

## 加权型曲率保持 PDE 图像滤波方法

郑钰辉<sup>1,2</sup> 张建伟<sup>3</sup> 陈允杰<sup>3</sup> 孙权森<sup>4</sup>

**摘要** 提出了一种加权型曲率保持偏微分方程 (Partial differential equation, PDE) 滤波方法. 传统曲率保持 PDE 滤波方法未考虑各积分曲线可能经历不同的图像结构, 如此影响了其对图像边缘的保持能力. 在此基础上, 利用局部图像方向信息为不同积分曲线设计了相应的权重, 得到了一种张量驱动的加权型曲率保持 PDE 滤波方法. 实验结果表明该方法在滤波的同时能较好地保持图像中边缘与曲率结构, 且对图像具有一定增强能力.

**关键词** 图像滤波, 曲率保持, 偏微分方程, 结构张量

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2011.01175

### Weighted Curvature-preserving PDE Based Image Regularization Method

ZHENG Yu-Hui<sup>1,2</sup> ZHANG Jian-Wei<sup>3</sup> CHEN Yun-Jie<sup>3</sup> SUN Quan-Sen<sup>4</sup>

**Abstract** A weighted curvature-preserving partial differential equation (PDE) based filtering method is proposed. First, it is pointed out that the tensor-driven curvature-preserving PDE filtering methods can not preserve image edge very well because that the methods does not take into account the differences between integral curves. Then, we employ local image directional information to design weight coefficients for different integral curves, and present a new tensor-driven curvature-preserving PDE. Experimental results indicate that new method shows superior performance on preserving image edge and curvature geometric structure, as well as some image enhancement ability.

**Key words** Image filtering, curvature-preserving, partial differential equation (PDE), structure tensor

滤波是图像处理中一项重要的研究课题. 一方面其能有效地抑制噪声, 为后续处理提供更为精确的信息, 如图像分割、边缘检测、目标识别等; 另一方面对滤波方法的研究, 还能促进图像正则化以及图像建模理论的发展<sup>[1-2]</sup>. 现有滤波方法主要基于

两种思想: 1) 稀疏分解<sup>[3-4]</sup>; 2) 平滑滤波<sup>[5-6]</sup>. 前者将有用信息看作图像中的稀疏成分, 而噪声作为图像去除其稀疏成分后所得的残差, 稀疏字典的构建是影响该类方法处理效果的关键问题之一; 后者将噪声视为局部振荡信号, 通过平滑的方式予以去除, 构造图像结构描述算子是该类方法研究的重点. 由于目前稀疏分解滤波方法时间消耗相对较大, 本文聚集于平滑滤波方法研究.

目前, 平滑滤波研究主要集中在两个方面: 1) 扩散偏微分方程 (Partial differential equation, PDE) 滤波方法<sup>[7-10]</sup>; 2) 非局部滤波平均方法 (Non-local meanfilter, NLMF)<sup>[11]</sup>. 前者为局部方法, 后者则为非局部方法. 局部滤波方法在过去的 20 年中得到了飞速的发展, 已成功应用到计算机视觉诸多领域. 但近年来非局部滤波方法凭借自身的特点, 即公式简洁、不需要迭代、性能良好, 逐渐成为研究热点. 然而, 该类方法对灰度缓慢变化的图像, 如人脸图像, 容易产生阶梯效应. 此外由于是在全图内搜索相似图像片计算加权系数, 非局部滤波方法时间消耗较大, 这影响了其在实际应用的推广. 相比之下, 局部滤波方法存在现实的研究意义.

扩散 PDE 滤波方法研究经历了线性到非线性、各向同性到各向异性的发展阶段. 该类方法主要利用多尺度分析理论, 从方向滤波器的角度设计自适应扩散 PDE. 自适应扩散 PDE 滤波方法又分为各向同性和各向异性的滤波方法, 前者代表性的方法有

收稿日期 2010-12-22 录用日期 2011-04-09  
Manuscript received December 22, 2010; accepted April 9, 2011  
国家自然科学基金 (61173072, 61003209), 江苏高校优势学科建设工程资助项目, 江苏省自然科学基金 (BK2011824, BK2011825), 江苏省高校自然科学研究项目 (10KJB520011, 10KJB52 0012), 高等学校博士学科点专项科研基金 (200802880017), 南京信息工程大学校科研启动基金资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61173072, 61003209), the Project Funded by the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions, Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK2011824, BK2011825), Natural Science Foundation of the Higher Education Institutions of Jiangsu Province (10KJB520011, 10KJB520012), Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (200802880017), and the Scientific Research Staring Foundation of Nanjing University of Information Science and Technology

1. 南京信息工程大学江苏省网络监控中心 南京 210044 2. 南京信息工程大学计算机与软件学院 南京 210044 3. 南京信息工程大学数理学院 南京 210044 4. 南京理工大学计算机科学与技术学院 南京 210094

1. Jiangsu Engineering Center of Network Monitoring, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044 2. School of Computer and Software, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044 3. College of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044 4. School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094

PM (Perona-Malik) 滤波方法<sup>[7]</sup>; 后者代表性的方法有张量驱动型 PDE 滤波方法<sup>[8-10]</sup>. PM 滤波是一种非线性各向同性方法, 其在处理分段平滑的图像, 如卡通图像、室内图像或医学图像等可得到较好的结果.

但上述方法不适应于结构丰富的图像, 咎其原因在于 PM 方法未考虑局部结构方向信息, 平滑图像时是各向同性的. 各向异性的张量驱动型 PDE 滤波方法自然引起广泛关注.

在张量驱动型 PDE 图像滤波方法的研究中, Weickert 等<sup>[8]</sup> 首次将扩散张量引入到扩散 PDE 中, 提出了散度型张量驱动 PDE 滤波方法 (Divergence-based tensor-driven PDE, DTPDE). 这一方法的思想利用结构张量作为局部结构描述子, 通过其构造扩散张量, 使 PDE 的扩散速度在图像边缘方向较大, 而在垂直与边缘的方向上相对较小. 此后, Tschumperle 等<sup>[9]</sup> 深入研究了 DTPDE 滤波方法的性能, 指出这种滤波方法不能完全刻画扩散张量所要体现的滤波性能, 继而提出了迹型张量驱动 PDE 滤波方法 (Trace-based tensor-driven PDE, TTPDE). TTPDE 滤波方法等价于有向高斯滤波, 该方法虽然满足多尺度分析的基本要求, 但图像角点保持能力略有不足.

近来, Tschumperle<sup>[10]</sup> 在深入分析上述张量驱动 PDE 方法的基础上, 指出这些方法均不具备曲率保持能力, 进而利用图形学中中线积分卷积的思想, 提出了张量驱动型曲率保持 PDE 滤波方法 (Tensor-driven curvature-preserving PDE, TCPDE). 该方法首先将扩散张量投影到  $0^\circ$  到  $180^\circ$  各方向上, 形成诸多向量场, 接着对每个像素在上述向量场中分别追踪一条对应的积分曲线, 随后对积分曲线经过的像素作高斯卷积, 最后对该像素点各线性卷积结果求平均, 得到了较好的平滑滤波效果.

需要指出的是, TCPDE 对各线性卷积结果简单求平均, 未考虑图像本身结构信息. 针对这一问题, 本文利用加权平均策略建立了权重函数, 根据具体图像内容赋予各线积分曲线不同的加权系数, 并设计了权重系数关键参数选取方法, 提出了一种性价比较高的加权型曲率保持 PDE 滤波方法 (Weighted curvature-preserving PDE, WCPDE), 该方法在滤波的同时可进一步保持图像的边缘与曲率结构信息.

本文余下章节安排如下: 第 1 节简述了张量驱动型的 PDE 滤波方法; 第 2 节详细描述了本文方法; 第 3 节实验从滤波效果与时间消耗方面, 分析比较了本文方法与相关主流方法; 第 4 节总结了全文.

## 1 张量驱动型曲率保持 PDE 图像滤波方法

张量驱动型曲率保持 PDE (TCPDE)<sup>[10]</sup> 具体公式见式 (1). 式 (1) 中,  $I$  表示图像;  $\text{tr}(\cdot)$  为矩阵迹操作;  $H = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}$  为 Hessian 矩阵;  $I_{xx}$  表示图像在  $x$  方向上的二阶偏导;  $\alpha_\Theta = (\cos \Theta, \sin \Theta)^T$  为单位方向角;  $D$  称为扩散张量 (具体计算见附录 A), 反映了图像局部的方向信息;  $\sqrt{D}\alpha_\Theta = (v, \nu)$  表示将扩散张量  $D$  投影到  $\alpha_\Theta$  方向上生成的向量场;  $\nabla$  为图像梯度;  $J_{\sqrt{D}\alpha_\Theta} = \begin{bmatrix} v_x & v_y \\ \nu_x & \nu_y \end{bmatrix}$  是雅可比矩阵;  $v_x$  表示  $v$  在  $x$  方向的一阶偏导. 式 (1) 可进一步写为式 (2), 式 (2) 第 1 项为扩散项, 第 2 项为曲率保持项, 如此实现了对图像中角点信息的保持.

进一步分析式 (1), 该式是将扩散张量  $D$  分别投影于  $[0, \pi)$  上每一方向, 对于某一方向, 记  $D$  在该方向投影得到的向量场为  $w$ , 则对应的扩散方程可写为式 (3). 因为扩散张量  $D$  在各方向投影所得向量场  $w$ , 有时可能指向图像边缘方向, 有时则会指向梯度方向, 换句话说各向量场  $w$  对应的扩散方程, 其对滤波结果的影响理论上是不一样的. 而对比式 (1) 与式 (2) 可知, TCPDE 是对各方向对应的扩散方程作平均操作, 这影响了其对图像边缘与角点的保持能力. 为进一步提升 TCPDE 滤波性能, 本文提出了一种加权型改进方法.

## 2 加权型曲率保持 PDE 图像滤波方法

本节首先描述了加权型曲率保持 PDE (WCPDE) 具体公式, 随后集中于权重函数的分析与构造; 接着讨论了权重函数中关键参数的选取问题; 最后给出了具体实现步骤.

### 2.1 加权型曲率保持 PDE

通过上节分析可知, TCPDE 对边缘与角点的

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{2}{\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} \text{tr}((\sqrt{D}\alpha_\Theta)(\sqrt{D}\alpha_\Theta)^T H) + (\nabla I)^T J_{\sqrt{D}\alpha_\Theta} d\Theta \quad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{tr}(DH) + \frac{2}{\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} (\nabla I)^T J_{\sqrt{D}\alpha_\Theta} d\Theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{tr}(ww^T H) + (\nabla I)^T J_w w \quad (3)$$

平滑效果仍不能令人满意, 未考虑各向量场对应的扩散方程对图像边缘与曲率结构的保持能力. 为此, 采取加权平均的策略改进式 (1), 具体公式见式 (4). 式 (4) 中,  $W$  为权重函数, 与向量场  $\sqrt{D}\alpha_\Theta$  有关, 以实现对不同向量场赋予相应的权系数, 当  $W = 1$  时, 式 (4) 退化为式 (1), 即为 TCPDE;  $\int_{\Theta=0}^{\Pi} W(\sqrt{D})d\Theta$  表示对各向量场对应的权系数求合, 用于归一化权重系数.

为降低方程的复杂性, 可将式 (4) 展开为式 (5), 继而可进一步简化为式 (6). 比较式 (6) 与式 (1), 二者区别在于第 2 项, 式 (6) 对式 (1) 中曲率项作了加权平均改进, 称此为加权型曲率保持项. 若要使式 (6) 对图像中曲率结构保持较好, 关键在于权重函数的设计.

首先考察两种极端向量场下, 梯度方向场与边缘方向, 加权型曲率保持项的特性. 为简化分析, 这里只考虑梯度方向对曲率保持项的影响, 以  $\mathbf{V} = \nabla I / |\nabla I|$  取代曲率保持项中的  $\nabla I$ , 同时令  $\mathbf{V} = (\xi_x, \xi_y)^T$ , 则有: 1) 当  $\sqrt{D}\alpha_\Theta = \mathbf{V}$ , 因为  $\xi_x^2 + \xi_y^2 = 1$ , 得  $\xi_x\xi_{xx} + \xi_y\xi_{xy} = 0$ , 以及  $\xi_x\xi_{xy} + \xi_y\xi_{yy} = 0$ , 如此得到式 (7). 此时, 式 (6) 退化为迹型张量驱动 PDE 滤波方法, 失去了对图像中曲率结构的保持能力; 2) 当  $\sqrt{D}\alpha_\Theta = (-\xi_y, \xi_x)$  时,  $J_{\sqrt{D}\alpha_\Theta} = \begin{bmatrix} -\xi_{yx} & \xi_{yy} \\ \xi_{xx} & \xi_{xy} \end{bmatrix}$ , 则有式 (8), 式 (8) 中  $|\mathbf{v}| = 1$ . 从扩散滤波角度来看, 式 (8) 右端与逆平均曲率流相

似, 众所周知, 平均曲率流容易模糊图像中的曲率信息, 而逆平均曲率流对图像则有一定的增强作用. 此时, 不难想象式 (6) 在平滑图像的同时, 能增强图像中的曲率结构.

由上述可知, 当  $\sqrt{D}\alpha_\Theta$  平行于图像边缘时, 应赋予其对应扩散方程较大的权重; 而当  $\sqrt{D}\alpha_\Theta$  垂直于图像边缘时, 应赋予对其对应扩散方程较小的权重. 可根据到图像边缘方向的距离 (记为  $E$ ), 赋予各向量场下扩散方程相应的权系数: 梯度方向时,  $E$  值最大, 对应的权系数趋于零; 边缘方向时  $E$  最小, 则对应的权系数较大. 据此思想, 本文构造的权重函数为式 (9) 与式 (10). 上述两个式子中,  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 / |\mathbf{V}_2|$  为单位向量, 由扩散张量  $D$  最大特征值对应的特征向量得到 (具体计算见附录 A);  $E$  表示  $\sqrt{D}\alpha_\Theta$  到边缘方向 ( $\mathbf{V}$  方向) 的垂直距离,  $\sigma_w$  是权重参数, 用以控制权系数曲线 (高斯曲线) 的宽扁程度, 我们将在下节讨论. 通过式 (9) 与式 (10), 可实现当  $E$  值增大时,  $W(\sqrt{D}\alpha_\Theta)$  值减小, 如  $\sqrt{D}\alpha_\Theta$  垂直于边缘方向时,  $W(\sqrt{D}\alpha_\Theta)$  达到最小值;  $E$  值变小时,  $W(\sqrt{D}\alpha_\Theta)$  值增大, 如当  $\sqrt{D}\alpha_\Theta$  平行于边缘方向时,  $W(\sqrt{D}\alpha_\Theta)$  达到最大值. 如此, 实现了权重函数的设计.

## 2.2 权重参数选取

当  $\sigma_w$  较大时, 权系数曲线下落较慢, 这意味着各向量场对应的权系数相差较小, 此时 WCPDE 平

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\int_{\Theta=0}^{\Pi} W(\sqrt{D}\alpha_\Theta) \cdot (\text{tr}((\sqrt{D}\alpha_\Theta)(\sqrt{D}\alpha_\Theta)^T H))d\Theta + (\nabla I)^T J_{\sqrt{D}\alpha_\Theta} \sqrt{D}\alpha_\Theta d\Theta}{\int_{\Theta=0}^{\Pi} W d\Theta} \quad (4)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\int_{\Theta=0}^{\Pi} W(\sqrt{D}\alpha_\Theta) \cdot \text{tr}((\sqrt{D}\alpha_\Theta)(\sqrt{D}\alpha_\Theta)^T H)d\Theta}{\int_{\Theta=0}^{\Pi} W(\sqrt{D}\alpha_\Theta)d\Theta} + \frac{\int_{\Theta=0}^{\Pi} W(\sqrt{D}\alpha_\Theta) \cdot (\nabla I)^T J_{\sqrt{D}\alpha_\Theta} \sqrt{D}\alpha_\Theta d\Theta}{\int_{\Theta=0}^{\Pi} W(\sqrt{D}\alpha_\Theta)d\Theta} \quad (5)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{tr}(DH) + \frac{\int_{\Theta=0}^{\Pi} W(\sqrt{D}\alpha_\Theta) \cdot (\nabla I)^T J_{\sqrt{D}\alpha_\Theta} \sqrt{D}\alpha_\Theta d\Theta}{\int_{\Theta=0}^{\Pi} W(\sqrt{D}\alpha_\Theta)d\Theta} \quad (6)$$

$$\mathbf{v}^T J_{\sqrt{D}\alpha_\Theta} \sqrt{D}\alpha_\Theta = \mathbf{v}^T (\xi_x\xi_{xx} + \xi_y\xi_{xy}, \xi_x\xi_{xy} + \xi_y\xi_{yy})^T = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{v}^T J_{\sqrt{D}\alpha_\Theta} \sqrt{D}\alpha_\Theta = -(\xi_x^1\xi_{yy} - 2\xi_x\xi_y\xi_{xy} + \xi_y^2\xi_{xx}) = -\frac{\xi_x^1\xi_{yy} - 2\xi_x\xi_y\xi_{xy} + \xi_y^2\xi_{xx}}{|\mathbf{v}|^{1.5}} \quad (8)$$

$$W(\sqrt{D}\alpha_\Theta) = \exp\left(-\frac{E}{2\sigma_w^2}\right) \quad (9)$$

$$E = |\sqrt{D}\alpha_\Theta - ((\sqrt{D}\alpha_\Theta)^T \mathbf{V})\mathbf{V}| \quad (10)$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{2I(x, y) - (I(x + 1, y) + I(x, y + 1))}{\sqrt{6}} \quad (11)$$

滑速度较快; 当  $\sigma_w$  较小时, 权系数曲线下下降较慢, 这意味着平行于边缘方向的向量场权系数较大, 此时 WCPDE 平滑速度较慢. 一般期望, 在纹理较为丰富的区域  $\sigma_w$  较小, 而在平坦区域  $\sigma_w$  较大. 本文利用伪残量法<sup>[12]</sup> 提出了一种自适应选取方法, 具体步骤为: 首先利用式 (11) 计算噪声图像各点残差, 其中  $\sqrt{6}$  保证了  $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$ ,  $E(\cdot)$  表示求期望.

下一步估计图像平均噪声水平:

$$\sigma_{\text{noise}}^2 = \frac{1}{MN} \sum_{(x,y) \in \Omega} \varepsilon^2(x,y) \quad (12)$$

其中,  $M$  与  $N$  分别为图像的长与宽,  $\Omega$  为图像支撑域. 实际中, 利用差分法计算伪残差, 图像中不同结构处的伪残差相差较大, 如边缘位置的伪残差较大, 而平坦区域的伪残差值相对较低. 可利用这一特性设计权重参数, 即当某处残差值大于平均噪声水平, 则设置  $\sigma_w(x,y)$  为较小值, 以使结构信息保持良好; 反之则设置  $\sigma_w(x,y)$  为较大值, 以使 WCPDE 加速平滑. 最后,  $\sigma_w(x,y)$  具体计算公式如下:

$$\sigma_w = \begin{cases} \alpha_1 \varepsilon(x,y), & \text{若 } \varepsilon^2(x,y) > \sigma_{\text{noise}}^2 \\ \sigma_{\text{noise}}, & \text{若 } \varepsilon^2(x,y) = \sigma_{\text{noise}}^2 \\ \alpha_2 \varepsilon(x,y), & \text{若 } \varepsilon^2(x,y) < \sigma_{\text{noise}}^2 \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$  为常量, 本文在实验时, 设置  $\alpha_1 = 0.8$ ,  $\alpha_2 = 1.2$ .

### 2.3 方法具体实现

具体计算时, 式 (6) 对应的离散公式见式 (14), 式中,  $\Theta = \frac{n\pi}{N}$ ,  $\Theta \in [0, \pi)$ ;  $N$  为角离散参数;  $n = 0, 1, \dots, N$ ;  $dt$  为时间步长,  $I^k$ ,  $D^k$  和  $H^k$  分别为第  $k$  次迭代的图像、扩散张量和海森矩阵.

综上所述, 本文方法具体实现步骤如下:

**步骤 1.** 设置迭代次数, 并根据附录 A, 计算扩散张量  $D$ ;

**步骤 2.** 将离散角度区间  $[0, \pi)$  划分为等距的  $N$  段, 每段长度  $d\alpha = \pi/N$ , 按式 (9) ~ (14) 计算加权型曲率保持项  $V_2^k$ ;

**步骤 3.** 计算式 (14) 第 1 项:  $V_1^k = \text{tr}(D^k H^k)$ ;

**步骤 4.** 更新图像:  $I^{k+1} = I^k + dt(V_1^k + V_2^k)$ ;

**步骤 5.** 重复步骤 1 ~ 4, 直到设置的迭代次数.

## 3 实验验证与分析

根据滤波方法国际测试惯例<sup>[1-6]</sup>, 实验时在标

准图像中加入了噪声水平为 20 的高斯白噪声, 以分析各方法的滤波性能, 并用 PSNR 定量评价了各实验结果. 实验所用的原始无噪图像见图 1. 实验平台为: P IV 2.80 GHz CPU, 2 G 内存, Windows XP 操作系统, Matlab 7.1 软件.

图 2 所示为 5 种方法对含尖角图像的去噪结果. 图 2(a) 为噪声图像, 图 2(b) ~ 2(f) 分别为 DTPDE, TTPDE, TCPDE, WCPDE, 以及 NLMF 方法的滤波结果. 由实验结果可以看出: DTPDE 方法的滤波结果图中不但出现了“划痕”, 而且对某些尖角有过增强现象, 如图 2(b) 中右上方三角形的尖角; TTPDE 方法虽然对噪声去除效果较好, 但其严重模糊了图中的尖角; TCPDE 方法由于加入了曲率保持项, 使其具有一定程度的尖角保持能力, 但从图 2(e) 中可以看出图中边缘与尖角模糊现象仍相对明显; 图 2(e) 为本文方法的去噪结果, 由各实验结果可明显看出, 本文方法不但具有较好的保角能力, 而且在边缘保持方面也有良好的表现; 图 2(f) 为 NLMF 方法的去噪结果, 由此图可以看到, NLMF 方法亦能较好地保持图像中的边缘与尖角, 但仔细观察可发现图 2(f) 中白色目标边缘附近出现了细小的“伪纹理”, 影响了图像的视觉效果.

图 3 所示为 5 种方法对同心圆图像的去噪结果. 图 3(a) 为噪声图像; 图 3(b) 为图 3(a) 梯度场伪彩色图像, 由此伪彩图可以清楚地看到隐藏的曲率信息, 具体计算见附录 B; 图 3(c) ~ 3(h) 分别为 DTPDE, TTPDE, TCPDE, WCPDE ( $\sigma_w = 2$ ), NLMF 方法, 以及 WCPDE ( $\sigma_w$  自动选取) 滤波结果. 从各实验结果可知: DTPDE 方法又出现“划痕”; 相对于图 3(d), 图 3(e) 中细小的曲率结构保持相对较好; 图 3(f) 为本文方法结果, 滤波时令  $\sigma_w = 2$ , 可以看出, 图中尺度较大的曲率结构得到了一定程度的增强, 这是因为在这一参数下, 逆平均曲率流对结果的贡献增大, 由于逆平均曲率流对图像有增强作用, 隐藏在图中的曲率信息得到了一定程度的增强; 由图 3(g) 可以看出 NLMF 方法在纹理图像去噪方面的优势, 各图像细节保持良好. 图 3(h) 为  $\sigma_w$  自动选取时 WCPDE 的滤波结果, 可以看出此时并未出现明显的图像增强现象, 这是由于在各向量场对应扩散方程的综合作用下, 扩散总体呈平滑趋势.

以下自然图像滤波实验主要集中于 TCPDE, NLMF 以及本文 WCPDE 滤波方法的比较. 图 4

$$I^{k+1} = I^k + dt \left( \text{tr}(D^k H^k) + \frac{(\nabla I^k)^T \sum_{n=0}^N W \cdot J_{\sqrt{D^k} \alpha_\Theta} \sqrt{D^k} \alpha_\Theta}{\sum_{n=0}^N W} \right) \quad (14)$$

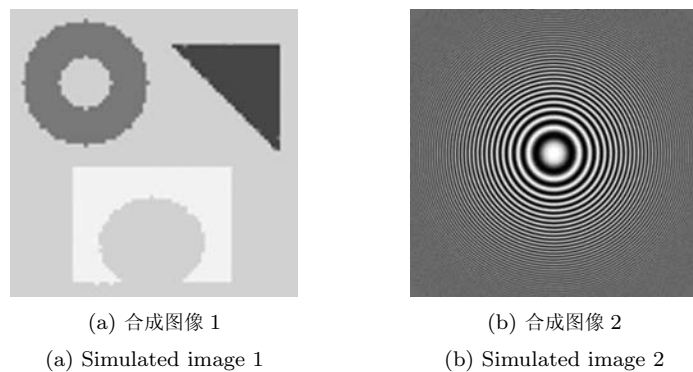


图 1 原始图像  
Fig.1 Noise free images

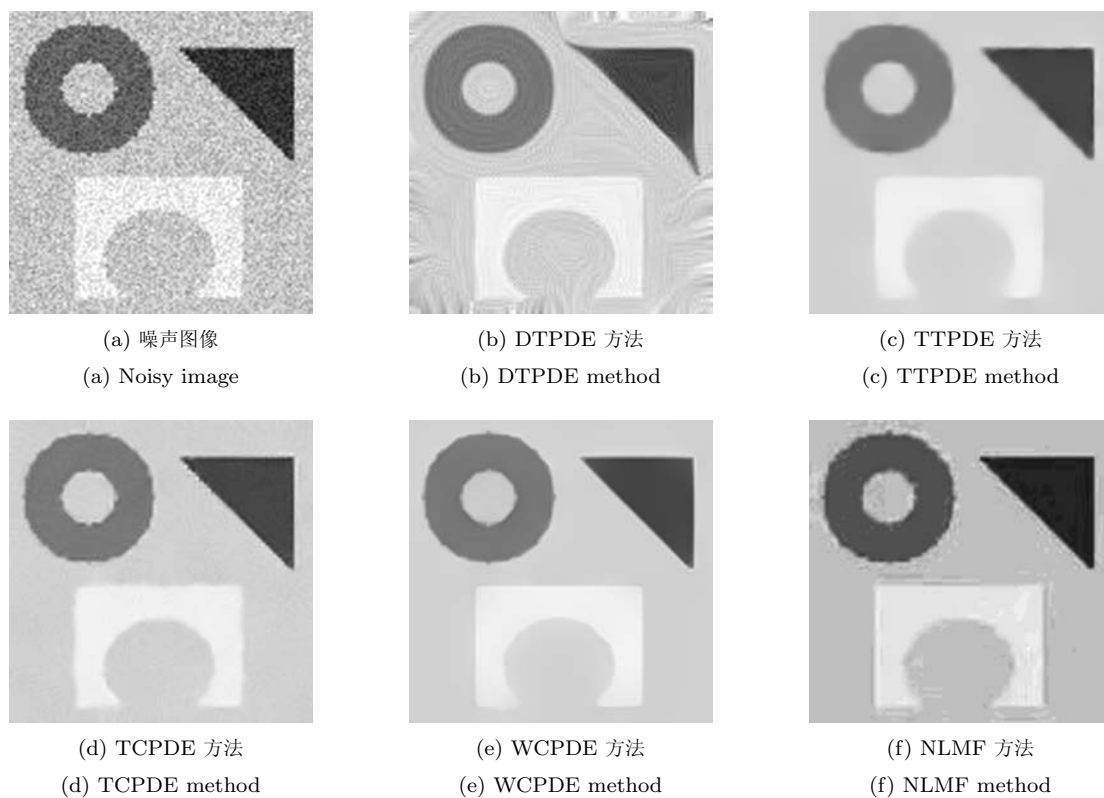


图 2 合成图像 1 滤波结果比较  
Fig.2 Comparison of filtering methods for simulated image 1

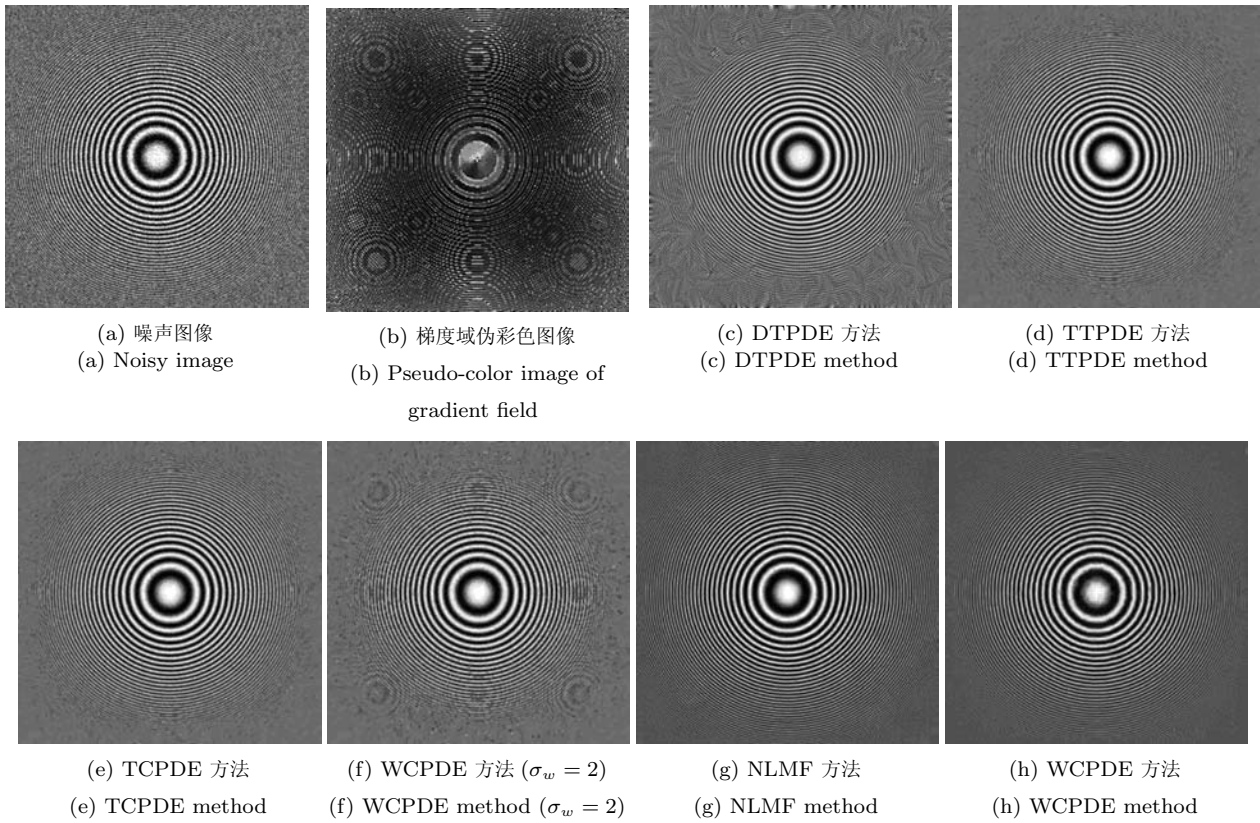


图 3 合成图像 2 滤波结果比较

Fig. 3 Comparison of filtering methods for simulated image 2

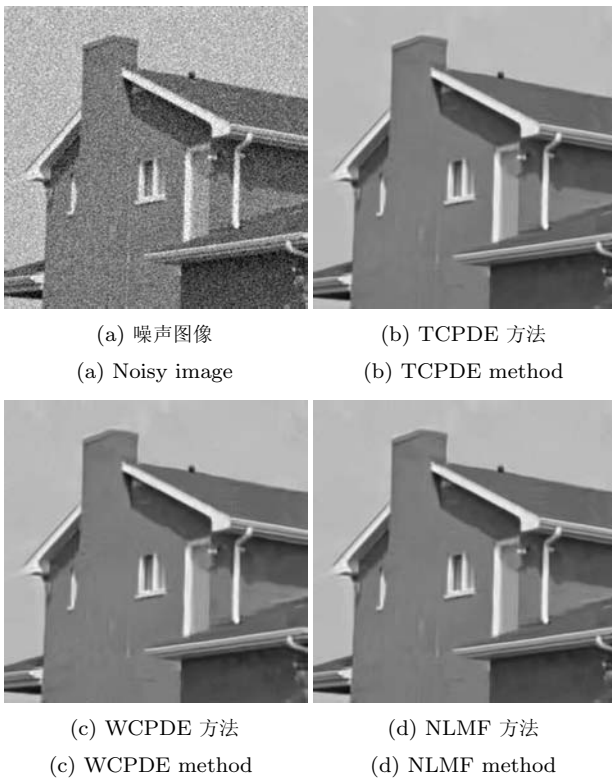


图 4 House 图像的滤波结果比较

Fig. 4 Comparison of filtering methods for House image

所示为 3 种方法的实验结果, 选用该图目的在于考察 3 种方法对分段光滑图像的去噪能力. 考察图 4 各图, 可以发现在房子烟囱顶部附近, 图 4(c) 与图 4(d) 中的边缘的相对清晰, 而图 4(b) 中对应位置略显模糊. 对于上述分段光滑图像, WCPDE 与 TCPDE 方法滤波结果视觉上无明显差别. 但这并不意味着本文方法对该类图像滤波性能完全等同于 NLMF 方法的. 这将通过比较表 1 与表 2 数据进一步分析.

图 5 所示为 3 种方法对 Cameraman 图像的实验结果. 由各方法滤波结果可知, 对于远处的弱梯度目标, WCPDE 方法与 NLMF 方法均取得了较好的滤波结果, 目标细节保持较好, 而 TCPDE 方法滤波结果图中对应位置较为模糊. 与图 5(c) 相比, 图 5(d) 中草地区域结构保持较好. 究其原因在于 NLMF 本身利用图像自相似原理设计滤波方法, 但其不足在于方法的时间消耗过大, 具体的时间消耗数据见表 2.

图 6 所示为 3 种方法对 Lena 图像的滤波结果. 由各滤波结果可看到, WCPDE 与 TCPDE 方法滤波结果图中人脸较为光滑, 而 NLMF 方法滤波结果图的人脸出现了阶梯效应. 相比图 6(b), 图 6(c) 多处细节信息保持较好, 如 Lena 的眼睫毛, 帽子上的

条纹等, 这体现了 WCPDE 方法较好的滤波性能.

表 1 与表 2 分别给出了 TCPDE, WCPDE 与 NLMF 方法滤波结果的 PSNR 值及时间消耗. 由表 1 数据可知: 对于 5 组实验图像, NLMF 方法的 PSNR 值均较高, 其次为本文提出的 WCPDE 方法.

表 1 各滤波方法的 PSNR 比较 (dB)

Table 1 PSNR comparison of filtering methods (dB)

Image	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6
TCPDE	31.81	26.37	32.02	26.71	27.75
WCPDE	33.47	27.96	32.92	29.11	30.08
NLMF	33.53	28.30	33.10	29.31	30.22

表 2 各滤波方法时间消耗 (s)

Table 2 Computation times of filtering methods (s)

Image	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6
TCPDE	7.2691	18.394	18.485	18.713	18.571
WCPDE	9.1624	22.921	22.958	22.961	22.244
NLMF	32.212	234.83	235.37	235.16	235.28

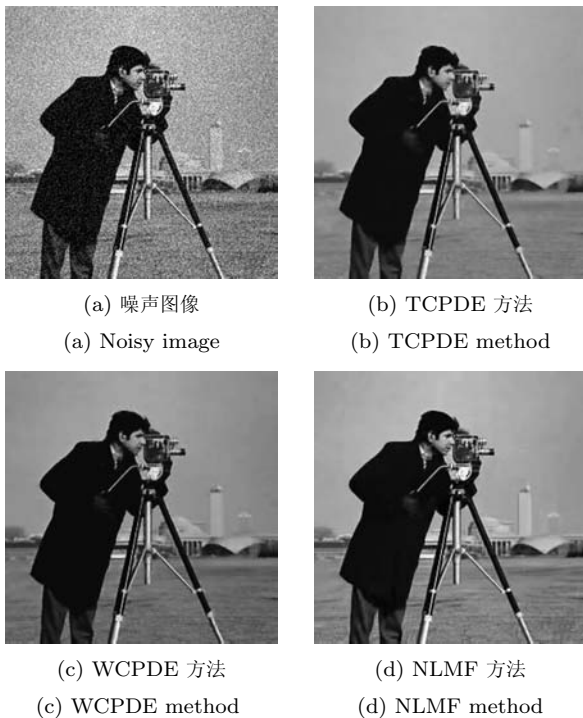


图 5 Cameraman 图像的滤波结果比较  
Fig. 5 Comparison of filtering methods for Cameraman image

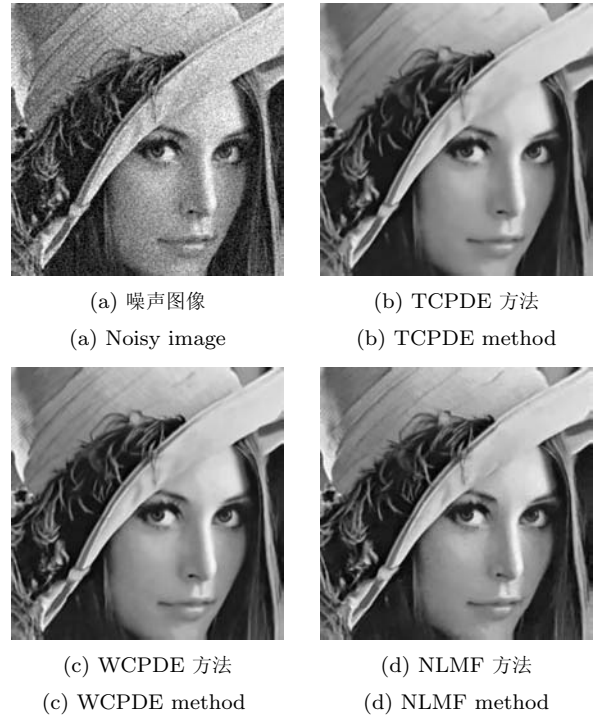


图 6 Lena 图像的滤波结果比较

Fig. 6 Comparison of filtering methods for Lena image

但是, 由表 2 数据可看出, NLMF 方法提高其滤波性能需要花费巨大的时间, 代价较高. 综合考虑表 1 与表 2 各项数据, WCPDE 虽然运行时间较 TCPDE 方法略高, 但其滤波性能得到了一定程度的提升, 与 NLMF 方法相比, WCPDE 方法性价比较高.

## 4 总结

本文通过分析 TCPDE 方法, 指出了该方法对各向量场扩散方程简单求平均, 未考虑图像本身结构信息像结构, 据此提出了加权平均的策略, 利用扩散张量描述的图像局部方向信息为不同向量场设计了相应的权重, 得到了一种张量驱动的加权型曲率保持 PDE 滤波方法, 简称加权型曲率保持 PDE 滤波方法. 通过大量滤波实验验证, 结果表明: 与 DTPDE, TTPDE, TCPDE, NLMF 相比, 加权型曲率保持 PDE 滤波方法在滤波的同时对图像的边缘与曲率结构均保持较好, 时间消耗相对较低, 且对局部图像具有一定的增强作用, 是一种性价比较高的滤波方法.

## 附录 A

扩散张量计算. 式 (1) 中扩散张量计算公式具体如下:

$$D = k_1 \gamma_1 \gamma_1^T + k_2 \gamma_2 \gamma_2^T \quad (\text{A1})$$

其中, 向量  $\gamma_1$  表示图像的边缘方向, 向量  $\gamma_2$  表示垂直于图

像边缘的方向,二者可由下式计算:

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left( I_{11} + I_{22} \pm \sqrt{(I_{11} - I_{22})^2 + 4I_{12}^2} \right) \quad (\text{A2})$$

上式中  $k_1 \geq k_2$ , 这保证了滤波方法平滑时在图像边缘上扩散较快,而在与该方法垂直的方向上扩散相对较慢。

## 附录 B

为方便显示,图 3 利用伪彩色技术表示了该梯度场,使用的颜色空间为 HSV,各通道具体计算公式如下:

$$\begin{cases} H = 180 + \frac{\Theta}{\pi} 180 \\ S = \begin{cases} 0, & \text{若 } V = 1 \\ 1, & \text{若 } V \neq 1 \end{cases} \\ V = \frac{\max(|\nabla I|) - \min(|\nabla I|)}{\max(|\nabla I|) + \min(|\nabla I|)} \end{cases} \quad (\text{B1})$$

其中,  $\Theta$  为梯度向量角;  $\max|\nabla I|$  表示梯度场最大梯度模值;  $\min|\nabla I|$  表示梯度场最小梯度模值。

## References

- Lou Y F, Zhang X Q, Osher S, Bertozzi A. Image recovery via nonlocal operators. *Journal of Scientific Computing*, 2010, **42**(2): 185–197
- Peyre G, Bougleux S, Cohen L. Non-local regularization of inverse problems. In: Proceedings of the 10th European Conference on Computer Vision. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2008. 57–68
- Sun Yu-Bao, Fei Xuan, Wei Zhi-Hui, Xiao Liang. Image restoration model under Poisson noise using sparse representations and split Bregman iteration algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(11): 1512–1519  
(孙玉宝, 费选, 韦志辉, 肖亮. 稀疏性正则化的图像泊松恢复模型及分裂 Bregman 迭代算法. *自动化学报*, 2010, **36**(11): 1512–1519)
- Zeng T, Ng M K. On the total variation dictionary model. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, **19**(3): 821–825
- Rodriguez P, Wohlberg B. Efficient minimization method for a generalized total variation functional. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, **18**(2): 322–332
- Didas S, Setzer S, Steidl G. Combined  $L_2$  data and gradient fitting in conjunction with  $L_1$  regularization. *Advances in Computational Mathematics*, 2009, **30**(1): 79–99
- Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Recognition and Machine Intelligence*, 1990, **12**(7): 629–639
- Weickert J, Schnorr C. A theoretical framework for convex regularizers in PDE-based computation of image motion. *International Journal of Computer Vision*, 2001, **45**(3): 245–264
- Tschumperle D, Deriche R. Vector-valued image regularization with PDEs: a common framework for different applications. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(4): 506–517
- Tschumperle D. Fast anisotropic smoothing of multi-valued images using curvature-preserving PDE's. *International Journal of Computer Vision*, 2006, **68**(1): 65–82
- Buades A, Coll B, Morel J M. A non-local algorithm for image denoising. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Washington D. C., USA: IEEE, 2005. 60–65
- Azzabou N, Paragions N, Guichard F. Image denoising based on adapted dictionary computation. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing. San Antonio, USA: IEEE, 2007. 109–112



**郑钰辉** 南京信息工程大学计算机与软件学院讲师. 主要研究方向为图像处理、模式识别和遥感图像复原. 本文通信作者. E-mail: zheng\_yuhui@nuist.edu.cn  
(ZHENG Yu-Hui Lecturer at the School of Computer and Software, Nanjing University of Information Science and Technology. His research interest

covers image processing, pattern recognition, and remote sensing image restoration. Corresponding author of this paper.)



**张建伟** 南京信息工程大学数理学院教授. 主要研究方向为模式识别、人工智能和遥感信息处理.

E-mail: zhangjw@nuist.edu.cn

(ZHANG Jian-Wei Professor at the College of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science and Technology. His

research interest covers pattern recognition, artificial intelligence, and remote sensing information processing.)



**陈允杰** 南京信息工程大学数理学院副教授. 主要研究方向为模式识别、人工智能和医学图像处理.

E-mail: generalcyj@yahoo.com.cn

(CHEN Yun-Jie Associate professor at the College of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science and Technology. His

research interest covers pattern recognition, artificial intelligence, and medical image processing.)



**孙权森** 南京理工大学计算机科学与技术学院教授. 主要研究方向为模式识别、人工智能和遥感信息处理.

E-mail: sunquansen@mail.njust.edu.cn

(SUN Quan-Sen Professor at the School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology. His research interest

covers pattern recognition, artificial intelligence, and remote sensing information processing.)