

一维云模型系统的逼近性研究

李众^{1,2} 高键² 张日勋²

摘要 针对云模型的基本原理, 提出了一类云模型系统的设计方法, 并利用 Stone-Weierstrass 定理对在 3σ 正态分布随机数条件下的云模型系统任意逼近紧集上的任意连续实函数进行了证明, 是对云模型应用于逼近任意连续非线性函数理论的创新, 也是今后云模型系统用于系统辨识和控制的理论依据。

关键词 云模型, 云模型系统, 逼近性, 推理

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01190

On Approximation of One-dimension Cloud Model Systems

LI Zhong^{1,2} GAO Jian² ZHANG Ri-Xun²

Abstract A new design method for a class of the cloud model systems is put forward based on the theory of cloud model. Any continuous real function from any approximating compact set under 3-sigma random normal distribution is proved for the cloud model system by using the Stone-Weierstrass theorem. This cloud model system enriches the theory of approximating any continuous non-linear function. The innovative method provides a theoretic basis for the future application in system identification and control.

Key words Cloud model, cloud model system, approximation, reasoning

云模型 (Cloud model) 概念的提出及其应用已有十多年的历史, 由于云模型将随机性和模糊性有机地结合在一起, 因此成为不确定性知识表达和推理的一种有效方法^[1]。目前, 云模型已成功地应用到数据挖掘、决策分析、系统评估、网络应用等众多领域^[2-7], 在控制领域也取得了初步成果^[8-12], 因此, 对云模型系统的逼近性研究工作渐现必要性和基础性。在云模型的大多数应用中, 云模型的设计实际上是对云模型系统的设计, 而这种设计往往可以归结为对某一函数的逼近, 从数学上看, 云模型系统实现的是从输入论域到输出论域的函数映射。因此, 在应用云模型系统时, 希望知道它对一个函数的逼近机制, 特别是希望知道它是否可以作为通用函数逼近器, 以任意精度逼近一个紧致集上的连续函数。当云模型系统用作辨识时, 其通用逼近性决定了其能否逼近任意连续的非线性动态模型; 当云模型系统用作控制时, 其通用逼近性则决定了其能否逼近任意连续的非线性控制曲线。然而关于云模型系统的逼近性问题, 目前尚无解答, 本文的研究正是为了回答上述问题。

本文基于云模型的基本概念, 设计了云模型规则推理、云模型规则核心推理和云模型规则期望推

理, 并据此构建了一类新的云模型系统、云模型核心系统和云模型期望系统, 提出了在 3σ (区间) 正态分布随机数的条件下, 一维云模型系统 (以下简称云模型系统) 即是通用的函数逼近器, 并指出云模型核心系统在特定条件下可以实现比例控制功能。

1 预备知识

云模型是用语言值表示的某个定性概念与其定量表示之间的不确定性转换模型, 它将模糊性和随机性融合到一起, 构成定性和定量之间的相互转换, 作为知识表示的基础。

1.1 云模型

设论域 U , T 为 U 上的语言值, U 到闭区间 $[0, 1]$ 的映射 $C_T(x) : U \rightarrow [0, 1], \forall x \in U, x \rightarrow C_T(x)$ 是一个具有稳定倾向的随机数, 则 $C_T(x)$ 在 U 上的分布称为 T 的隶属云, 简称云, 或称之为 T 的云模型^[2]。当 $C_T(x)$ 为正态分布时, 则称该云模型为正态云模型或正态云, 云模型的数字特征可以用三个参数进行表征, 即期望 Ex 、熵 En 和超熵 He , 记为 $\mathbf{T}(Ex, En, He)$ ^[13]。

1.2 云模型的云滴

如果 x 是用云模型 $\mathbf{T}(Ex, En, He)$ 表示的某个定性概念的论域中的某一元素, 则 x 隶属于该定性概念 $\mathbf{T}(Ex, En, He)$ 的隶属度 $\mu(x)$ 由下列算法进行计算^[14], 数据对 $drop(x, \mu)$ 称为云滴。

1) $P = G(En, He)$, 生成以 En 为期望值、 He 为标准差的正态分布随机数 P ;

收稿日期 2010-09-06 录用日期 2011-04-23
Manuscript received September 6, 2010; accepted April 23, 2011
1. 常州信息职业技术学院电子与电气工程学院 常州 213164 2. 江苏科技大学电子信息学院 镇江 212003
1. Institute of Electronic and Electrical, Changzhou College of Information Technology, Changzhou 213164 2. College of Electronic Information, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003

2) 计算 $\mu(x) = e^{-\frac{(x-E_x)^2}{2P^2}}$.

1.3 云模型的定性推理

云模型的定性推理, 是用云模型作为概念的基本表示, 多条定性规则构成规则库, 每一条定性规则分为规则前件和规则后件两部分, 并采用云模型对语言概念进行描述, 分别表示定性规则的条件部分和结论部分. 表示规则前件的云模型称为前件云或输入云模型, 表示规则后件的云模型称为后件云或输出云模型, 当输入一个特定的条件激活定性规则时, 通过推理引擎实现云模型的定性推理^[15].

如图 1 所示, 设有规则 if A , then B , 其中输入云模型 $A = (Ex_A, En_A, He_A)$ 和输出云模型 $B = (Ex_B, En_B, He_B)$ 分别对应于论域 U_1 和 U_2 上的概念 C_1 和 C_2 . 当论域 U_1 中某一特定的输入值 a 激活前件云 CG_A 时, CG_A 随机地产生一个确定度 μ . 这个值反映了 a 对此定性规则的激活强度, 而确定度 μ 又作为后件云 CG_B 的输入, 随机产生一个云滴 $drop(b, \mu)$. 如果 a 激活的是前件云的上升沿, 则输出的 b 对应着后件云的上升沿, 反之亦然, 称为对称推理^[16].

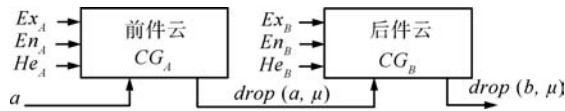


图 1 单规则推理

Fig. 1 Single rule inference

1.4 云滴的量化与云变换

逆向云^[17]的作用是从给定数量的云滴中, 还原出云模型的三个数字特征 (Ex, En, He) , 用于实现从定量的数值向定性语言概念的转换, 在控制过程中, 可以选择将还原出的逆向云的期望值 Ex 作为云模型控制的输出量; 云变换是指对于任意一个不规则的数据分布, 根据某种原则进行数学变换, 使之成为若干个不同的云的叠加, 通过云变换的方法可得到若干定性概念的叠加^[18].

2 云模型系统

云模型系统是一种基于知识或者基于云模型规则的系统, 它的核心就是由一组 IF-THEN 规则组成的知识库. 一个云模型的 IF-THEN 规则就是一个用输入云模型和输出云模型对所描述的知识所做的概念陈述, 以下说明云模型系统的构建过程.

定义 1 (3σ (区间) 正态分布随机数 $R_{3\sigma}(E, \sigma)$). 产生一个以 E 为均值、 σ 为标准差的正态分布随机数 $P^* = N(E, \sigma^2)$, 令

$$P = R_{3\sigma}(E, \sigma) = \begin{cases} E - 3\sigma, & P^* < E - 3\sigma \\ P^*, & E - 3\sigma \leq P^* \leq E + 3\sigma \\ E + 3\sigma, & E + 3\sigma < P^* \end{cases} \quad (1)$$

定义 2 (输入和输出云模型). 令 $X_i = (Ex_i, Enx_i, Hex_i)$ 为输入云模型, $Enx_i > 3Hex_i > 0$, 其中, Ex_i, Enx_i 和 Hex_i 分别是其期望值、熵和超熵; 令 $Y_i = (Ey_i, Eny_i, Hey_i)$ 为输出云模型, $Eny_i > 3Hey_i > 0$, 其中, Ey_i, Eny_i 和 Hey_i 分别是其期望值、熵和超熵. 根据云模型定义, 显然 $U_i = [Ex_i - 3Enx_i, Ex_i + 3Enx_i] \subset \mathbf{R}$, $V_i = [Ey_i - 3Eny_i, Ey_i + 3Eny_i] \subset \mathbf{R}$. 设对任一 U_i , 均存在 U_j , 使得 $U_i \cap U_j$ 非空, 其中, $i \neq j$, $i = 1 \sim M, j = 1 \sim M$, 令 $U = \cup_{i=1 \sim M} U_i$, $V = \cup_{i=1 \sim M} V_i$.

定义 3 (云模型规则库). 构建云模型规则库 $CR = \{R_i\}, i = 1 \sim M$, 其中, 规则 R_i :

$$\text{If } X_i = (Ex_i, Enx_i, Hex_i) \quad (2)$$

$$\text{Then } Y_i = (Ey_i, Eny_i, Hey_i)$$

定义 4 (云模型规则推理). 设任一定量输入值 $x \in U \subset \mathbf{R}$, 则称如下的步骤 1~4 为云模型规则推理过程, 称所产生的数据对 (y_i, μ_i) 为云滴.

步骤 1. 令 $i = 1$.

步骤 2. 当 $Ex_i - 3Enx_i \leq x \leq Ex_i + 3Enx_i$ 时, 则产生一个 $Px_i = R_{3\sigma}(Enx_i, Hex_i)$, 并计算 $\mu_i = \exp(-0.5(x - Ex_i)^2 / Px_i^2)$; 否则令 $\mu_i = 0$, 说明此输入 x 未能激活该规则.

步骤 3. 产生一个 $Py_i = R_{3\sigma}(Eny_i, Hey_i)$, 考虑对称推理^[16], 并按该方法选取计算 y_i 值的正负号, 计算 $y_i = Ey_i + (x - Ex_i) \cdot Py_i / Px_i$.

步骤 4. $i = i + 1$, 当 $i \leq M$ 时返回步骤 2, 否则结束.

定义 5 (云滴量化算法). 在定义 4 基础上, 根据下述算法, 可以获得定量输入 x 激励下的定量输出值 y , 显然 $y \subset \mathbf{R}$.

$$y = \frac{\sum_{i=1}^M y_i \cdot \mu_i}{\sum_{i=1}^M \mu_i}$$

定义 6 (云模型系统). 由 3σ 正态分布随机数、输入和输出云模型、云模型规则库、云模型规则推理和云滴量化算法构成的系统称为云模型系统, 图 2 所示为云模型系统结构图, 云模型系统的输入与输

出关系记为

$$y = f(x) = \frac{\sum_{i=1}^M y_i \cdot \mu_i}{\sum_{i=1}^M \mu_i} \quad (3)$$

定义 7 (云模型规则核心推理). 设任一定量输入值 $x \in U \subset \mathbf{R}$, 则称如下的步骤 1~4 为云模型规则核心推理过程, 称所产生的数据对 $(\bar{y}_i, \bar{\mu}_i)$ 为核心云滴.

步骤 1. 令 $i = 1$.

步骤 2. 当 $Ex_i - 3Enx_i \leq x \leq Ex_i + 3Enx_i$ 时, 则令 $\bar{P}x_i = Enx_i$, 并计算 $\bar{\mu}_i = \exp(-0.5(x - Ex_i)^2 / \bar{P}x_i^2)$; 否则令 $\bar{\mu}_i = 0$, 说明此输入 x 未能激活该规则.

步骤 3. 令 $\bar{P}y_i = Eny_i$, 计算 $\bar{y}_i = Ey_i + (x - Ex_i) \cdot \bar{P}y_i / \bar{P}x_i$.

步骤 4. $i = i + 1$, 当 $i \leq M$ 时返回步骤 2; 否则结束.

由定义 1、定义 2、定义 3、定义 7 和定义 5 构成的系统称为云模型核心系统, 记为

$$y = \bar{f}(x) = \frac{\sum_{i=1}^M \bar{y}_i \cdot \bar{\mu}_i}{\sum_{i=1}^M \bar{\mu}_i} \quad (4)$$

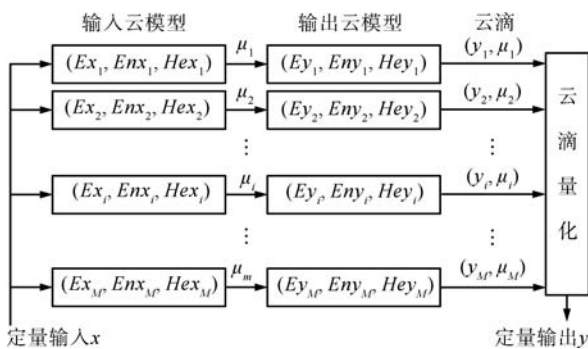


图 2 云模型系统结构图

Fig. 2 The structure of the cloud model system

定义 8 (云模型规则期望推理). 设任一定量输入值 $x \in U \subset \mathbf{R}$, 则称如下的步骤 1~4 为云模型规则期望推理过程, 称所产生的数据对 $(y_i^*, \bar{\mu}_i)$ 为期望云滴.

步骤 1. 令 $i = 1$.

步骤 2. 当 $Ex_i - 3Enx_i \leq x \leq Ex_i + 3Enx_i$ 时, 则令 $\bar{P}x_i = Enx_i$, 并计算 $\bar{\mu}_i = \exp(-0.5(x - Ex_i)^2 / \bar{P}x_i^2)$; 否则令 $\bar{\mu}_i = 0$, 说明此输入 x 未能激活该规则.

步骤 3. 令 $y_i^* = Ey_i$.

步骤 4. $i = i + 1$, 当 $i \leq M$ 时返回步骤 2; 否则结束.

由定义 1、定义 2、定义 3、定义 8 和定义 5 构成的系统称为云模型期望系统, 记为

$$y = f^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^M y_i^* \cdot \bar{\mu}_i}{\sum_{i=1}^M \bar{\mu}_i} \quad (5)$$

云模型系统、云模型核心系统和云模型期望系统三者的区别关键在于云模型规则推理的不同. 在不同的云模型推理规则中, 输入云模型、输出云模型的熵和超熵参数对云滴的离散程度的影响渐次减弱, 系统的复杂性依次由复杂到简单. 复杂性越强, 表明该云模型系统所蕴含的知识的不确定性 (随机性和模糊性) 越强.

3 云模型系统的逼近性

云模型方法是用自然语言值表示的定性概念与其定量数据表示之间的不确定性转换模型, 可以构成定性和定量相互间的映射关系. 迄今, 虽然云模型已经成功地应用于控制工程等诸多领域, 但问题是对于一个任意的非线性连续函数, 我们是否一定能设计出一类由输入云模型、输出云模型、推理规则、云滴量化方法组成的云模型系统, 使得该云模型系统能够任意逼近这个非线性连续函数. 如果可以的话, 则能够从理论上解释为什么云模型方法会在众多不同的领域得到应用, 也为云模型系统的推广应用提供更有力的理论支撑.

引理 1. 云模型系统收敛于云模型核心系统, 即

$$\lim_{\substack{Hex_i \rightarrow 0 \\ Hey_i \rightarrow 0}} f(x) = \bar{f}(x), \quad i = 1 \sim M$$

证明. 由于

$$\lim_{Hex_i \rightarrow 0} Px_i =$$

$$\lim_{Hex_i \rightarrow 0} R_{3\sigma}(Enx_i, Hex_i) = Enx_i = \bar{P}x_i$$

$$\lim_{Hey_i \rightarrow 0} Py_i =$$

$$\lim_{Hey_i \rightarrow 0} R_{3\sigma}(Eny_i, Hey_i) = Eny_i = \bar{P}y_i$$

因此 $\lim_{Hex_i \rightarrow 0} \mu_i = \bar{\mu}_i, \lim_{\substack{Hex_i \rightarrow 0 \\ Hey_i \rightarrow 0}} y_i = \bar{y}_i$

即 $\lim_{\substack{Hex_i \rightarrow 0 \\ Hey_i \rightarrow 0}} f(x) = \bar{f}(x)$ 成立. □

引理 2. 云模型核心系统收敛于云模型期望系统, 即

$$\lim_{Eny_i \rightarrow 0} \bar{f}(x) = f^*(x), \quad i = 1 \sim M$$

证明. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{Eny_i \rightarrow 0} \bar{y}_i &= \lim_{Eny_i \rightarrow 0} (Ey_i + (x - Ex_i) \cdot \overline{Py_i / Px_i}) = \\ &= \lim_{Eny_i \rightarrow 0} (Ey_i + (x - Ex_i) \cdot Eny_i / \overline{Px_i}) = \\ &= Ey_i = y_i^* \end{aligned}$$

因此 $\lim_{Eny_i \rightarrow 0} \bar{f}(x) = f^*(x)$ 成立. □

定理 1 (云模型系统的通用逼近性).

考虑式 (3) 所构建的云模型系统, 对于任意定义在 U 上的实连续函数 $g(x)$ 和任意 $\varepsilon > 0$, 则存在云模型系统 $y = f(x)$ 使得下式成立:

$$\sup_{x \in U} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

证明. 由引理 1 和引理 2 易知,

$$\lim_{\substack{HEx_i \rightarrow 0 \\ HEx_i \rightarrow 0 \\ Eny_i \rightarrow 0}} f(x) = f^*(x), i = 1 \sim M$$

因此, 只需证明 $\sup_{x \in U} |f^*(x) - g(x)| < \varepsilon$ 成立即可. 根据 Stone-Weierstrass 定理^[19], 首先, 由定义 2 易知 $U = \cup_{i=1 \sim M} U_i = [\min(Ex_i - 3Enx_i), \max(Ex_i + 3Enx_i)]$, U 是紧集. 令 Y 为所有形如式 (5) 的映射集合.

1) Y 是代数.

令 $f_1^*, f_2^* \in Y$, 于是 f_1^*, f_2^* 写成:

$$\begin{aligned} f_1^*(x) &= \frac{\sum_{i=1}^{M1} Ey_{i1} \cdot \bar{\mu}_{i1}}{\sum_{i=1}^{M1} \bar{\mu}_{i1}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{M1} Ey_{i1} \cdot \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{i1})^2}{Enx_{i1}^2}\right)}{\sum_{i=1}^{M1} \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{i1})^2}{Enx_{i1}^2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2^*(x) &= \frac{\sum_{j=1}^{M2} Ey_{j2} \cdot \bar{\mu}_{j2}}{\sum_{j=1}^{M2} \bar{\mu}_{j2}} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{M2} Ey_{j2} \cdot \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{j2})^2}{Enx_{j2}^2}\right)}{\sum_{j=1}^{M2} \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{j2})^2}{Enx_{j2}^2}\right)} \end{aligned}$$

由此可得:

$$\begin{aligned} f_1^*(x) + f_2^*(x) &= \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{M1} \sum_{j=1}^{M2} (Ey_{i1} + Ey_{j2}) \cdot \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{i1})^2}{Enx_{i1}^2} - 0.5 \frac{(x - Ex_{j2})^2}{Enx_{j2}^2}\right)}{\sum_{i=1}^{M1} \sum_{j=1}^{M2} \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{i1})^2}{Enx_{i1}^2} - 0.5 \frac{(x - Ex_{j2})^2}{Enx_{j2}^2}\right)} \end{aligned}$$

该式的形式完全同于式 (5), 所以 $f_1^* + f_2^* \in Y$. 类似地,

$$\begin{aligned} f_1^*(x) \cdot f_2^*(x) &= \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{M1} \sum_{j=1}^{M2} (Ey_{i1} \cdot Ey_{j2}) \cdot \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{i1})^2}{Enx_{i1}^2} - 0.5 \frac{(x - Ex_{j2})^2}{Enx_{j2}^2}\right)}{\sum_{i=1}^{M1} \sum_{j=1}^{M2} \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{i1})^2}{Enx_{i1}^2} - 0.5 \frac{(x - Ex_{j2})^2}{Enx_{j2}^2}\right)} \end{aligned}$$

$f_1^*(x) \cdot f_2^*(x)$ 的形式也完全同于式 (5), 所以 $f_1^* \cdot f_2^* \in Y$. 对于任意的 $c \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} c \cdot f_1^*(x) &= c \cdot \frac{\sum_{i=1}^{M1} Ey_{i1} \cdot \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{i1})^2}{Enx_{i1}^2}\right)}{\sum_{i=1}^{M1} \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{i1})^2}{Enx_{i1}^2}\right)} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{M1} c \cdot Ey_{i1} \cdot \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{i1})^2}{Enx_{i1}^2}\right)}{\sum_{i=1}^{M1} \exp\left(-0.5 \frac{(x - Ex_{i1})^2}{Enx_{i1}^2}\right)} \end{aligned}$$

上式也可以表示为式 (5) 的形式, 所以 $c \cdot f_1^* \in Y$. 因此, Y 是代数.

2) Y 分离了 U 上的点.

构造一个云模型期望系统 $f^*(x)$, 选择式 (5) 的参数为: $M = 2, Ey_1 = 0, Ey_2 = 1, Ex_1 = 1, Ex_2 = -1, Enx_1 = Enx_2 = 1$, 有

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \\ &= \frac{Ey_1 \cdot \exp\left(-\frac{(x - Ex_1)^2}{2 \cdot Enx_1^2}\right) + Ey_2 \cdot \exp\left(-\frac{(x - Ex_2)^2}{2 \cdot Enx_2^2}\right)}{\exp\left(-\frac{(x - Ex_1)^2}{2 \cdot Enx_1^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x - Ex_2)^2}{2 \cdot Enx_2^2}\right)} = \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2}\right)}{\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{\frac{\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)}{\exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2}\right)} + 1} = \frac{1}{\exp(2x) + 1} \end{aligned}$$

令 $x^0, z^0 \in U$ 为两个任意点, 当 $x^0 \neq z^0$ 时, 有 $f^*(x^0) \neq f^*(z^0)$, 即 Y 分离了 U 上的点.

3) Y 使得 U 中的点不为零.

显然,任意形如式(5)的 $f^*(x)$ ($Ey_i > 0$) 都具有 $f^*(x) > 0 (\forall x \in U)$. 故 Y 使得 U 中的点不为零. \square

此定理说明了云模型系统(式(3))可以以任意精度逼近连续函数,更重要地,指出了对云模型系统的设计关键是设计其对应的云模型期望系统(式(5)).

定理 2. 考虑云模型核心系统,若选取 $\frac{Ey_i}{Ex_i} = \frac{Eny_i}{Enx_i} \equiv K$, 其中, $i = 1 \sim M$, K 为常数,则云模型核心系统 $y = \bar{f}(x)$ 是一个比例系统,即 $y = K \cdot x$.

证明. 根据条件 $\frac{Ey_i}{Ex_i} = \frac{Eny_i}{Enx_i} \equiv K$, 由定义 7, 有:

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= Ey_i + (x - Ex_i) \cdot \frac{\overline{Py}_i}{\overline{Px}_i} = \\ & Ey_i + (x - Ex_i) \frac{Eny_i}{Enx_i} = \\ & Ey_i + (x - Ex_i) \cdot K = K \cdot x \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} y = \bar{f}(x) &= \frac{\sum_{i=1}^M \bar{y}_i \cdot \bar{\mu}_i}{\sum_{i=1}^M \bar{\mu}_i} = \frac{\sum_{i=1}^M (K \cdot x) \cdot \bar{\mu}_i}{\sum_{i=1}^M \bar{\mu}_i} = \\ & \frac{(K \cdot x) \cdot \sum_{i=1}^M \bar{\mu}_i}{\sum_{i=1}^M \bar{\mu}_i} = K \cdot x \end{aligned}$$

\square

据此设计的云模型核心系统等同于常规 PID 控制器中的 P 控制关系,所需设计的云模型参数仅与输入云模型、输出云模型的期望值和熵有关,而与它们的超熵无关,与规则的个数 M 亦无关. 云模型中的超熵参数是影响云模型系统输出的离散区域大小的重要参数,特别地,当 $M = 1$ 时,该云模型核心系统仅由单规则构成,其输入输出关系 $y = K \cdot x$ 等同于文献 [16] 单规则推理映射区域中的中心线 MN.

4 仿真实例

1) 设计云模型期望系统 $f^*(x)$, 使之逼近定义在 $U = [-1, 1]$ 上的连续函数 $g(x) = x^3$, 精度 $\varepsilon = 0.3$. 由于

$$\begin{aligned} \sup_{x \in U} |f^*(x) - g(x)| &\leq \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \Delta x = \\ & \sup_{x \in U} |3x^2| \Delta x = |3 \cdot 1^2| \Delta x = 3\Delta x \end{aligned}$$

令 $3\Delta x = \varepsilon = 0.3$, 则 $\Delta x = 0.1$, 因此,构造云模型期望值系统 $f^*(x)$:

$$f^*(x) = \frac{\sum_{i=0}^{20} (-1 + 0.1i)^3 \cdot \bar{\mu}_i}{\sum_{i=0}^{20} \bar{\mu}_i}$$

其中, $\bar{\mu}_i = \exp(-0.5(x - Ex_i)^2 / \overline{Px}_i^2)$, $Ex_i = -1 + 0.1i$, $\overline{Px}_i \equiv 0.03$.

云模型规则库构造如下,共 21 条规则,规则 i :

If $X_i = (Ex_i, Enx_i, Hex_i)$

Then $Y_i = Ey_i$ ($i = 0 \sim 20$)

其中, $Ex_i = -1 + 0.1i$, $Enx_i = \overline{Px}_i \equiv 0.03$ 与 Hex_i 无关, $Ey_i = (-1 + 0.1i)^3$.

如图 3 所示,所构建的云模型期望系统 $f^*(x)$ 与连续函数 $g(x) = x^3$ 基本一致.

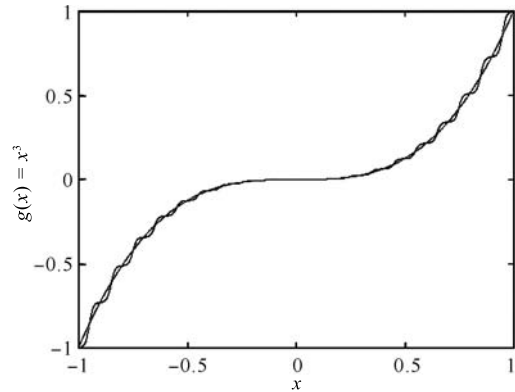


图 3 云模型期望值系统 $f^*(x)$ 和 $g(x) = x^3$

Fig. 3 Cloud model expectation system $f^*(x)$ and $g(x) = x^3$

2) 设计云模型期望系统 $f^*(x)$, 使之逼近定义在 $U = [-3, 3]$ 上的连续函数 $g(x) = \sin(x)$, 精度 $\varepsilon = 0.2$.

由于

$$\begin{aligned} \sup_{x \in U} |f^*(x) - g(x)| &\leq \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \Delta x = \\ & \sup_{x \in U} |\cos(x)| \Delta x = |1| \Delta x = \Delta x \end{aligned}$$

令 $\Delta x = \varepsilon = 0.2$, 则满足精度要求,构造云模型期望系统 $f^*(x)$.

$$f^*(x) = \frac{\sum_{i=0}^{30} \sin(-3 + 0.2i) \cdot \bar{\mu}_i}{\sum_{i=0}^{30} \bar{\mu}_i}$$

其中, $\bar{\mu}_i = \exp(-0.5(x - Ex_i)^2/\overline{Px_i^2})$, $Ex_i = -3 + 0.2i$, $\overline{Px_i} \equiv 0.07$.

云模型规则库构造如下, 共 31 条规则, 规则 i :

If $X_i = (Ex_i, Enx_i, Hex_i)$

Then $Y_i = Ey_i (i = 0 \sim 30)$

其中, $Ex_i = -3 + 0.2i$, $Enx_i = \overline{Px_i} \equiv 0.07$ 与 Hex_i 无关, $Ey_i = \sin(-3 + 0.2i)$.

如图 4 所示, 所构建的云模型期望系统 $f^*(x)$ 与连续函数 $g(x) = \sin(x)$ 基本一致.

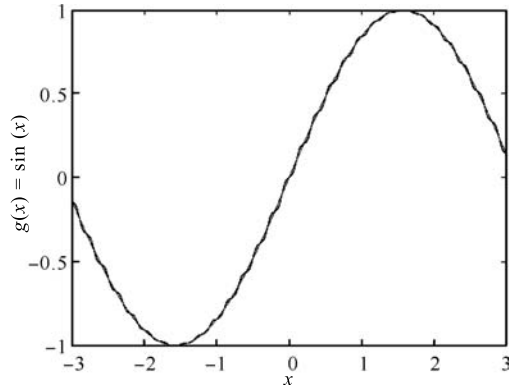


图 4 云模型期望值系统 $f^*(x)$ 和 $g(x) = \sin(x)$

Fig. 4 Cloud model expectation system $f^*(x)$ and $g(x) = \sin(x)$

5 结束语

云模型系统的通用逼近性具有重要的理论和实际意义. 本文研究并设计了云模型规则推理、云模型规则核心推理和云模型规则期望推理, 并据此构建了一类新的云模型系统, 证明了在 3σ (区间) 正态分布随机数的条件下, 云模型系统即是通用的函数逼近器, 最后指出了云模型核心系统在特定条件下可以实现比例控制功能. 值得提出的是, 当云模型的熵和超熵并不趋于零, 而是有界参数时, 云模型系统的逼近性将是有界的; 另外, 本文研究的云模型系统的逼近性是建立在一维云模型基础之上, 能否将其扩展至多维云模型系统, 可以进一步分析这些新的云模型系统的逼近特性.

References

- Li D Y, Han J W, Shi X M, Chan M C. Knowledge representation and discovery based on linguistic atoms. *Knowledge-Based Systems*, 1998, **10** (7): 431-440
- Li D Y, Cheng D W, Shi X M. Uncertainty reasoning based on cloud models in controllers. *Computer and Mathematics with Application*, 1998, **35**(3): 99-123
- Huang Jian-Jun, Li Peng-Fei, Yu Jian-Ping, Ruan Yi-Wu. Multitarget data association algorithm using cluster cloud model based c -means clustering. *Journal of Shenzhen University (Science and Engineering)*, 2010, **27**(1): 11-15
- Zhang Fei-Zhou, Fan Yue-Zu, Sun Xian-Fang. Assessment and analysis of fuzzy reliability based on cloud models in aircraft navigation system. *Acta Automatic Sinica*, 2002, **28**(1): 126-130
(张飞舟, 范跃祖, 孙先仿. 基于云模型的导航系统模糊可靠性评测分析. *自动化学报*, 2002, **28**(1): 126-130)
- Dai Chao-Hua, Zhu Yun-Fang, Chen Wei-Rong. Cloud theory-based genetic algorithm. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2006, **41**(6): 729-732
(戴朝华, 朱云芳, 陈维荣. 云遗传算法. *西南交通大学学报*, 2006, **41**(6): 729-732)
- Zhang Guo-Ying, Sha Yun, Liu Xu-Hong, Liu Yu-Shu. High dimensional cloud model and its application in multiple attribute evaluation. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2004, **24**(12): 1065-1069
(张国英, 沙云, 刘旭红, 刘玉树. 高维云模型及其在多属性评价中的应用. *北京理工大学学报*, 2004, **24**(12): 1065-1069)
- Ma Shi-Dong, Han Liang, Gong Guang-Hong, Song Xiao. Target threat assessment technology based on cloud model. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2010, **36**(2): 150-154
(麻士东, 韩亮, 龚光红, 宋晓. 基于云模型的目标威胁等级评估. *北京航空航天大学学报*, 2010, **36**(2): 150-154)
- Li Zhong, Yang Yi-Dong. Controllable pitch propeller control based on qualitative reasoning of variant dimension cloud model. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2003, **35**(2): 162-167.
(李众, 杨一栋. 基于混合维云模型定性推理的调距桨螺距控制. *南京航空航天大学学报*, 2003, **35**(2): 162-167)
- Li Tao, Sun Qu, Yang Li, Xu Ting-Ting. Intelligent controller design based on vector decoupled clouds model. *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2009, **41**(5): 232-237
(李涛, 孙衢, 杨莉, 徐婷婷. 基于解耦矢量云模型的智能控制器设计. *四川大学学报 (工程科学版)*, 2009, **41**(5): 232-237)
- Gao Jian, Jiang Chang-Sheng, Li Zhong. A novel design of controller based on cloud model. *Information and Control*. 2005, **34**(2): 157-162
(高键, 姜长生, 李众. 一种新的云模型控制器设计. *信息与控制*, 2005, **34**(2): 157-162)
- Li Zhong, Yang Yi-Dong. A novel intelligent controller based on uncertainty reasoning of two-dimension cloud model. *Control and Decision*, 2005, **20**(8): 866-872
(李众, 杨一栋. 一种新的基于二维云模型不确定性推理的智能控制器. *控制与决策*, 2005, **20**(8): 866-872)
- Zhang Fei-Zhou, Fan Yue-Zu, Shen Cheng-Zhi, Li De-Yi, Chen Hui. Intelligent control inverted pendulum with cloud models. *Control Theory and Applications*, 2000, **17**(4): 519-523
(张飞舟, 范跃祖, 沈程智, 李德毅, 陈晖. 利用云模型实现智能控制倒立摆. *控制理论与应用*, 2000, **17**(4): 519-523)
- Li De-Yi, Di Kai-Chang, Li De-Ren, Shi Xue-Mei. Mining association rules with linguistic cloud models. *Journal of Software*, 2000, **11**(2): 143-158
(李德毅, 邸凯昌, 李德仁, 史雪梅. 用语言云模型发掘关联规则. *软件学报*, 2000, **11**(2): 143-158)

- 14 Di Kai-Chang, Li De-Yi, Li De-Ren. Cloud theory and its application in spatial data excavation and knowledge discovery. *Journal of Image and Graphics of China*, 1999, **4** (11): 931–935
(邱凯昌, 李德毅, 李德仁. 云理论及其在空间数据发掘和知识发现中的应用. *中国图象图形学报*, 1999, **4**(11): 931–935)
- 15 Li De-Yi, Du Yi. *Artificial Intelligence with Uncertainty*. Beijing: National Defence Industry Press, 2005
(李德毅, 杜鹞. 不确定性人工智能. 北京: 国防工业出版社, 2005)
- 16 Li Zhong, Liu Yan. Research on one-dimension normal cloud model single rule reasoning. *Journal of System Simulation*, 2008, **20**(3): 702–705
(李众, 刘艳. 一维正态云模型单规则推理映射研究. *系统仿真学报*, 2008, **20**(3): 702–705)
- 17 Lv Hui-Jun, Wang Ye, Li De-Yi, Liu Chang-Yu. The application of backward cloud in qualitative evaluation. *Chinese Journal of Computers*, 2003, **26**(8): 1009–1014
(吕辉军, 王晔, 李德毅, 刘常昱. 逆向云在定性评价中的应用. *计算机学报*, 2003, **26**(8): 1009–1014)
- 18 Du Yi, Li De-Yi. A cloud concept based partition and its application on association excavation. *Journal of Software*, 2001, **12** (2): 196–203
(杜鹞, 李德毅. 基于云的概念划分及其在关联挖掘上的应用. *软件学报*, 2001, **12** (2): 196–203)
- 19 Wang Li-Xin. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Beijing: Tsinghua University Press, 2003
(王立新. 模糊系统与模糊控制教程. 北京: 清华大学出版社, 2003)



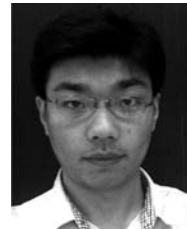
李 众 常州信息职业技术学院电子与电气工程学院教授, 江苏科技大学电子信息学院教授. 2006 年于南京航空航天大学自动化学院获得控制理论与控制工程专业工学博士. 主要研究方向为电气自动化、智能控制和云模型. 本文通信作者. E-mail: xlizhong@163.com

(**LI Zhong** Professor at the Institute of Electronic and Electrical, Changzhou College of Information Technology, professor at the College of Electronic Information, Jiangsu University of Science and Technology. He received his Ph.D. degree in control theory and control engineering from the College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics in 2006. His research interest covers electrical automation, intelligent control, and cloud model. Corresponding author of this paper.)



高 键 江苏科技大学电子信息学院副教授. 1996 年于南京理工大学自动化学院获得自动控制理论及应用专业工学硕士. 主要研究方向为电气自动化和云模型. E-mail: gj0519@163.com

(**GAO Jian** Associate professor at the College of Electronic Information, Jiangsu University of Science and Technology. She received her master degree in automatic control theory and applications from the School of Automation, Nanjing University of Science and Technology in 1996. Her research interest covers electrical automation and cloud model.)



张日勋 江苏科技大学电子信息学院硕士研究生. 主要研究方向为电气自动化和智能控制. E-mail: zgongl@gmail.com
(**ZHANG Ri-Xun** Master student at the College of Electronic Information, Jiangsu University of Science and Technology. His research interest covers electrical automation and intelligent control.)