yu-Xin, Zheng Chun-Hong. Nonlinear PD plus control for global asymptotic tracking of robot manipulators. *Control and Decision*, 2009, **24**(11): 1697–1701
(苏玉鑫, 郑春红. 机器人系统全局渐近稳定非线性 PD + 轨迹跟踪控制. 控制与决策, 2009, **24**(11): 1697–1701)
- 13 Zhang F, Dawson D M, de Queiroz M S, Dixon W E. Global adaptive output feedback tracking control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(6): 1203–1208
- 14 Orlov Y, Alvarez J, Acho L, Aguilar L. Global position regulation of friction manipulators via switched chattering control. *International Journal of Control*, 2003, **76**(14): 1446–1452



田慧慧 西安电子科技大学机电工程学院博士研究生. 主要研究方向为机器人控制和重复学习控制. 本文通信作者.

E-mail: yezifairy@163.com

(**TIAN Hui-Hui** Ph. D. candidate at the School of Electro-Mechanical Engineering, Xidian University. Her research interest covers robot control and

repetitive control. Corresponding author of this paper.)



苏玉鑫 西安电子科技大学机电工程学院教授. 主要研究方向为非线性系统与控制、机器人学和最优化设计.

E-mail: yxsu@mail.xidian.edu.cn

(**SU Yu-Xin** Professor in the Department of Electro-Mechanical Engineering, Xidian University. His research interest covers nonlinear systems

and control, robotics, and design optimization.)