

求解最优控制问题的混合变量变分方法及其航天控制应用

彭海军¹ 高强¹ 吴志刚² 钟万颢¹

摘要 针对非线性最优控制导出的 Hamiltonian 系统两点边值问题, 提出一种以离散区段右端状态和左端协态为混合独立变量的数值求解方法, 将非线性 Hamiltonian 系统两点边值问题的求解通过混合独立变量变分原理转化为非线性方程组求解. 所提出的算法综合了求解最优控制的“直接法”和“间接法”的特征, 既满足最优控制理论的一阶必要条件, 又不需要对协态初值的准确猜测, 避免了求解大规模非线性规划问题. 通过两个航天控制算例讨论了本文算法的精度和效率等问题. 与近年来在航空航天控制中备受关注的高斯伪谱方法相比较, 本文算法无论是在精度还是效率上都具有明显的优势.

关键词 非线性最优控制, 两点边值, 对偶变量, 变分原理, Hamiltonian 系统

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01248

A Mixed Variable Variational Method for Optimal Control Problems with Applications in Aerospace Control

PENG Hai-Jun¹ GAO Qiang¹ WU Zhi-Gang² ZHONG Wan-Xie¹

Abstract The nonlinear optimal control problem is transformed into the Hamiltonian two point boundary value problem (TPBVP), and a numerical method is proposed based on the dual variational principle. The nonlinear Hamiltonian TPBVP is transformed into a system of nonlinear equations by using the dual variational principle and by taking the left costate and the right state as independent variables. The proposed algorithm has the feature of both “direct method” and “indirect method” for solving optimal control problem, i.e., it satisfies the first-order necessary condition of optimal control theory, and it needs no precise initial guess for costate variables and avoids the solving of large scale nonlinear programming problem. The accuracy and efficiency of the proposed method are discussed by numerical simulations in aerospace control. Comparison between the proposed algorithm and the famous Gauss pseudo-spectral method in aeronautics and astronautics control shows that the proposed algorithm has obvious advantages on accuracy and efficiency.

Key words Nonlinear optimal control, two-point boundary value problem, dual variable, variational principle, Hamiltonian system

由于工程问题复杂性的不断增长, 采用分析方法求解非线性最优控制问题已几乎不可能, 因此, 采用数值方法求解非线性最优控制问题变得越来越重

要^[1]. 例如航天器轨迹规划问题就是采用数值方法求解相应的非线性最优控制问题, 进而根据最优轨迹数值解设计航天器的控制律或制导律.

从计算最优控制的角度来讲, 求解非线性最优控制问题的数值方法基本上可以分为两大类: 间接法和直接法^[1]. 间接法主要求解由最优控制的一阶必要条件得到的 Hamiltonian 边值问题^[2-3], 如打靶法和多重打靶法等^[4]. 间接法的主要优势是一旦找到数值解, 那么其局部最优性是可以保证的. 另外, 由于间接法得到的数值解提供了协态变量信息, 所以根据协态变量的数值解可以从本质上分析 Hamiltonian 动力系统的几何结构特征. 然而间接法的缺点是数值解的收敛半径较小, 并且当非线性最优控制问题非常复杂时, 对没有物理意义的协态初值猜测存在困难, 导致非线性两点边值问题的求解成为一个挑战性的课题. 直接法一般将连续时间非线性最优控制问题转化为大规模离散变量的非线性规划问题, 如 DMOC 方法^[5] 和高斯伪谱方法^[6] 等. 直接法和间接法相比的主要优点是数值解具有较大的收敛半径, 并且不需要猜测协态变量初值. 但

收稿日期 2011-03-04 录用日期 2011-04-04
Manuscript received March 4, 2011; accepted April 4, 2011
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2010CB832704, 2009CB918501), 国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2009AA044501), 国家自然科学基金 (10902020, 11072044), 中央高校基本科研业务费 (DUT11ZD(G)02), 辽宁省博士启动基金 (20081091), 辽宁省重点实验室项目 (2009S018) 资助

Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2010CB832704, 2009CB918501), National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2009AA044501), National Natural Science Foundation of China (10902020, 11072044), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (DUT11ZD(G)02), the Doctoral Fund of Liaoning (2008 1091), and Key Laboratory Fund of Liaoning (2009S018)

1. 大连理工大学工程力学系工业装备结构分析国家重点实验室 大连 116024 2. 大连理工大学航空航天学院工业装备结构分析国家重点实验室 大连 116024

1. Department of Engineering Mechanics, State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024 2. School of Aeronautics and Astronautics, State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024

是直接法的主要问题是当离散变量规模较大时, 非线性规划问题求解效率低是其主要瓶颈. 另外, 多数属于直接法范畴的数值方法不提供协态变量信息, 所以很难证明直接法的结果满足最优控制的一阶必要条件. 近年来发展起来的求解非线性最优控制问题的高斯伪谱方法^[6], 由于已证明通过此方法离散得到的非线性规划问题的 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件与最优控制一阶必要条件等价而备受关注, 并且已经基于此方法开发了开源软件包 GPOPS (General pseudospectral optimal control software)^[7].

近年来, 利用哈密顿系统的辛几何性质研究最优控制问题受到越来越多的重视^[8-9], 如果数值算法能够利用这种性质, 将可以在得到精确量计算结果的同时保持解的定性特征. 而基于变分原理推导各种控制算法是经常采用的有效手段之一, 例如文献 [10] 基于最小二乘拟合, 将随机系统最优估计问题转换为经典的确定性二次最优控制问题, 进而采用变分法求解. 另一方面, 生成函数理论作为经典力学的重要内容^[11], 也在最优控制中得到应用^[12-13]. 文献 [14] 和 [15] 分别采用区段两端状态和区段左端状态与右端协态作为独立变量求解了控制时间固定的非线性最优控制问题, 这类似于第一类生成函数和第二类生成函数.

采用不同的生成函数得到的算法具有不同的性质, 本文进一步发展了类似于第三类生成函数的数值算法. 本文算法的主要思想是将连续时间离散成一系列等间距的时间区段, 将时间区段内部的状态和协态变量采用 Lagrange 插值函数近似, 并将每个时间区段左端协态变量和右端状态变量作为独立变量, 然后根据变分原理的驻值条件将非线性 Hamiltonian 两点边值问题转化为非线性方程组的求解. 通过数值算例讨论了本文算法的精度和效率, 并与近年来在航空航天最优控制问题求解中应用比较广泛的高斯伪谱方法进行了详细的比较.

1 非线性最优控制与 Hamiltonian 系统两点边值问题

考虑如下的非线性微分方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

其中, \mathbf{x}_0 是初始条件, $\mathbf{x}(t)$ 是 d 维状态向量, $\mathbf{u}(t)$ 是 p 维控制向量. 性能指标为

$$J_o = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2)$$

其中, t_f 是固定的控制时间长度. 非线性最优控制问题可以描述为: 在满足微分方程式 (1) 的约束下,

寻找最优控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 使得性能指标式 (2) 最小. 通过变分法可以得到最优控制输入的必要条件^[2-3], 即将控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 表示成状态变量 $\mathbf{x}(t)$ 与协态变量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 的函数

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \quad (3)$$

此时哈密顿函数只是关于状态变量 $\mathbf{x}(t)$ 与协态变量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 两类变量的函数, 即

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), t) = \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), t) \quad (4)$$

则最优控制的必要条件为如下正则方程, 即

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (5)$$

对于方程组 (5), 本文主要讨论以下两种边界条件

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \quad (6)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial h(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}} \quad (7)$$

其中, \mathbf{x}_f 为给定状态边界条件. 方程 (6) 和 (7) 分别对应终端状态固定和终端状态自由两种边界条件. 至此, 非线性最优控制问题已转化为求解非线性 Hamiltonian 系统的两点边值问题.

2 混合独立变量的变分原理

根据 Hamiltonian 正则方程 (5), 其对应的对偶变量变分原理为^[11]

$$\bar{S} = \int_0^\eta [\boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})] dt, \quad \delta \bar{S} = 0 \quad (8)$$

作用量 \bar{S} 取驻值, 即对式 (8) 进行变分, 给出

$$\begin{aligned} \delta \bar{S} &= \int_0^\eta (\delta \mathbf{x})^T \left(-\dot{\boldsymbol{\lambda}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) dt + \\ &\int_0^\eta (\delta \boldsymbol{\lambda})^T \left(\dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right) dt + \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{x} \Big|_0^\eta = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

若认为在两端边界条件给定, 则可以在域内得到 Hamiltonian 正则方程. 若认为在域内已经满足 Hamiltonian 正则方程, 则可以得到作用量与两端状态之间的关系, 即

$$d\bar{S}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\eta) = \boldsymbol{\lambda}_\eta^T d\mathbf{x}_\eta - \boldsymbol{\lambda}_0^T d\mathbf{x}_0 \quad (10)$$

将式 (10) 左右两边进一步变形整理可以得到

$$dS = \mathbf{x}_0^T d\boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda}_\eta^T d\mathbf{x}_\eta, \quad S = \boldsymbol{\lambda}_0^T \mathbf{x}_0 + \bar{S}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\eta) \quad (11)$$

方程 (11) 表明, S 的全微商仅与 $d\lambda_0$ 和 $d\mathbf{x}_\eta$ 相关, 因此 S 应该只是左端协态 λ_0 和右端状态 \mathbf{x}_η 的函数. 下面考虑以式 (11) 为出发点, 研究以左端协态 λ 和右端状态变量 \mathbf{x} 作为混合独立变量的求解非线性 Hamiltonian 系统两点边值问题的数值算法.

3 基于混合独立变量的 Hamiltonian 两点边值问题求解

将整个非线性最优控制问题的求解区域 $(0, t_f)$ 等分成 J 个子区段, 子区段的长度为 η , 其中第 j 个子区段内的状态变量 $\mathbf{x}(t)$ 与协态变量 $\lambda(t)$ 分别采用等间距 $m-1$ 和 $n-1$ 次 Lagrange 插值, 即

$$\mathbf{x}(t) = (\bar{\mathbf{M}} \otimes I) \bar{\mathbf{x}}_j + (M_m \otimes I) \mathbf{x}_j \quad (12)$$

$$\lambda(t) = (N_1 \otimes I) \lambda_{j-1} + (\mathbf{N} \otimes I) \bar{\lambda}_j \quad (13)$$

其中, \mathbf{x}_j 表示第 j 个子区段最右端的状态变量, 而 $\bar{\mathbf{x}}_j$ 由第 j 个子区段其他插值点上的状态向量组成, λ_{j-1} 表示最左端的协态变量, 而 $\bar{\lambda}_j$ 由第 j 个子区段其他插值点上的协态向量组成. 由于将区段最右端状态变量和最左端的协态变量作为独立变量, 因此它们用普通的 \mathbf{x}_j 和 λ_{j-1} 表示, 而其他不独立的状态向量和协态向量用 $\bar{\mathbf{x}}_j$ 和 $\bar{\lambda}_j$ 表示. 方程 (12) 和 (13) 中的 I 表示单位矩阵, 其他符号的含义如下

$$\bar{\mathbf{M}} = [M_1, M_2, \dots, M_{m-1}] \quad (14)$$

$$\mathbf{N} = [N_2, N_3, \dots, N_n] \quad (15)$$

并且

$$M_i = \prod_{j=1, j \neq i}^m \frac{t - \frac{(j-1)\eta}{m-1}}{\frac{(i-j)\eta}{m-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

$$N_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{t - \frac{(j-1)\eta}{n-1}}{\frac{(i-j)\eta}{n-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

符号 \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积, 其意义为: $k \times l$ 维矩阵 A 和 $s \times t$ 维矩阵 B 的 Kronecker 积为 $ks \times lt$ 维矩阵 $A \otimes B$, 即

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1l}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}B & \cdots & a_{kl}B \end{bmatrix} \quad (18)$$

方程 (11) 中 S 的具体表达式为

$$S = \lambda_0^T \mathbf{x}_0 + \bar{S} = \lambda_0^T \mathbf{x}_0 + \int_0^\eta [\lambda^T \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}, \lambda)] dt \quad (19)$$

将方程 (12) 和 (13) 的近似状态和协态变量代入方程 (19) 表示的作用量, 可得

$$V_j(\mathbf{x}_j, \lambda_{j-1}, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\lambda}_j) = \lambda_{j-1}^T (\bar{\mathbf{M}}(0) \otimes I) \bar{\mathbf{x}}_j + \int_0^\eta (\lambda^T \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}, \lambda)) dt \quad (20)$$

方程 (11) 表明, 若认为在域内已经满足微分方程, 则作用量应该仅是左端协态变量与右端状态变量的函数, 因此第 j 个子区段内的近似作用量可以通过方程 (20) 对中间变量 $\bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\lambda}_j$ 取驻值得到, 即

$$S_j(\mathbf{x}_j, \lambda_{j-1}) = \text{stat}_{\bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\lambda}_j} V_j(\mathbf{x}_j, \lambda_{j-1}, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\lambda}_j) \quad (21)$$

由方程 (21) 的驻值条件可得到

$$\frac{\partial V_j(\mathbf{x}_j, \lambda_{j-1}, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\lambda}_j)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_j} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (22)$$

$$\frac{\partial V_j(\mathbf{x}_j, \lambda_{j-1}, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\lambda}_j)}{\partial \bar{\lambda}_j} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (23)$$

通过连续两个子区段首尾的连接关系, 将所有子区段的近似作用量 $S_j(\mathbf{x}_j, \lambda_{j-1})$ 相加, 并对所有相邻子区段的状态与协态变量取驻值, 可得到整个区域的近似作用量, 即

$$S(\mathbf{x}_J, \lambda_0) = \text{stat}_{\substack{\mathbf{x}_k, k=1, \dots, J-1 \\ \lambda_{k-1}, k=2, \dots, J}} \left(\sum_{j=1}^J S_j(\mathbf{x}_j, \lambda_{j-1}) - \sum_{j=1}^{J-1} \lambda_j^T \mathbf{x}_j \right) \quad (24)$$

因此有

$$\frac{\partial S_j}{\partial \mathbf{x}_j} - \lambda_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, J-1 \quad (25)$$

$$\frac{\partial S_j}{\partial \lambda_{j-1}} - \mathbf{x}_{j-1} = \mathbf{0}, \quad j = 2, \dots, J \quad (26)$$

得到整个求解区域上的近似作用量 $S(\mathbf{x}_J, \lambda_0)$ 后, 根据方程 (11) 可给出

$$\mathbf{x}_0 = \frac{\partial S(\mathbf{x}_J, \lambda_0)}{\partial \lambda_0}, \quad \lambda_J = \frac{\partial S(\mathbf{x}_J, \lambda_0)}{\partial \mathbf{x}_J} \quad (27)$$

因此, 非线性最优控制问题被转换为一组非线性方程 (22), (23) 和 (25)~(27) 的求解.

下一步为了方便实施计算, 还应当将每一个子区段逐步计算并累加, 为此定义

$$\mathbf{F}_1^j = \frac{\partial S_j}{\partial \lambda_{j-1}} - \mathbf{x}_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (28)$$

$$\mathbf{F}_2^j = \frac{\partial V_j}{\partial \bar{\mathbf{x}}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (29)$$

$$F_3^j = \frac{\partial V_j}{\partial \lambda_j}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (30)$$

$$F_4^j = \frac{\partial S_j}{\partial x_j} - \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (31)$$

则方程 (22), (23) 和 (25)~(27) 可表示为

$$F_1^j = 0, \quad F_2^j = 0, \quad F_3^j = 0, \quad F_4^j = 0 \quad (32)$$

本文采用牛顿法求解非线性方程组 (32), 最终可以得到关于非线性 Hamiltonian 系统两点边值问题的状态和协态变量数值解.

4 数值算例—航天控制问题

为了说明本文算法的有效性, 选取两个算例就其精度和效率问题与高斯伪谱方法^[6] 进行比较. 为了保证比较结果的可靠性, 高斯伪谱算法的程序采用文献 [7] 中介绍的 Matlab 工具箱. 由于本文的两个数值算例属于强非线性最优控制问题, 没有分析解, 因此采用 Matlab 提供的 bvp4c 函数求解非线性 Hamilton 系统两点边值问题, 并将 bvp4c 函数的绝对误差和相对误差选项分别设定为 10^{-14} 和 10^{-12} , 这样得到的系统状态 $\mathbf{x}^*(t)$, 协态 $\lambda^*(t)$ 与控制输入 $\mathbf{u}^*(t)$ 作为参考解.

算例 1. 考虑一个近地轨道卫星编队重构问题. 在时间固定的情况下, 一组由六颗小卫星组成的卫星编队, 在连续小推力的作用下, 由初始直线编队变化到目标位置并构成圆形编队, 如图 1 所示. 图 1(a) 的中心球体表示地球, 实线表示主卫星运行的圆轨道, 方块表示在总体视角下看到的六颗小卫星群, 图 1(b) 中的五角星表示小卫星, 且反映了在局部视角下, 初始时刻六颗小卫星的直线编队构型.

选择以常角速度运行在圆形参考轨道的主卫星为坐标原点, 建立旋转坐标系统. 以 x, y, z 表示从

星相对坐标原点的半径、切线和法线方向的位置, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 和 u_x, u_y, u_z 分别为对应三个位置的速度分量与控制输入加速度分量. 为了方便运算, 将编队卫星的受控动力学方程进行无量纲化, 并选取状态变量为 $\mathbf{x} = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$, 控制变量为 $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T = [u_1, u_2, u_3]^T$, 则在状态空间中无量纲化的航天器受控动力学方程可以表达为^[13]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = 2x_5 - (1 + x_1) \left(\frac{1}{r-1} \right) + u_1 \\ \dot{x}_5 = -2x_4 - x_2 \left(\frac{1}{r-1} \right) + u_2 \\ \dot{x}_6 = -\frac{x_3}{r} + u_3 \end{cases} \quad (33)$$

其中

$$r = \left(\sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2 + x_3^2} \right)^3 \quad (34)$$

为了使六颗小卫星在初始时刻位于同一条直线上, 本文选择第 1 到第 6 颗小卫星的无量纲化初始值分别为

$$10^{-5} \times [0, 0.6503, 0, 0, 0, 0]^T \quad (35)$$

$$10^{-4} \times [0, 0.1301, 0, 0, 0, 0]^T \quad (36)$$

$$10^{-4} \times [0, 0.1951, 0, 0, 0, 0]^T \quad (37)$$

$$10^{-5} \times [0, -0.6503, 0, 0, 0, 0]^T \quad (38)$$

$$10^{-4} \times [0, -0.1301, 0, 0, 0, 0]^T \quad (39)$$

$$10^{-4} \times [0, -0.1951, 0, 0, 0, 0]^T \quad (40)$$

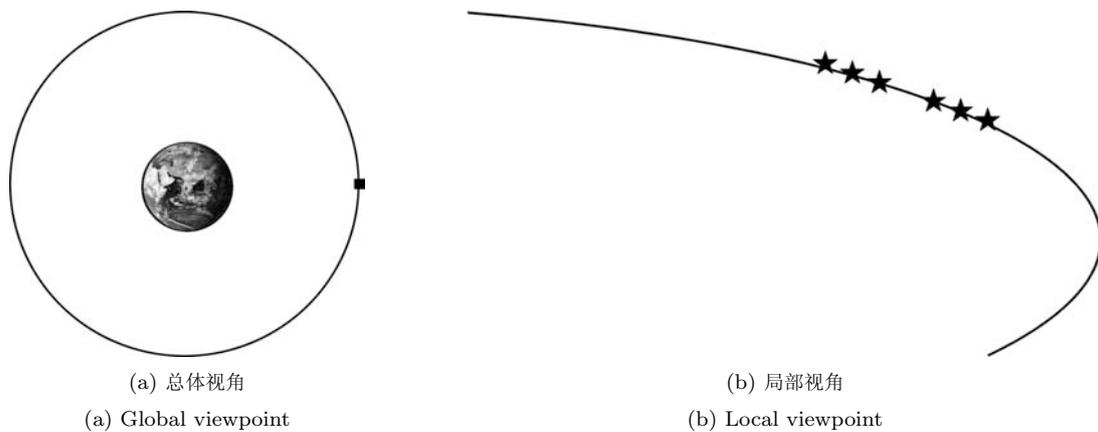


图 1 近地轨道卫星编队重构的初始状态

Fig. 1 The initial state of the formation satellites on the low earth orbit

在受控连续小推力的作用下, 编队卫星的最终目标是要构成圆形编队, 即第 1 到第 6 颗小卫星的无量纲化目标值分别为

$$10^{-4} \times [0, -0.6503, 0, 0, 0, 0]^T \quad (41)$$

$$10^{-4} \times [-0.3251, 0, 0.5632, 0, 0, 0]^T \quad (42)$$

$$10^{-4} \times [0.3251, 0, 0.5632, 0, 0, 0]^T \quad (43)$$

$$10^{-4} \times [0.6503, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (44)$$

$$10^{-4} \times [0.3251, 0, -0.5632, 0, 0, 0]^T \quad (45)$$

$$10^{-4} \times [-0.3251, 0, -0.5632, 0, 0, 0]^T \quad (46)$$

本文采用非线性最优控制方法进行最节省能量的编队重构操作, 性能指标选择为

$$J_o = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt \quad (47)$$

其中无量纲化时间 $t_f = 1.191$.

采用本文算法求解此非线性最优控制问题, 近地轨道小卫星编队重构过程如图 2 所示. 图 2(a)~2(d) 表示在连续小推力的控制作用下, 六颗小卫星由直线编队逐渐变成圆形编队的过程.

表 1 给出了不同离散区段个数情况下, 本文算法和高斯伪谱方法计算得到的状态与控制变量的相对误差, 表 2 给出了两种方法的计算时间比较. 在表 1 和表 2 中, 对于高斯伪谱方法, m 表示采用的高斯点的个数, 而对于本文方法, m 表示整个求解区域被等分的份数, 其中符号“-”表示由于选取高斯点数目过多导致高斯伪谱方法无法求解. 从表 1 中可以看出, 本文算法在状态变量和控制变量的求解精度上要明显高于高斯伪谱方法, 尤其在本文算法在 $N = 5$ 时计算的结果也远高于高斯伪谱方法在 $N = 7$ 时的计算精度. 在计算效率方面, 本文方法也要明显高于高斯伪谱方法, 即使在 $N = 9$ 的情况下, 本文算法的计算时间也要远小于高斯伪谱方法在 $N = 7$ 情况下的计算时间.

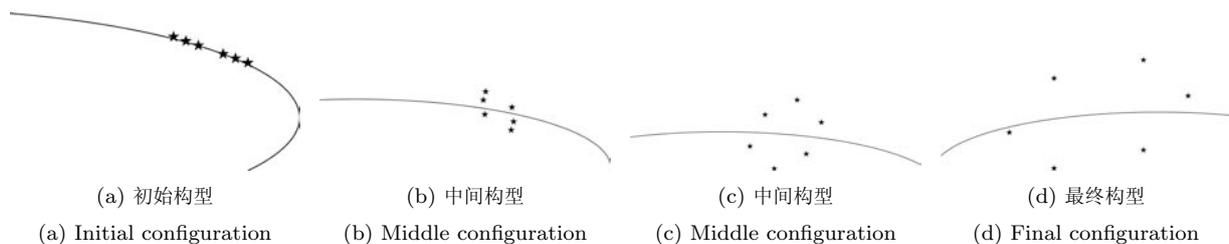


图 2 近地轨道卫星编队重构过程

Fig. 2 Formation reconfiguration of the satellites on the low earth orbit

算例 2. 考虑一个深空小行星探测任务问题. 假设从地球发射一颗航天器与小行星交会, 伴随小行星飞行或停留一定时间, 然后从小行星出发返回地球, 整个过程尽可能减少时间和燃料消耗. 这里假设小行星为 2001GP2, 且从地球出发到小行星和从小行星返回地球的发射窗口已知. 地球和小行星采用绕太阳的二体动力学模型, 为了方便运算对受控航天器的动力学模型进行无量化, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_1}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_3^2 + x_5^2}\right)^3} + u_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{x_3}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_3^2 + x_5^2}\right)^3} + u_2 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -\frac{x_5}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_3^2 + x_5^2}\right)^3} + u_3 \end{cases} \quad (48)$$

其中, $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$ 为状态向量, $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T = [u_1, u_2, u_3]^T$ 为控制输入. 本文通过能量等高线法^[16] 确定发射窗口, 并取航天器从地球出发时候的初始状态选择为

$$\mathbf{x} = [-0.9968, 0.3850, -0.3520, -0.8830, 0.0011, 0.0214]^T \quad (49)$$

航天器到达小行星时候的状态为

$$\mathbf{x} = [-0.9537, 0.2876, -0.3042, -0.9566, 0.0, 0.0]^T \quad (50)$$

航天器从小行星返回地球时候的初始状态为

$$\mathbf{x} = [0.9486, 0.2786, 0.3431, 0.9735, 0.0012, -0.0225]^T \quad (51)$$

航天器到达地球时候的状态为

$$\mathbf{x} = [-0.8534, 0.5121, -0.5310, -0.8530, 0.0, 0.0]^T \quad (52)$$

表 1 本文算法与高斯伪谱方法计算精度比较

Table 1 Precision comparison between the proposed method and Gauss pseudospectral method

$m = 2^N$		$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$
高斯伪谱	x	0.0056	0.0042	0.0041	—	—
	z	0.0044	0.0032	0.0023	—	—
	u_x	0.0617	0.0491	0.0375	—	—
	u_z	0.0579	0.0389	0.0268	—	—
本文算法	x	1.3546E-7	9.8949E-8	7.1131E-8	5.0717E-8	3.6012E-8
	z	7.3552E-8	5.3337E-8	3.8201E-8	2.7188E-8	1.9288E-8
	u_x	1.3952E-6	1.0148E-6	7.2791E-7	5.1842E-7	3.6790E-7
	u_z	3.3374E-6	2.3838E-6	1.6945E-6	1.2014E-6	8.5068E-7

表 2 本文算法与高斯伪谱方法计算效率比较 (s)

Table 2 Efficiency comparison between the proposed method and Gauss pseudospectral method (s)

$m = 2^N$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$
高斯伪谱	2.24	4.01	18.99	—	—
本文算法	0.10	0.21	0.41	0.83	1.72

而性能指标选择为

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt \quad (53)$$

其中, 对于从地球探访小行星的无量化时间 $t_f = 6.7948$, 而从小行星返回地球无量纲化时间 $t_f = 3.2856$.

采用本文算法计算此非线性最优控制问题, 航天器从地球出发探测小行星过程如图 3(a)~3(d) 顺序所示, 航天器从小行星出发返回地球过程如图 4(a)~4(d) 顺序所示. 图中的中心大球体表示太阳, 另外一个球体表示地球, 五角星表示航天器, 方块表示小行星, 虚线表示地球的运行轨迹, 点线表示小行星的运行轨迹, 实线表示航天器的运行轨迹.

表 3 给出了不同离散区段个数情况下, 本文算法和高斯伪谱方法计算得到的状态与控制变量的相对误差, 表 4 给出了两种方法的计算时间. 在表 3 和表 4 中, 对于高斯伪谱方法, m 表示采用的高斯点的个数, 而对于本文方法, m 表示整个求解区域被等分的份数, 其中符号 “—” 表示由于选取高斯点数目过多导致高斯伪谱方法无法求解. 从表 3 中可以看出, 本文算法在状态变量和控制变量的求解精度上要明显高于高斯伪谱方法, 而随着离散区段数目的增加, 本文算法无论是状态变量还是控制变量的计算精度都明显增加, 而高斯伪谱方法的计算精度没有明显的变化. 并且和算例 1 类似, 本文算法在 $N = 5$ 时计算的结果也远高于高斯伪谱方法在 $N = 7$ 时的计

算精度. 表 4 表明, 在计算效率方面, 本文方法也要优于高斯伪谱方法, 高斯伪谱方法在 $N = 7$ 情况下

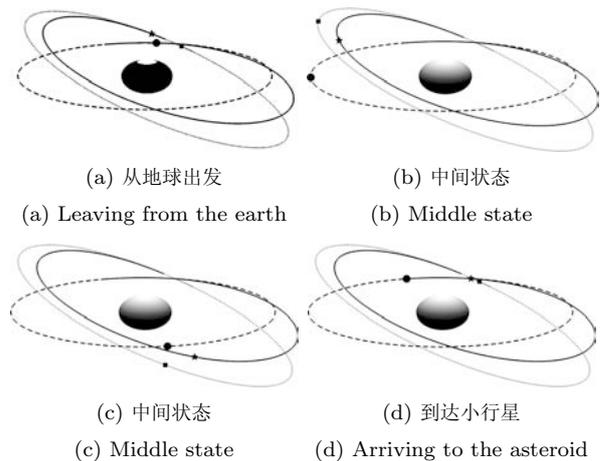


图 3 航天器从地球出发探测小行星过程

Fig. 3 The exploration of spacecraft from the earth to the asteroid

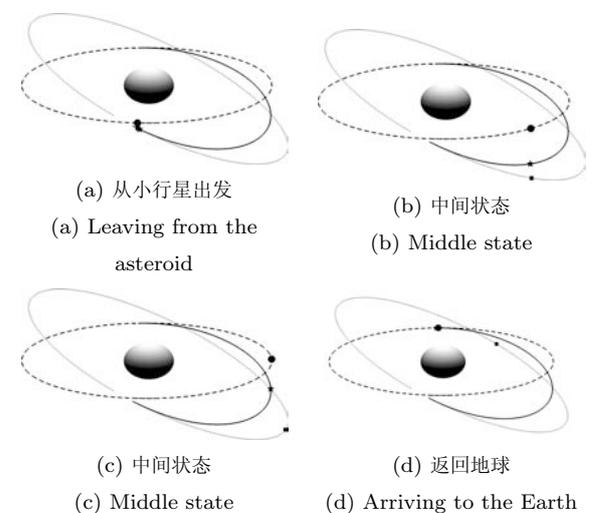


图 4 航天器从小行星出发返回地球过程

Fig. 4 The return of spacecraft from the asteroid to the earth

表 3 本文算法与高斯伪谱方法计算精度比较

Table 3 Precision comparison between the proposed method and Gauss pseudospectral method

$m = 2^N$		$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$
高斯伪谱	x	9.3683E-5	6.7637E-5	4.7728E-5	—	—
	y	7.3384E-5	4.1069E-5	3.2860E-5	—	—
	u_x	8.7263E-5	6.3790E-5	4.3620E-5	—	—
	u_y	0.1579	0.1126	0.0800	—	—
本文算法	x	3.0948E-8	1.3925E-9	6.2369E-11	2.9193E-12	2.3337E-13
	y	3.2104E-8	1.2685E-9	5.2497E-11	1.8607E-12	3.7007E-13
	u_x	4.2707E-8	1.8290E-9	7.9661E-11	3.5368E-12	2.1264E-13
	u_y	4.4033E-7	1.9510E-8	8.5846E-10	3.7624E-11	1.5214E-12

表 4 本文算法与高斯伪谱方法计算效率比较 (s)

Table 4 Efficiency comparison between the proposed method and Gauss pseudospectral method (s)

$m = 2^N$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$
高斯伪谱	5.96	24.85	146.60	—	—
本文算法	0.47	0.88	1.75	3.46	7.19

的计算时间约是本文算法的 84 倍。即使在 $N = 9$ 的情况下, 本文算法的计算时间也要远小于高斯伪谱方法在 $N = 7$ 情况下的计算时间。

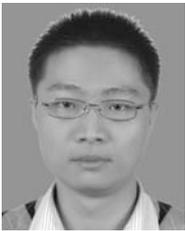
5 结论

针对由非线性最优控制问题导出的 Hamiltonian 系统两点边值问题, 本文基于混合独立变量的对偶变分原理, 并采用 Lagrange 插值方法逼近状态和协态变量, 将 Hamiltonian 系统两点边值问题的求解转化为非线性方程组求解。本文算法综合了“直接法”和“间接法”的特征, 即算法一方面基于变分原理且满足最优控制理论的一阶必要条件, 不需要对协态初值准确猜测; 另一方面又将非线性最优控制问题转化为非线性方程组求解, 具有较快的收敛速度, 避免了大规模非线性规划带来计算效率低下的问题。与高斯伪谱方法的比较表明, 本文算法无论是在计算精度还是计算效率上都有明显的优势。

References

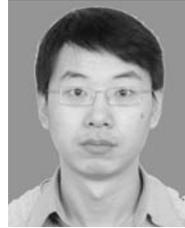
- 1 Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, **21**(2): 193–207
- 2 Bryson A E, Ho Y C. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*. New York: John Wiley and Sons, 1975
- 3 Kirk D E. *Optimal Control Theory: An Introduction*. New York: Dover Publications, 2003
- 4 Betts J T. *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. Philadelphia: Society for Industrial Mathematics, 2001
- 5 Leyendecker S, Ober-Blobaum S, Marsden J E, Ortiz M. Discrete mechanics and optimal control for constrained systems. *Optimal Control Applications and Methods*, 1998, **31**(6): 505–528
- 6 Benson D A. A Gauss Pseudospectral Transcription for Optimal Control [Ph. D. dissertation], Massachusetts Institute of Technology, USA, 2005
- 7 Rao A V, Benson D, Darby C, Patterson M A, Franconin C, Sanders I, Huntington G T. Algorithm 902: GPOPS, Matlab software for solving multiple-phase optimal control problems using the Gauss pseudospectral method. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **37**(2): 1–39
- 8 Zhong Wan-Xie, Wu Zhi-Gang, Tan Shu-Jun. *Theory and Computation of State-space Control*. Beijing: Science Press, 2007
(钟万颢, 吴志刚, 谭述君. 状态空间控制理论与计算. 北京: 科学出版社, 2007)
- 9 Tan Shu-Jun, Zhong Wan-Xie. Computation of nonlinear optimal control via symplectic conservative perturbation method. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(9): 1004–1008
(谭述君, 钟万颢. 非线性最优控制系统的保辛摄动近似求解. 自动化学报, 2007, **33**(9): 1004–1008)
- 10 Wang Fei-Yue. Formulation of Kalman filter and Rauch smoother by quadratic optimal method. *Journal of Zhejiang University (Natural Science)*, 1989, **23**(2): 193–204
(王飞跃. 用二次最优控制推导 Kalman 滤波器和最优插值器. 浙江大学学报 (自然科学版), 1989, **23**(2): 193–204)
- 11 Arnold V I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1989

- 12 Park C, Scheeres D J. Determination of optimal feedback terminal controllers for general boundary conditions using generating functions. *Automatica*, 2006, **42**(5): 869–875
- 13 Park, C. The Hamilton-Jacobi Theory for Solving Optimal Feedback Control Problems with General Boundary Conditions [Ph. D. dissertation], University of Michigan, USA, 2006
- 14 Peng H J, Gao Q, Wu Z G, Zhong W X. Symplectic multi-level method for solving nonlinear optimal control problem. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(10): 1251–1260
- 15 Gao Qiang, Peng Hai-Jun, Wu Zhi-Gang, Zhong Wan-Xie. Symplectic method for solving optimal control problem of nonlinear dynamical system. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, **8**(1): 1–7
(高强, 彭海军, 吴志刚, 钟万勰. 非线性动力学系统最优控制问题的保辛求解方法. *动力学与控制学报*, 2010, **8**(1): 1–7)
- 16 Cui Ping-Yuan, Shang Hai-Bin, Luan En-Jie. A fast search algorithm for launch window of interplanetary low-thrust exploration mission. *Journal of Astronautics*, 2008, **29**(1): 40–45
(崔平远, 尚海滨, 栾恩杰. 星际小推力转移任务发射机会的快速搜索方法. *宇航学报*, 2008, **29**(1): 40–45)



彭海军 大连理工大学工程力学系动力学与控制专业博士研究生. 主要研究方向为航天器动力学、最优控制理论和数值算法. E-mail: hjpeng@dlut.edu.cn
(**PENG Hai-Jun** Ph. D. candidate in the Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology. His research interest covers dynamics of the spacecraft, theory and numerical algorithm for optimal control.)

dynamics of the spacecraft, theory and numerical algorithm for optimal control.)

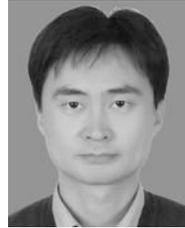


高强 大连理工大学工程力学系讲师. 主要研究方向为动力系统数值方法研究. 本文通信作者.

E-mail: qgao@dlut.edu.cn

(**GAO Qiang** Lecturer in the Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology. His main research interest is numerical

methods for dynamic system. Corresponding author of this paper.)



吴志刚 大连理工大学航空航天学院教授. 主要研究方向为飞行器动力学与控制、最优控制与鲁棒控制.

E-mail: wuzhg@dlut.edu.cn

(**WU Zhi-Gang** Professor in the School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology. His research interest covers dynamics

and control of the spacecraft, optimal control, and robust control.)



钟万勰 大连理工大学工程力学系教授. 主要研究方向为工程力学、计算力学、计算结构力学与最优控制模拟理论.

E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn

(**ZHONG Wan-Xie** Professor in the Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology. His research interest covers engineering mechanics, computational mechanics, and analogies between

structural mechanics and optimal control.)