

用于离散滑模重复控制的新型趋近律

孙明轩¹ 范伟云¹ 王辉¹

摘要 针对不确定离散时间系统, 提出一种新型的离散趋近律, 构造理想切换动态, 并基于理想切换动态设计离散滑模重复控制器. 在消除系统颤振的同时, 完全抑制周期扰动带来的影响, 改善控制品质. 分别推导了切换函数的绝对收敛层、单调收敛层和拟滑模带的边界, 用于刻画在不同控制器参数下闭环系统的趋近过程和拟滑模运动. 数值仿真和在伺服装置上的实验结果证实了所提出控制方法的有效性.

关键词 拟滑动模态, 离散滑模重复控制, 理想切换动态, 离散时间系统

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01213

Discrete Sliding Mode Repetitive Control with Novel Reaching Law

SUN Ming-Xuan¹ FAN Wei-Yun¹ WANG Hui¹

Abstract This paper is concerned with discrete-time sliding mode control of systems subject to periodic inputs and disturbances. A novel reaching law is proposed, and a design of discrete-time sliding mode repetitive controller is presented based on the ideal switching dynamics formed by the reaching law. The switching dynamics are required to avoid system chattering and achieve perfect tracking as the periodic disturbances are rejected completely. In order to characterize both the reaching phase and quasi-sliding mode, the attractive layer bound, monotone decreasing region, and quasi-sliding mode band of the switching dynamics are derived theoretically. Numerical simulation and experiment are carried out to verify the feasibility and effectiveness of the proposed control method.

Key words Quasi-sliding mode, discrete sliding mode repetitive control, ideal switching dynamics, discrete-time systems

在滑模控制系统综合时, 需考虑到达条件. 到达条件不同, 设计出的滑模控制器也不同. 趋近律方法是由我国学者高为炳先生提出的^[1-2], 它是等式形式的到达条件. 与不等式形式的到达条件相比较, 趋近律所给出的等式形式的到达条件能够被直接用于控制器设计. 目前趋近律方法已成为滑模控制器设计的主要方法之一. 由于控制系统的实现主要是利用数字计算机, 这导致人们研究离散时间系统的滑模控制技术, 并认识到离散时间系统滑模控制时仅存在拟滑动模态, 不存在像连续时间情形那样的滑动模态. 这种控制技术的要素主要包括三个方面: 1) 趋近律形式; 2) 拟滑动模态的定量刻画; 3) 干扰抑制手段.

通过引入 sgn 函数, 文献 [2] 给出的趋近律使得切换函数每一步穿越切换面, 形成 zigzag 滑动. 相应地, 为了定量刻画拟滑动模态, 文献 [2] 给出拟滑动模态的一个定义, 并提出滑动模态带的概念. 值得指出的是, 在针对不确定性系统讨论时, 文献 [2]

发现控制器中需引入对扰动的估计, 以抑制切换函数动态方程中出现的扰动量的影响. 在已发表的文献中已有多种不同的拟滑动模态定义, 如何刻画拟滑动模态引起了人们极大的兴趣, 特别是拟滑模带的不变性和拟滑模带外区域的吸引性问题. 文献 [3] 检验了文献 [2] 关于拟滑模带宽度的估计, 给出了更为精确的估计. 进一步地, 在文献 [4] 中, 给出了新的拟滑动模态定义, 据此提出了一种不采用 sgn 函数的、“嵌入”了干扰抑制措施的趋近律, 它不要求 zigzag 滑动. 文献 [5] 在文献 [2] 提出的趋近律中引入干扰观测器, 使得观测误差动态与切换动态是解耦的, 改善了控制精度. 并且, 文中给出了绝对单层和拟滑模带边界的估计. 文献 [6-7] 讨论了切换函数边界层的吸引性和不变性. 更多的关于离散滑模控制这一领域的研究结果见文献 [8]. 文献 [9-10] 中报道了近些年来的发展情况, 从中读者也可以看出趋近律方法的进展. 文献 [11] 讨论的不确定性系统的切换动态实际上是文献 [2] 中给出的简单情形 (置 $\varepsilon = 0$). 文献 [12] 采用的趋近律更为简单, 系统被要求一步达到滑模带, 但切换函数却为一非线性函数. 文献 [13] 提出了一种变速趋近律, 要求趋近过程快速收敛, 但在滑模带内速度减小 n 倍. 趋近律中使用 sgn 函数导致闭环系统存在颤振现象. 在实际工程实现时, 为减轻颤振现象, 这种具有继电特性的趋近律需采取断续函数连续化措施, 例如, 以

收稿日期 2010-01-13 录用日期 2011-04-01
Manuscript received January 13, 2010; accepted April 1, 2011
国家自然科学基金 (60474005, 60874041), 浙江省自然科学基金 (Y107494) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60474005, 60874041) and Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Y107494)
1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023
1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023

sat 函数取代 sgn 函数^[5,7,14-15]. 另一种断续函数连续化方法是以 $s/(|s| + \delta)$, $\delta > 0$, 取代 sgn 函数的继电特性 $s/|s|$. 这种用法见于连续趋近律, 但研究结果不多, 相同的做法未见于离散趋近律^[8-10].

从已发表文献中可以看出, 以确定性趋近律设计滑模控制器, 设计过程清晰, 控制器参数调整方向明确. 但对于不确定系统, 采用同一趋近律进行控制器设计, 所导致的切换动态依赖于不确定性项, 不确定性项对于切换动态的影响程度决定了系统的控制性能. 这样, 需要对确定性趋近律进行修正, 将干扰抑制措施“嵌入”切换动态中, 以获得理想切换动态, 以能使趋近律方法适用于不确定系统. 我们称这种方法为理想切换动态方法.

实际工业控制中被控对象常被要求执行周期轨迹跟踪任务, 如硬盘伺服系统、减振系统和电力电子线路等. 这类系统的参考信号为周期信号, 在重复运行中受到的外部干扰在稳态时往往呈现周期特性, 现有的实现定常干扰完全抑制的滑模控制技术并不适用^[17]. 重复控制方法适于周期作业的被控对象, 是一种用于周期扰动抑制目的的有效控制技术. 目前已发表的重复控制系统稳定性分析多是基于内模原理的频域方法^[16]. 针对参考信号为周期信号的不确定离散系统, 文献 [18-19] 设计离散滑模重复控制器, 实现了对周期扰动的完全抑制, 这一结果推广了滑模控制能够实现常值干扰完全抑制的现有技术.

通过对继电特性连续化处理 (以 $s/(|s| + \delta)$ 取代式 (1) 中的继电特性 $s/|s|$), 本文提出一种新型离散趋近律, 构造理想切换动态, 并基于理想切换动态设计离散滑模重复控制器. 理论分析闭环系统的趋近过程和拟滑模运动, 以绝对收敛层、单调收敛层和拟滑模带来刻画这两种运动, 给出了三个边界的估计, 并以数值仿真结果予以验证. 进一步地, 在永磁同步直线电机上完成了定位控制和周期位置跟踪实验, 用于验证算法的有效性.

1 问题的提出

考虑如下单输入不确定离散时间系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}(u_k + w_k) \quad (1)$$

式中, \mathbf{x}_k 为 n 维状态向量, 系统控制输入 u_k 和扰动变量 w_k 均为标量, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ 已知.

假设 1. 系统 (1) 是完全能控的.

假设 1 成立时, 我们可通过状态反馈控制任意配置闭环系统极点.

假设 2. 扰动变量 w_k 有界.

显然, 系统 (1) 满足匹配条件.

本文的控制目标是针对参考信号为周期信号的不确定离散系统 (1), 设计离散滑模重复控制器, 在

保证闭环系统稳定的同时, 实现对扰动的周期部分的完全抑制, 以改善系统的动态特性, 提高控制精度.

选取切换函数为 $s_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$, 滑模面可定义为

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{x}_k | \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k = 0\}$$

众所周知, 对于离散滑模控制系统, 不存在理想的滑动模态, 变量 s_k 只能收敛到滑模面的一个邻域内, 并且保持在这个邻域内运动. 为了刻画这种拟滑模运动, 引入如下拟滑模带定义:

$$|s_{k+1}| \leq \Delta_{\text{QSM}}, \quad \forall |s_k| \leq \Delta_{\text{QSM}}$$

其中, Δ_{QSM} 为拟滑模带边界. 系统滑动模态的趋近过程存在一个绝对值单调收敛层, 在这种收敛层范围内, $|s_k|$ 单调递减, 即

$$|s_{k+1}| < |s_k|, \quad \forall |s_k| > \Delta_{\text{AL}}$$

这里, Δ_{AL} 为切换函数 s_k 的绝对收敛层边界. 另外, 还存在 s_k 本身同号单调递减的区域, 当 s_k 大于这个区域的边界时, 切换函数 s_k 同号单调递减, 即

$$\begin{cases} 0 < s_{k+1} < s_k, & \forall s_k > \Delta_{\text{MDR}} \\ s_k < s_{k+1} < 0, & \forall s_k < -\Delta_{\text{MDR}} \end{cases}$$

其中, Δ_{MDR} 为切换函数的同号单调收敛层边界.

文献 [5] 给出了系统切换函数的吸引层边界和拟滑模带边界的估计值, 用来描述趋近过程和拟滑动模态. 本文对这两个边界给出了更具体的分析, 并阐明 Δ_{QSM} 和 Δ_{AL} 是可以不同的、同时本文的结果也有别于文献 [4], 文献 [4] 中这两个边界也是相等的.

2 基于理想切换动态的离散滑模重复控制

理想切换动态实际上是嵌入了干扰抑制手段的趋近律. 基于理想切换动态进行离散滑模控制器设计, 需先考虑趋近律的形式. 本文提出一种新的离散趋近律, 具体形式为

$$s_{k+1} = (1 - \rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} \quad (2)$$

其中, $\rho \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

由于系统中存在干扰, 理想趋近律 (2) 在实际中无法实现. 为此, 针对不确定系统 (1) 和理想趋近律 (2), 本文构造如下理想切换动态

$$s_{k+1} = (1 - \rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} + d_k - d_k^* \quad (3)$$

其中, $d_k = \mathbf{c}^T \mathbf{b}(w_k - w_{k-N})$, N 为周期扰动部分的周期; d_k^* 为 d_k 的补偿值. 由假设 2 可知, d_k 有界,

令 $d_l \leq d_k \leq d_u$. 本文以 $d_k^* = (d_l + d_u)/2$ 补偿 d_k , 希望最大限度地抵消其影响. 容易看出, $|d_k - d_k^*| \leq \Delta$, 其中, $\Delta = (d_u - d_l)/2$.

对于不确定离散系统 (1), 为实现理想切换动态, 离散滑模重复控制器应取为

$$u_k = u_{k-N} + (\mathbf{c}^T \mathbf{b})^{-1} [(1 - \rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} - s_{k+1-N} - \mathbf{c}^T \mathbf{A}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-N}) - d_k^*] \quad (4)$$

理想切换动态 (3) 决定系统 s_k 的动态行为, 选取不同的控制器参数会产生不同的趋近过程和滑模运动. 因而, 控制器的参数整定可依据对于趋近过程和滑动模式的要求来完成, 而这种要求可以由定义的三个边界层来刻画.

由于文中采用的是趋近律方法, 文中的结果容易推广到多输入系统, 这是趋近律方法的优点^[1]. 多输入系统需考虑向量 \mathbf{s} 函数, 详细做法可参见文献 [1, 7, 20]. 为了叙述简洁起见, 本文仅就单输入系统展开讨论.

3 趋近过程和滑动模态分析

本节我们推导绝对收敛层、同号单调层和拟滑模带边界, 用以刻画趋近过程和滑动模态.

3.1 绝对收敛层

在重复控制器 (4) 的作用下, 切换函数 s_k 的绝对收敛层边界为

$$\Delta_{AL} = \begin{cases} \Delta_U, & 0 < \varepsilon < (1 - \rho)(\delta + \Delta) \\ \Delta_L, & \varepsilon \geq (1 - \rho)(\delta + \Delta) \end{cases} \quad (5)$$

其中,

$$\Delta_U = \frac{-(\rho\delta + \varepsilon - \Delta) + \sqrt{(\rho\delta + \varepsilon - \Delta)^2 + 4\rho\Delta\delta}}{2\rho}$$

$$\Delta_L = \frac{-[(2 - \rho)\delta - \varepsilon - \Delta] + \sqrt{[(2 - \rho)\delta - \varepsilon - \Delta]^2 + 4(2 - \rho)\Delta\delta}}{2(2 - \rho)}$$

为了证明上述绝对收敛层边界, 我们考虑理想切换动态 (3). 当 $s_k > 0$ 时,

$$\begin{cases} s_{k+1} \leq (1 - \rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} + \Delta \\ s_{k+1} \geq (1 - \rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} - \Delta \end{cases}$$

要使 $|s_k|$ 满足单调递减, 即

$$-s_k < s_{k+1} < s_k$$

则需同时满足

$$(1 - \rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} + \Delta < s_k \quad (6)$$

和

$$(1 - \rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} - \Delta > -s_k \quad (7)$$

解不等式方程 (6) 和 (7), 得

$$s_k > \max \{ \Delta_U, \Delta_L \}$$

其中, Δ_U 和 Δ_L 为不等式 (6) 和 (7) 的解. 同理, 当 $s_k < 0$ 时, 要使 $|s_k|$ 满足单调递减, s_k 需满足

$$s_k < \min \{ -\Delta_U, -\Delta_L \}$$

综上, 切换函数的绝对收敛层边界应取为 Δ_U 和 Δ_L 的最大值.

下面给出切换函数绝对收敛层边界 Δ_{AL} 与控制器参数 ε 之间的关系. 计算 Δ_U 关于 ε 的导数, 得

$$\frac{d\Delta_U}{d\varepsilon} = \frac{-1}{2\rho} + \frac{2(\rho\delta + \varepsilon - \Delta)}{4\rho\sqrt{(\rho\delta + \varepsilon - \Delta)^2 + 4\rho\Delta\delta}} = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{(\rho\delta + \varepsilon - \Delta)}{\sqrt{(\rho\delta + \varepsilon - \Delta)^2 + 4\rho\Delta\delta}} - 1 \right) < 0$$

因此, Δ_U 随着 ε 的增大而减小. 计算 Δ_L 关于 ε 的导数, 得

$$\frac{d\Delta_L}{d\varepsilon} = \frac{1}{2(2 - \rho)} + \frac{2(\varepsilon + \Delta - (2 - \rho)\delta)}{4(2 - \rho)\sqrt{[\varepsilon + \Delta - (2 - \rho)\delta]^2 + 4(2 - \rho)\Delta\delta}} = \frac{1}{2(2 - \rho)} \left(\frac{(\varepsilon + \Delta - (2 - \rho)\delta)}{\sqrt{[\varepsilon + \Delta - (2 - \rho)\delta]^2 + 4(2 - \rho)\Delta\delta}} + 1 \right) > 0$$

由此, Δ_L 随着 ε 的增大而增大. 当 $\varepsilon = (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 时,

$$\Delta_U = \Delta_L = \Delta$$

可以看出, 系统切换函数的绝对收敛层边界大于等于理想切换动态中不确定项的界, 即 $\Delta_{AL} \geq \Delta$. 当 $0 < \varepsilon \leq (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 时, $\Delta_{AL} = \Delta_U$, Δ_U 随着 ε 的增大而减小. 当 $\varepsilon > (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 时, $\Delta_{AL} = \Delta_L$, Δ_L 随着 ε 的增大而增大. 因此, 当 $\varepsilon = (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 时, 系统滑模运动的收敛层带宽最小, 这时 $\Delta_{AL} = \Delta$.

3.2 同号单调收敛层

切换函数 s_k 的同号单调收敛层边界为

$$\Delta_{MDR} = \begin{cases} \Delta_U, & 0 < \varepsilon < \frac{(1 - 2\rho)(2\Delta + \delta)}{2} \\ \Delta_0, & \varepsilon \geq \frac{(1 - 2\rho)(2\Delta + \delta)}{2} \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$\Delta_0 = \frac{\varepsilon + \Delta - (1 - \rho)\delta + \sqrt{(\varepsilon + \Delta - (1 - \rho)\delta)^2 + 4(1 - \rho)\Delta\delta}}{2(1 - \rho)}$$

依据同号单调收敛层的定义, 由理想切换动态 (3) 可推出上述绝对收敛层边界. 当 $s_k > 0$ 时,

$$\begin{cases} s_{k+1} \leq (1-\rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} + \Delta \\ s_{k+1} \geq (1-\rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} - \Delta \end{cases}$$

欲使 s_k 同号单调收敛, 即

$$0 < s_{k+1} < s_k$$

则需要同时满足

$$(1-\rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} + \Delta < s_k \quad (9)$$

和

$$(1-\rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} - \Delta > 0 \quad (10)$$

解不等式 (9) 和 (10), 得

$$s_k > \max \{ \Delta_U, \Delta_0 \}$$

其中, Δ_0 为不等式 (10) 的解. 同理, 当 $s_k < 0$ 时, 要使 s_k 同号单调收敛, s_k 需满足

$$s_k < \min \{ -\Delta_U, -\Delta_0 \}$$

综上, 切换函数的单调收敛层边界为 Δ_U 和 Δ_0 的最大值.

下面分析切换函数单调收敛层边界 Δ_{MDR} 与控制器参数 ε 之间的关系. 计算 Δ_0 关于 ε 的导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_0}{d\varepsilon} &= \frac{1}{2(1-\rho)} + \frac{2(\varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta)}{4(1-\rho)\sqrt{(\varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta)^2 + 4(1-\rho)\Delta\delta}} = \\ &= \frac{1}{2(1-\rho)} \left(\frac{(\varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta)}{\sqrt{(\varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta)^2 + 4(1-\rho)\Delta\delta}} + 1 \right) > 0 \end{aligned}$$

因此, Δ_0 随着 ε 的增大而增大. 当 $\varepsilon = \frac{(1-2\rho)(2\Delta+\delta)}{2}$ 时,

$$\Delta_U = \Delta_0 = 2\Delta$$

由此可知, 当 $\rho > \frac{1}{2}$ 时, 系统切换函数的单调收敛层边界 $\Delta_{MDR} = \Delta_0$. 当 $\rho \leq \frac{1}{2}$ 时, 切换函数的单调收敛层边界大于等于两倍理想切换动态中不确定项的界, 即 $\Delta_{MDR} \geq 2\Delta$. 当 $0 < \varepsilon < \frac{(1-2\rho)(2\Delta+\delta)}{2}$ 时, $\Delta_{MDR} = \Delta_U$, Δ_{MDR} 随着 ε 的增大而减小; 当 $\varepsilon > \frac{(1-2\rho)(2\Delta+\delta)}{2}$ 时, $\Delta_{MDR} = \Delta_0$, Δ_{MDR} 随着 ε 的增大而增大. 当 $\varepsilon = \frac{(1-2\rho)(2\Delta+\delta)}{2}$ 时, 系统切换函数的单调收敛层边界最小, 即 $\Delta_{MDR} = 2\Delta$.

3.3 拟滑模带

闭环系统的拟滑模带边界为

$$\Delta_{QSM} = \begin{cases} \Delta_U, & 0 \leq \varepsilon < (1-\rho)\delta \\ \max \left\{ \left(\sqrt{(1-\rho)\delta - \sqrt{\varepsilon}} \right)^2 + \Delta, \Delta_U \right\}, & (1-\rho)\delta \leq \varepsilon \leq (1-\rho)(\delta + \Delta) \\ \left(\sqrt{(1-\rho)\delta - \sqrt{\varepsilon}} \right)^2 + \Delta, & \varepsilon > (1-\rho)(\delta + \Delta), \sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta \leq \Delta_L \\ \Delta_L, & \varepsilon > (1-\rho)(\delta + \Delta), \sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta > \Delta_L \end{cases} \quad (11)$$

为给出拟滑模带边界, 考虑理想切换动态 (3), 当 $|s_k| > \Delta_{AL}$ 时, 系统的切换函数是单调递减的, 即 $|s_{k+1}| \leq |s_k|$. 当 $|s_k| \leq \Delta_{AL}$ 时, 下一时刻的线性切换函数 s_{k+1} 有可能越出系统的绝对收敛层边界 Δ_{AL} , 即 $s_{k+1} > \Delta_{AL}$. 所以系统的拟滑模带边界的求解可转换为 s_k 在区间 $[-\Delta_{AL}, \Delta_{AL}]$ 求极值.

当 $0 \leq s_k \leq \Delta_{AL}$ 时, s_{k+1} 的极大值在理想切换动态方程的不确定项为最大时取得,

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= (1-\rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} + d_k - d_k^* = \\ &= (1-\rho)s_k + \frac{\varepsilon\delta}{|s_k| + \delta} - \varepsilon + \Delta \end{aligned} \quad (12)$$

由式 (11) 得, s_{k+1} 的最大值在 s_k 区域的边界取得,

$$\begin{cases} s_{k+1} \leq \Delta_U, & 0 < \varepsilon < (1-\rho)(\delta + \Delta) \\ s_{k+1} \leq \Delta, & \varepsilon \geq (1-\rho)(\delta + \Delta) \end{cases} \quad (13)$$

同时, s_{k+1} 的极小值在理想切换动态中的不确定项为最小时取得,

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= (1-\rho)(s_k + \delta) + \frac{\varepsilon\delta}{|s_k| + \delta} - \\ &= (1-\rho)\delta - \varepsilon - \Delta \end{aligned} \quad (14)$$

由式 (14) 得, s_{k+1} 的最小值在边界或 $s_k = \sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta$ 取到.

1) 当 $\varepsilon < (1-\rho)\delta$ 时, $\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta < 0$, 最小值在边界取到. 且 $\Delta_U > \Delta_L$, $\Delta_{AL} = \Delta_U$,

$$\begin{cases} s_{k+1}|_{s_k=0} = -\Delta \\ s_{k+1}|_{s_k=\Delta_U} = \Delta_U - 2\Delta \end{cases}$$

因此,

$$s_{k+1} \geq \min \{ -\Delta, \Delta_U - 2\Delta \} = -\Delta$$

2) 当 $(1-\rho)\delta \leq \varepsilon \leq (1-\rho)(\delta + \Delta)$ 时, $\Delta_U > \Delta_L$, $\Delta_{AL} = \Delta_U$. 并且

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta \leq \sqrt{\delta(\Delta + \delta)} - \delta < \Delta \\ \Delta_{AL} \geq \Delta \end{cases}$$

即, $0 \leq \sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta < \Delta_{AL}$ 成立, s_{k+1} 的最小值在 $s_k = \sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta$ 取到. 因此

$$s_{k+1} \geq -\left(\sqrt{(1-\rho)\delta} - \sqrt{\varepsilon}\right)^2 - \Delta$$

3) 当 $\varepsilon > (1-\rho)(\Delta + \delta)$, 且 $\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta \leq \Delta_L$ 时, $\Delta_L > \Delta_U$, $\Delta_{AL} = \Delta_L$, 最小值在 $s_k = \sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta$ 取到, 可得

$$s_{k+1} \geq -\left(\sqrt{(1-\rho)\delta} - \sqrt{\varepsilon}\right)^2 - \Delta$$

4) 当 $\varepsilon > (1-\rho)(\Delta + \delta)$, 且 $\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta > \Delta_L$ 时, 最小值在边界取到. 且 $\Delta_L > \Delta_U$, $\Delta_{AL} = \Delta_L$,

$$\begin{cases} s_{k+1}|_{s_k=0} = -\Delta \\ s_{k+1}|_{s_k=\Delta_L} = -\Delta_L \end{cases}$$

因此,

$$s_{k+1} \geq \min\{-\Delta, -\Delta_L\} = -\Delta_L$$

基于以上讨论, 当 $0 \leq s_k \leq \Delta_{AL}$ 时,

$$\begin{cases} -\Delta \leq s_{k+1} \leq \Delta_U, & 0 < \varepsilon < (1-\rho)\delta \\ -\left(\sqrt{(1-\rho)\delta} - \sqrt{\varepsilon}\right)^2 - \Delta \leq s_{k+1} \leq \Delta_U, & (1-\rho)\delta \leq \varepsilon \leq (1-\rho)(\delta + \Delta) \\ -\left(\sqrt{(1-\rho)\delta} - \sqrt{\varepsilon}\right)^2 - \Delta \leq s_{k+1} \leq \Delta, & \varepsilon > (1-\rho)(\delta + \Delta), \sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta \leq \Delta_L \\ -\Delta_L \leq s_{k+1} \leq \Delta, & \varepsilon > (1-\rho)(\delta + \Delta), \sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta > \Delta_L \end{cases}$$

同理, 当 $-\Delta_{AL} \leq s_k < 0$ 时,

$$\begin{cases} -\Delta_U \leq s_{k+1} \leq \Delta, & 0 < \varepsilon < (1-\rho)\delta \\ -\Delta_U \leq s_{k+1} \leq \left(\sqrt{(1-\rho)\delta} - \sqrt{\varepsilon}\right)^2 + \Delta, & (1-\rho)\delta \leq \varepsilon \leq (1-\rho)(\delta + \Delta) \\ -\Delta \leq s_{k+1} \leq \left(\sqrt{(1-\rho)\delta} - \sqrt{\varepsilon}\right)^2 + \Delta, & \varepsilon > (1-\rho)(\delta + \Delta), \sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta \leq \Delta_L \\ -\Delta \leq s_{k+1} \leq \Delta_L, & \varepsilon > (1-\rho)(\delta + \Delta), \sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta > \Delta_L \end{cases}$$

总结上面两种情况得系统 (1) 的拟滑模带边界.

当离散滑模控制器 (2) 中控制器参数 $\delta = 0$ 时, 单位向量连续化趋近律退化为指数趋近律. 切换函数 s_k 的绝对收敛层边界变为 $\Delta_{AL} = \max\left\{\frac{\Delta-\varepsilon}{\rho}, \frac{\Delta+\varepsilon}{2-\rho}\right\}$, 单调收敛层边界变为 $\Delta_{MDR} = \max\left\{\frac{\Delta-\varepsilon}{\rho}, \frac{\Delta+\varepsilon}{1-\rho}\right\}$, 拟滑模带边界变为 $\Delta_{QSM} = \max\left\{\frac{\Delta-\varepsilon}{\rho}, \varepsilon + \Delta\right\}$.

4 基于理想切换动态的滑模控制

前述基于理想切换动态的离散滑模重复控制器设计方法也适用于滑模控制器设计. 考虑不确定离散系统 (1), 假设系统的扰动 w_k 的主要成份是一常值变量. 我们知道, 常值扰动可等效为周期 $N = 1$ 的周期干扰. 这样, 在构造理想切换动态时, 定义 $d_{1k} = \mathbf{c}^T \mathbf{b}(w_k - w_{k-1})$, 且理想切换动态方程为

$$s_{k+1} = (1-\rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} + d_{1k} - d_{1k}^* \quad (15)$$

其中, d_{1k}^* 为 d_{1k} 的补偿值. 下述滑模控制器可实现该理想切换动态,

$$u_k = u_{k-1} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b})^{-1} [\rho s_k + \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} + \mathbf{c}^T A(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) + d_{1k}^*] \quad (16)$$

在式 (16) 离散滑模控制器的作用下, 实现的理想切换动态 (15) 与式 (3) 一致的. 因此, 上一节推导出的刻画用于趋近过程和滑动模态的结果可用于滑模控制器 (16) 的控制参数. 从 d_{1k} 的定义看, 我们设计的滑模控制器可有效抑制常值干扰的影响; 而滑模重复控制是针对周期扰动抑制问题提出的. 我们在下节将提供实验结果, 进一步说明两种控制方法在解决问题的侧重点上是不同的.

5 数值仿真与实验结果

本节我们以永磁同步直线电机为被控对象, 验证上述理论结果. 我们将永磁同步直线电机动态特性表达为二阶离散系统, 其误差模型可写成

$$\mathbf{e}_{k+1} = A\mathbf{e}_k + \mathbf{b}(v_k + w_k) \quad (17)$$

其中, $\mathbf{e}_k = [e_{1k} \ e_{2k}]^T$, $e_{1k} = y_{k-1} - r_{k-1}$, $e_{2k} = y_k - r_k$, r_k 为 k 时刻的参考信号, y_k 为 k 时刻直线电机的位置信号, e_{1k} 为 $k-1$ 时刻的位置误差, e_{2k} 为 k 时刻的位置误差. 系统矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$, 控制 $\mathbf{b} = [0 \ b_1]^T$, 系统干扰可等效为输入通道匹配干扰 $w_k = \frac{\xi_k}{b_1}$, 控制信号 $v_k = u_k + \frac{1}{b_1}(b_2 u_{k-1} - a_2 r_{k-1} - a_1 r_k - r_{k+1})$, u_k 为

k 时刻直线电机的控制信号, ξ_k 为系统干扰. 通过实验建模, 获得的模型参数为 $a_1 = -0.8699$, $a_2 = -0.1301$, $b_1 = 0.5099$, $b_2 = 0.1952$. 切换函数选取为 $s_k = \mathbf{c}^T \mathbf{e}_k$, $\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \end{bmatrix}^T$, 依照式 (4) 和 v_k 的定义, 离散滑模重复控制器可取为

$$u_k = u_{k-N} + (\mathbf{c}^T \mathbf{b})^{-1} [(1 - \rho)s_k - \varepsilon \frac{s_k}{|s_k| + \delta} - s_{k+1-N} - \mathbf{c}^T A(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k-N}) - d_k^*] + \frac{1}{b_1} \times [-b_2(u_{k-1} - u_{k-N-1}) + a_2(r_{k-1} - r_{k-N-1}) + a_1(r_k - r_{k-N}) + (r_{k+1} - r_{k-N+1})] \quad (18)$$

5.1 数值结果

在仿真时, 我们取位置参考信号 $r_k = 20 \times \sin(2\pi f T_s k)$, 频率 $f = 0.25 \text{ Hz}$, 采样时间 $T_s = 0.01 \text{ s}$.

系统干扰项 ξ_k 由周期和非周期成份组成:

$$\xi_k = 2 \sin\left(\frac{2k\pi}{N}\right) + 0.1(-1)^{\text{fix}\left(\frac{k}{20}\right) + \text{fix}\left(\frac{k}{400}\right)} \times (0.7 \text{sgn}(\text{mod}(k, 20) - 9.5) + 0.3)$$

其中, 周期扰动的周期 $N = 400$, 理想切换动态中不确定项的界 $\Delta = 0.2$.

为验证切换函数三个边界值 (Δ_{MDR} , Δ_{AL} , Δ_{QSM}) 的定义在第 1 节中给出), 我们分别讨论下面 5 种情况.

1) 当 $0 \leq \varepsilon < (1 - \rho)\delta$ 时, 切换函数的绝对收敛层和拟滑模带的边界均为 Δ_U . 控制器参数选取为 $\rho = 0.4$, $\varepsilon = 0.05$, $\delta = 0.1$. 此时, $\varepsilon = \frac{(1-2\rho)(2\Delta+\delta)}{2}$, $\Delta_U = \Delta_0$. 相应的 $\Delta_{\text{AL}} = \Delta_{\text{QSM}} = \Delta_{\text{MDR}} = 2\Delta = 0.4$. 这时单调收敛层边界 Δ_{MDR} 取到最小值. 仿真结果见图 1.

2) 当 $(1 - \rho)\delta \leq \varepsilon \leq (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 时, 切换函数的绝对收敛层边界为 Δ_U . 控制器参数选取为 $\rho = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.1$. 相应的 $\Delta_{\text{AL}} = \Delta_{\text{QSM}} = \Delta_U = 0.3109$, $\Delta_{\text{MDR}} = \Delta_0 = 0.4708$. 图 2 为产生的切换函数 s_k .

3) 当 $(1 - \rho)\delta \leq \varepsilon \leq (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 时, 切换函数的绝对收敛层边界为 Δ_U . 控制器参数选取为 $\rho = 0.4$, $\varepsilon = 0.18$, $\delta = 0.1$. 此时, $\varepsilon = (1 - \rho)(\delta + \Delta)$, 相应的 $\Delta_{\text{QSM}} = \left(\sqrt{(1 - \rho)\delta} - \sqrt{\varepsilon}\right)^2 + \Delta = 0.2322$, $\Delta_{\text{MDR}} = \Delta_0 = 0.5899$. 切换函数的绝对收敛层边界达到最小值 $\Delta_{\text{AL}} = \Delta = 0.2$, 且 $\Delta_{\text{QSM}} > \Delta_{\text{AL}}$. 切换函数 s_k 见图 3.

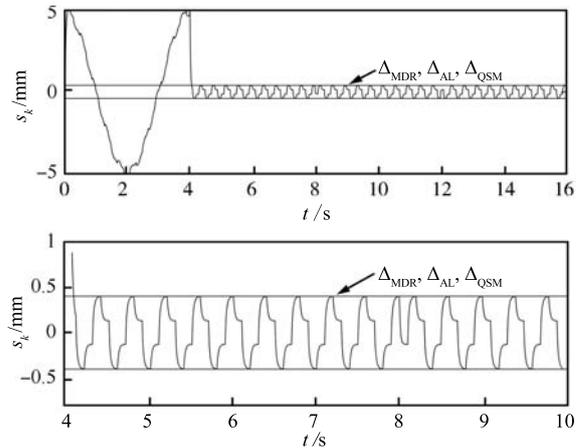


图 1 当 $0 \leq \varepsilon < (1 - \rho)\delta$ 时的切换函数 ($\Delta_{\text{MDR}} = \Delta_{\text{QSM}} = \Delta_{\text{AL}}$)

Fig. 1 Switching function s_k for $0 \leq \varepsilon < (1 - \rho)\delta$ ($\Delta_{\text{MDR}} = \Delta_{\text{QSM}} = \Delta_{\text{AL}}$)

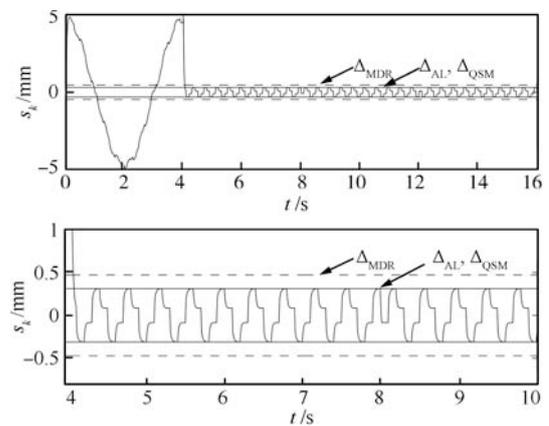


图 2 当 $(1 - \rho)\delta \leq \varepsilon \leq (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 时的切换函数 ($\Delta_{\text{MDR}} > \Delta_{\text{QSM}} = \Delta_{\text{AL}}$)

Fig. 2 Switching function s_k for $(1 - \rho)\delta \leq \varepsilon \leq (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ ($\Delta_{\text{MDR}} > \Delta_{\text{QSM}} = \Delta_{\text{AL}}$)

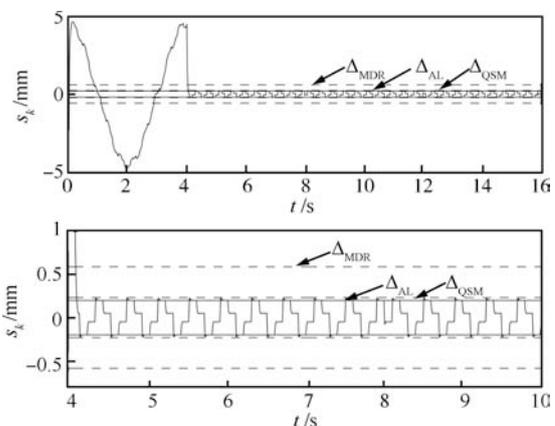


图 3 当 $(1 - \rho)\delta \leq \varepsilon \leq (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 时的切换函数 ($\Delta_{\text{MDR}} > \Delta_{\text{QSM}} > \Delta_{\text{AL}}$)

Fig. 3 Switching function s_k for $(1 - \rho)\delta \leq \varepsilon \leq (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ ($\Delta_{\text{MDR}} > \Delta_{\text{QSM}} > \Delta_{\text{AL}}$)

4) 当 $\varepsilon > (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 且 $\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta \leq \Delta_L$ 时, 切换函数的绝对收敛层边界为 Δ_L . 控制器参数选取为 $\rho = 0.4, \varepsilon = 0.2, \delta = 0.1$. 此时, $\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta \leq \Delta_L$. 拟滑模带的边界为 $(\sqrt{(1-\rho)\delta} - \sqrt{\varepsilon})^2 + \Delta$. 相应 $\Delta_{AL} = \Delta_L = 0.2096, \Delta_{QSM} = 0.2409, \Delta_{MDR} = \Delta_0 = 0.6204$. 切换函数见图 4.

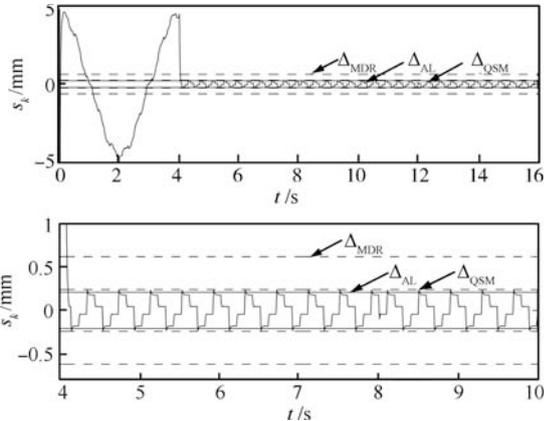


图 4 当 $\varepsilon > (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 时系统的切换函数 ($\Delta_{MDR} > \Delta_{QSM} > \Delta_{AL}$)

Fig. 4 Switching function s_k for $\varepsilon > (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ ($\Delta_{MDR} > \Delta_{QSM} > \Delta_{AL}$)

5) 当 $\varepsilon > (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 且 $\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{(1-\rho)}} - \delta > \Delta_L$ 时, 切换函数的绝对收敛层边界和拟滑模带边界均为 Δ_L . 控制器参数选取为 $\rho = 0.4, \varepsilon = 0.85, \delta = 0.5$. 此时, 相应的 $\Delta_{AL} = \Delta_{QSM} = \Delta_L = 0.3401, \Delta_{MDR} = \Delta_0 = 1.3715$. 图 5 给出了切换函数 s_k .

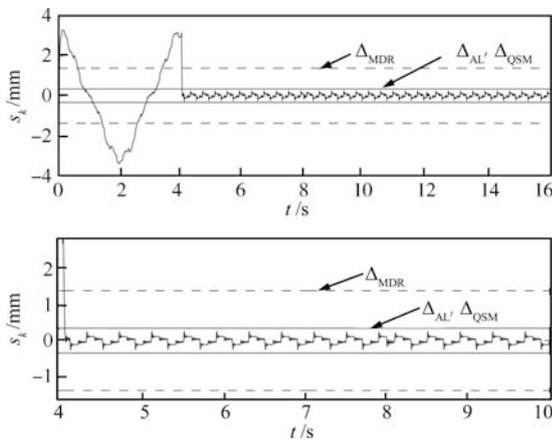


图 5 当 $\varepsilon > (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ 时的切换函数 ($\Delta_{MDR} > \Delta_{QSM} = \Delta_{AL}$)

Fig. 5 Switching function s_k for $\varepsilon > (1 - \rho)(\delta + \Delta)$ ($\Delta_{MDR} > \Delta_{QSM} = \Delta_{AL}$)

5.2 实验结果

实验验证用的直线伺服系统包括永磁同步直线

电机本体、功率驱动器、伺服控制器、位置传感器和 PC 机, 参见图 6. 伺服控制器采用 TMS320DSP 开发板, 可编程实现控制算法; 功率驱动采用 ELMO 驱动器; 位置传感器采用 RENISHAW 光栅尺, 其分辨率是 $5 \mu\text{m}$.



图 6 永磁同步直线电机伺服系统
Fig. 6 AC permanent magnet synchronous linear motor servo system

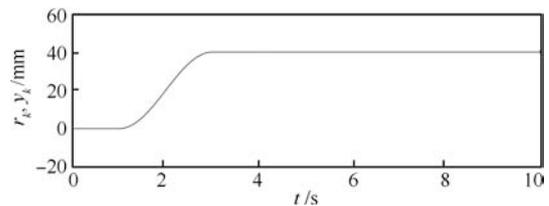
1) 定位控制

定位控制实验中直线电机的位置参考信号

$r_k =$

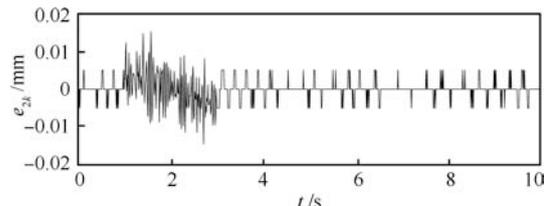
$$\begin{cases} 0, & 0 < kTs \leq 1 \\ 20 \sin\left(\frac{(kTs - 1)\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 20, & 1 < kTs \leq 3 \\ 40, & kTs > 3 \end{cases}$$

其中, 采样时间 $T_s = 0.01 \text{ s}$. 控制器采用离散滑模控制器 (16), 其参数选取为: $\rho = 0.8, c = -0.5, \varepsilon = 0.005, \delta = 0.01$. 定位控制结果见图 7. 可以看出, 定



(a) 位置参考信号与实际输出

(a) The reference signal and the actual output



(b) 位置误差

(b) Positioning error

图 7 定位控制

Fig. 7 Positioning control

位误差在 $10\ \mu\text{m}$ 左右。

2) 周期跟踪

周期跟踪时的位置参考信号取为 $r_k = 50 \times \sin(2\pi f T_s k)\ \text{mm}$, $f = 0.25\ \text{Hz}$, $T_s = 0.01\ \text{s}$. 控制器同样采用离散滑模控制器 (16), 其参数选取为 $\rho = 0.8$, $c = -0.5$, $\varepsilon = 0.005$, $\delta = 0.01$. 位置跟踪误差直方图见图 8 所示, 其中, Counts 为位置误差 e_{2k} 落入相应区间的数目. 由图 8 可以看出, 跟踪误差幅度约为 $20\ \mu\text{m}$, 且呈周期性.

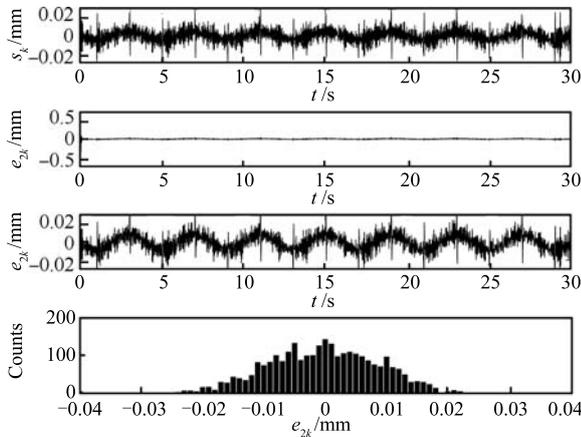


图 8 离散滑模控制器作用下的直线电机周期跟踪

Fig. 8 Periodic tracking with discrete sliding mode controller

控制器换用离散滑模重复控制器 (18) 时, 控制器选取相同的参数. 位置跟踪误差的直方图见图 9. 可以看出, 误差幅度约在 $10\ \mu\text{m}$ 左右, 且不明显呈周期性, 周期干扰成份得到了有效抑制.

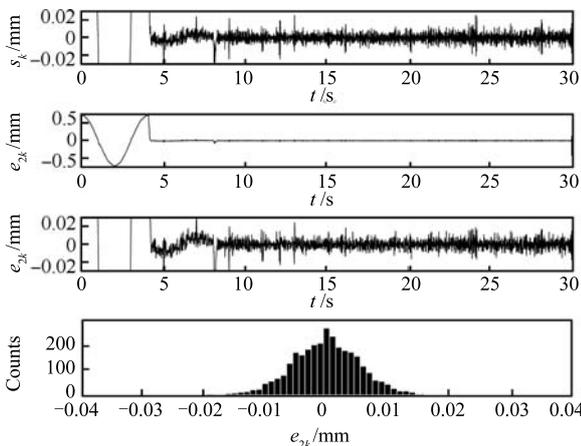


图 9 离散滑模重复控制器作用下的直线电机周期跟踪

Fig. 9 Periodic tracking with discrete sliding mode repetitive controller

6 结论

对高氏趋近律中的继电函数进行连续化处理,

本文提出了一种新型离散趋近律, 用于解决参考信号为周期信号时的不确定离散时间系统的跟踪控制问题. 通过构造理想切换动态, 设计离散滑模重复控制器. 这种控制方法有效避免了颤振现象. 文中分析了在该控制器作用下切换函数的绝对收敛层、单调收敛层和拟滑模带, 并以仿真结果予以证明. 在直线电机上完成的实验也证实了所提出的控制方法的有效性.

References

- Gao Wei-Bing. Variable structure control of discrete-time systems. *Acta Automatica Sinica*, 1995, **21**(2): 154–161 (高为炳. 离散时间系统的变结构控制. *自动化学报*, 1995, **21**(2): 154–161)
- Gao W B, Wang Y, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, **42**(2): 117–122
- Batoszewicz A. Remarks on “discrete-time variable structure control systems”. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1996, **43**(1): 235–238
- Batoszewicz A. Discrete-time quasi-sliding-mode control strategies. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1998, **45**(4): 633–637
- Eun Y, Kim J, Kim K, Cho D. Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1997, **7**(4): 414–423
- Misawa E A. Discrete-time sliding mode control for nonlinear systems with unmatched uncertainties and uncertain control vector. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1997, **119**(3): 503–512
- Tang C Y, Misawa E A. Discrete variable structure control for linear multivariable systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2000, **122**(4): 783–792
- Milosavljevic C, Veselic B, Mitic D. Discrete-time quasi-sliding mode control systems-part I. *Electronics*, 2005, **9**(2): 16–25
- Kaynak O, Bartoszewicz A, Utkin V I. Special section on sliding mode control in industrial applications-Part II. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, **56**(9)
- Pisano A, Usai E. Sliding mode control: a survey with applications in math. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2011, **81**(5): 954–979
- Niu Y, Ho D W C, Wang Z. Improved sliding mode controller for discrete-time systems via reaching law. *IET Control Theory and Applications*, 2010, **4**(11): 2245–2251
- Bandyopadhyay B, Fulwani D. High-performance tracking controller for discrete plant using nonlinear sliding surface. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, **56**(9): 3628–3637

- 13 Veselic B, Perunicic-Drazenovic B, Milosavljevic C. Improved discrete-time sliding-mode position control using Euler velocity estimation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010, **57**(11): 3840–3847
- 14 Chang J L. Robust discrete-time model reference sliding-mode controller design with state and disturbances estimation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2008, **55**(11): 4065–4074
- 15 Fallaha C, Saad M, Kanaan H Y, Al-Haddad K. Sliding mode robot control with exponential reaching law. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, **58**(2): 600–610
- 16 Tomizuka M, Tsao T, Chew K. Analysis and synthesis of discrete-time repetitive controllers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1989, **111**(3): 353–358
- 17 Morgan R, Ozguner U. A decentralized variable structure control algorithm for robotic manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1985, **1**(1): 57–65
- 18 Sun M X, Wang Y Y, Wang D W. Variable structure repetitive control: a discrete-time strategy. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2005, **52**(2): 610–616
- 19 Sun M X, Xie H Y, Wang H. Switching-function dynamics designs for uncertain variable structure systems with repetitive control. *International Journal of Control*, 2011, **84**(7): 1196–1208
- 20 Wu L, Gao H. Sliding mode control of two-dimensional systems in Roesser model. *IET Control Theory and Applications*, 2008, **2**(4): 352–364



孙明轩 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为学习控制. 本文通信作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn
(**SUN Ming-Xuan** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control. Corresponding author of this paper.)



范伟云 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为重复控制. E-mail: fanweiyun@126.com
(**FAN Wei-Yun** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is repetitive control.)



王辉 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为重复控制. E-mail: zjttwh@126.com
(**WANG Hui** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is repetitive control.)