第 37 卷 第 9 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 37, No. 9
2011 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　September, 2011

双线性系统可控性综述

铁 林 [1]　　蔡开元 [1]　　林 岩 [1]

摘 要 双线性系统是一类特殊的非线性系统, 广泛存在于现实世界中, 如工程、经济、生物、生态等领域, 被认为是最接近于线性系统的非线性系统. 对双线性系统的研究已历经了近半个世纪. 作为系统最基本的属性, 双线性系统可控性的研究一直以来是热点和难点. 本文分别对连续双线性系统可控性和离散双线性系统可控性进行讨论, 综述了双线性系统可控性的研究. 特别地, 报告了近来对离散双线性系统可控性研究的新成果. 最后, 例举了一些可控的双线性系统例子.

关键词 双线性系统, 可控性, 临近可控性, 李群, 李代数

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01040

A Survey on the Controllability of Bilinear Systems

TIE Lin[1]　　CAI Kai-Yuan[1]　　LIN Yan[1]

Abstract Bilinear systems are a special class of nonlinear systems, which are widely existing in real world, such as engineering, economics, biology, ecology, etc. Among nonlinear systems, bilinear systems are thought to be the most close to linear systems. The study on such systems has passed through nearly half a century. For the fundamental property, the controllability of bilinear systems has received considerable attention, while the difficulties and challenges still remain. The purpose of this paper is to give a survey on the controllability of bilinear systems through the discussion on the controllability of continuous-time bilinear systems and discrete-time bilinear systems, respectively. Particularly, new results on the controllability are reported for discrete-time bilinear systems. Finally, some examples of controllable bilinear systems are provided.

Key words Bilinear systems, controllability, near-controllability, Lie groups, Lie algebras

一非线性系统, 若其关于状态和控制分别是、但不同时是线性的, 则称之为双线性系统. 双线性系统已被深入研究多年[1−10]. 这类系统的独特之处在于其虽是非线性系统, 却有着最简单、最接近于线性系统的结构, 被认为是线性系统向非线性系统的过渡.

双线性系统的重要性不仅体现在其数学结构上, 而且体现在其广泛存在于工程、经济、生物、生态等领域中. 最早的研究始于上世纪 60 年代初, Mohler 等在核反应堆方面的工作[4−5]. 由于核裂变、阴离子聚集、热传递等过程可以很好地由双线性或双线性逼近的方式描述, 使双线性系统在这项研究中得到成功的应用[6]. 许多工业过程与对象, 如液压系统、燃气炉、热交换系统等[1], 均可由双线性系统描述. 此外, 双线性系统还可广泛描述社会经济、生物、生态等学科中的许多对象[2, 4, 10−11], 如政府投资与税率控制、人体温度调节、血液中二氧化碳浓度、物种繁衍过程等, 最典型的例子就是人口模型[3]. 除了广泛的存在性与应用性, 双线性系统还具有良好的逼近特性. 文献 [12] 证明了双线性系统从理论上可以逼近任意非线性系统, 精度比传统的线性逼近要高得多. Mohler 等还证明了双线性系统在最优控制上具有比线性系统更好的性能[4−5]. 近年来, 随着量子控制领域的兴起, 双线性系统理论被广泛应用于量子系统的研究中[13−14], 如可控性问题[15−20]. 事实上, 用 Schrödinger 方程所描述的多能级量子系统动力学, 其数学模型在形式上就是宏观领域中的双线性系统微分方程.

正是由于双线性系统应用广泛, 其研究具有很大的学术价值, 近年来已引起人们极大的兴趣, 出版了大量文献, 并成为非线性系统控制理论的一个重要分支. 早期关于双线性系统具代表性的文献有专著 [1−2] 及综述性文章 [3−5], 中期有专著 [6] 及综述性文章 [7], 近期有专著 [8−9]. 其中专著 [8] 侧重于双线性系统的建模、最优控制及应用, 专著 [9] 则侧重于从数学角度讨论双线性系统. 值得一提的是, 专著 [9] 覆盖了双线性系统理论的绝大部分内容, 是近年来介绍该领域较全面的一部论著. 以上所列举的文献较详尽地论述了双线性系统理论, 包括可控、可观、稳定、镇定等系统特性. 作为系统最重要、最基本的属性之一, 双线性系统可控性的研究几乎伴

收稿日期 2010-09-16　录用日期 2011-02-18
Manuscript received September 16, 2010; accepted February 18, 2011
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2010CB327904), 国家自然科学基金 (60874044) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2010CB327904) and National Natural Science Foundation of China (60874044)
1. 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院 北京 100191
1. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191

随着双线性系统的研究同时展开, 最早的文献见文献 [21−23]. 其中文献 [23] 指出, 如果控制输入被限定在一紧集中, 则线性系统几乎不可能可控. 而双线性系统则不然, 由于状态与控制的耦合, 在控制受限的情况下双线性系统仍可以可控. 连续双线性系统可控性的研究在上世纪 70 年代中取得了丰富的成果[24−37], 70 年代之后仍是热点[38−47]. 其研究得益于李群、李代数的应用. 尽管如此, 连续双线性系统可控性的研究并不像线性时不变系统可控性那样完美, 仍有许多不足及难点尚未解决. 对于离散双线性系统可控性的研究, 成果则相对较少[48−55]. 自上世纪 80 年代中期至本世纪初, 专门讨论离散双线性系统可控性的文献几乎没有, 仅文献 [56−58] 研究了离散非线性系统可达性, 文献 [59−61] 研究了双线性系统采样可控性, 文献 [62−66] 研究了离散双线性系统零可控性. 究其原因在于离散系统的可控性问题较连续系统更复杂. 近来, 对离散双线性系统可控性的研究有了新进展[67−72]. 特别地, 作者在文献 [70] 中发现并提出了离散双线性系统的一个新性质: 临近可控性.

本文将对连续双线性系统和离散双线性系统分别进行可控性综述. 对连续双线性系统可控性主要介绍一些经典结果及尚未解决的问题; 对离散双线性系统可控性则在介绍现有结果的同时, 报告一些新成果, 以期起到抛砖引玉的作用.

1 双线性系统的数学描述与可控性定义

考虑如下形式的连续非线性系统

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\boldsymbol{g}_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{1}$$

其中, $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上连续可微的向量函数, $\boldsymbol{u}(t) = [u_1(t) \ \cdots \ u_m(t)]^{\mathrm{T}} \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^m$ (在本文中, 若不特别说明, 均假定控制输入 $u_i(t)$ 是分段常值函数), Ω 为一闭集. 处理非线性系统, 在其状态空间某点的邻域内进行线性化, 无论在理论上还是应用方面, 都是一种常见的、普遍的处理方式. 下面对系统 (1) 在点 $\boldsymbol{\xi}$ 的某个邻域 $O(\boldsymbol{\xi}, \rho)$ 内进行线性化, 有

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)B_i\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}(t) \tag{2}$$

其中,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\xi}, \ \ \boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{0}, \rho) \\ &A = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}}\Big|_{\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\xi}} \\ &\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{a} \\ &B_i = \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}}\Big|_{\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\xi}} \\ &B = [\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_m], \ \ \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

系统 (2) 被称为非齐次双线性系统 (有些文献称之为双仿射系统). 在式 (2) 中, 若 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ (即原点为系统平衡点), $B = 0$, 则有

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)B_i\boldsymbol{x} \tag{3}$$

系统 (3) 被称为齐次双线性系统. 进一步, 若式 (3) 中 $A = 0$, 即

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)B_i\boldsymbol{x} \tag{4}$$

则称系统 (4) 为严格双线性系统. 事实上, 如下切换线性动态系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = B_{\sigma(t)}\boldsymbol{x}, \ \sigma(t) \in \{1, \cdots, m\}$$

就是双线性系统 (4) 的一个特例, 此时有 $u_i(t) = \delta_{i,\sigma(t)}$, $\delta_{i,i} = 1$. 特别地, 对系统 (4), 若控制是对称的, 即对任意 $\boldsymbol{u} \in \Omega$, 有 $-\boldsymbol{u} \in \Omega$, 则称其为对称双线性系统. 在研究连续双线性系统的文献中, 系统 (3) 和 (4) 是被研究最多的, 最具代表性, 且以不受限 ($\Omega = \mathbf{R}^m$) 对称双线性系统 (4) 的理论最为完美. 在本文中, 对连续双线性系统只考虑系统 (3) 和 (4), 且系统阶数大于 1 (一阶时系统 (3) 和 (4) 均不可控).

离散双线性系统则可由如下形式的差分方程

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + \sum_{i=1}^{m} u_i(k)B_i\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k), \quad k = 0, 1, \cdots$$

描述, 其中, $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbf{R}^n, A, B_1, \cdots, B_m \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{u}(k) = [u_1(k) \ \cdots \ u_m(k)]^{\mathrm{T}} \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^m$. 现有关于离散双线性系统可控性的文献主要考虑如下单输入齐次双线性系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + u(k)B\boldsymbol{x}(k) \tag{5}$$

及单输入非齐次双线性系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + u(k)B\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{c}u(k) \tag{6}$$

其中, $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$.

下面, 给出双线性系统可控性定义.

定义 1[3, 9]**.** 系统 (3) 和 (4) 是可控的, 若对任意 $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^n_*$ ($\mathbf{R}^n_* = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$), 存在控制 $u(t)$ 和有限时间 $T > 0$, 使得在某个 $t \in (0, \ T)$ 时, $\boldsymbol{\xi}$ 被转移至 $\boldsymbol{\eta}$.

定义 2[48−49]**.** 系统 (5) (系统 (6)) 是可控的, 若对任意 $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}_*^n$ ($\mathbf{R}^n$), 存在有界控制序列 $u(k)$ ($k = 0, 1, \cdots, l$, l 为一正整数), 使得在 $k = l$ 时, $\boldsymbol{\xi}$ 被转移至 $\boldsymbol{\eta}$.

对于齐次双线性系统 (3) ∼ (5), 注意到原点是一个孤立点, 从理论上讲, 系统一旦到达则任何控制都不能使其转移. 因此, 齐次双线性系统的状态 "空间" 应为 $\mathbf{R}_*^n$.

这里介绍一个对证明可控性十分有用的引理.

引理 1[9, 67]**.** 一系统在一连通子流形 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ 上可控, 当且仅当对任意初值 $\boldsymbol{\xi} \in S$, 存在控制及 $\boldsymbol{\xi}$ 的一邻域 $N(\boldsymbol{\xi}) \subseteq S$, 使 $\boldsymbol{\xi}$ 在此邻域内可达.

引理 1 中 "在一连通子流形 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ 上可控" 指对任意 $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta} \in S$, 存在控制使得 $\boldsymbol{\xi}$ 可被转移至 $\boldsymbol{\eta}$. "使 $\boldsymbol{\xi}$ 在此邻域内可达" 指对此邻域中任意一点存在控制使得 $\boldsymbol{\xi}$ 可被转移至该点.

2 连续双线性系统可控性

对连续双线性系统可控性、可达性的研究最早可追溯至文献 [21−23], 在上世纪 70 年代取得了丰富的成果. 这里要指出, 对于非线性系统, 可控性是比可达性更强的性质, 也比可达性更难获得[73]. 对可达性的研究有助于可控性的研究. 在本文中, 关于连续双线性系统仅介绍可控性的一些主要结果.

众所周知, 矩阵、线性空间理论在线性时不变系统可控性的研究中发挥了重要作用. 而在连续双线性系统可控性的研究中, 李群、李代数理论则被广泛应用. 下面为便于叙述, 介绍一些相关定义.

定义 3. 对任意 $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 定义李括号

$$[A, B] = AB - BA$$

并记 $\mathrm{ad}_A(X) = [A, X]$, $\mathrm{ad}_A^0(X) = I$, $\mathrm{ad}_A^k(X) = [A, \mathrm{ad}_A^{k-1}(X)]$. 则 ad_A 的最小多项式

$$\varphi(\lambda) = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

为使 $\varphi(\mathrm{ad}_A) = 0$ 成立的阶数最小的首一多项式, 即有

$$\mathrm{ad}_A^r + a_{r-1}\mathrm{ad}_A^{r-1} + \cdots + a_1\mathrm{ad}_A + a_0 I = 0$$

定义 4. 对任意 $B_1, \cdots, B_m \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 定义李括号

$$\{B_1, \cdots, B_m\}_L$$

为由 $B_1, \cdots, B_m$ 生成的李代数. 其中, $B_1, \cdots, B_m$ 称为李代数 $\{B_1, \cdots, B_m\}_L$ 的生成元.

李代数 $\{B_1, \cdots, B_m\}_L$ 由生成元 $B_1, \cdots, B_m$ 反复通过李括号得到. 以 $m = 2$ 为例, 有

$$\{B_1, B_2\}_L = \{B_1, B_2, [B_1, B_2], [B_1, [B_1, B_2]], [[B_1, B_2], [B_1, [B_1, B_2]]], \cdots\}$$

定义 5. 一矩阵李群 G 在 $\mathbf{R}_*^n$ 上是传递的, 若对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}_*^n$, 存在 $\Xi \in G$ 使得 $\boldsymbol{y} = \Xi\boldsymbol{x}$.

在定义 5 中, 记李群 G 的李代数为 g, 则定义 5 等价于李代数 g 是传递的, 即对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}_*^n$, 有 $\mathrm{span}\{\Lambda\boldsymbol{x}, \Lambda \in g\} = \mathbf{R}^n$. 此时称李代数 g 的秩为 n.

在连续双线性系统中, 不受限对称双线性系统 (4) 具有最完美的理论. 这里, 不受限即指 $\Omega = \mathbf{R}^m$. 若记

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)B_iX, \;\; X(0) = I \tag{7}$$

为系统 (4) 对应的矩阵系统, $X \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 则矩阵系统 (7) 在分段常值控制作用下有唯一解 $X(t; \boldsymbol{u})$, 称之为系统 (4) 的转移矩阵. 而 $\Phi_t(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{u}) = X(t; \boldsymbol{u})\boldsymbol{\xi}$ 即是系统 (4) 对应于初值 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi}$ 的解. 若对任意 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}_*^n$, 有 $\{X(t; \boldsymbol{u})\boldsymbol{\xi} \mid (t; \boldsymbol{u})\} = \mathbf{R}_*^n$, 则系统 (4) 可控. 因此, 矩阵系统 (7) 的解与系统 (4) 的可控性密切相关. 由于矩阵系统 (7) 在分段常值控制作用下的所有解构成一李群, 而对此李群的研究又可转化为对其李代数的研究. 利用李理论, 文献 [26−27] 给出了不受限对称双线性系统 (4) 可控的充要条件.

定理 1[26−27]**.** 若控制不受限, 则系统 (4) 可控当且仅当 $\{B_1, \cdots, B_m\}_L$ 传递.

定理 1 将系统 (4) 可控性的判定转化为对一李代数的传递性, 即李代数的秩的检验. 当系统阶数较高时, 检验比较困难, 文献 [9] 给出了一种算法.

对于系统 (3), 尽管其与系统 (4) 相比仅多了一漂移项 $A\boldsymbol{x}$, 但迄今为止, 尚未得出系统 (3) 普适的可控性充要条件. 事实上, 系统 (3) 可看作

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=0}^{m} u_i(t)B_i\boldsymbol{x}$$

其中, $B_0 = A$, $u_0(t)$ 恒等于 1. 因此对系统 (3) 的研究可利用系统 (4) 的一些结果. 同样, 可定义

$$\dot{X} = AX + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)B_iX, \; X(0) = I \tag{8}$$

为系统 (3) 相应的矩阵系统, $X \in \mathbf{R}^{n\times n}$. 矩阵系统 (8) 在分段常值控制作用下有唯一解 $X(t; \boldsymbol{u})$, 为系统 (3) 的转移矩阵. 系统 (3) 的可控性与矩阵系统 (8) 密切相关. 由于矩阵系统 (8) 在分段常值控制作用下的所有解一般不构成一群, 而是一半群, 导致对系统 (3) 可控性的研究非常困难, 迄今未得到彻底解决. 目前有如下必要 (非充分) 条件和充分 (非必要) 条件.

定理 2[9]**.** 在控制不受限条件下, 若系统 (3) 可控, 则 $\{A, B_1, \cdots, B_m\}_L$ 是传递的.

定理 3[34]**.** 在控制不受限条件下, 若存在 $\delta_1, \cdots, \delta_m \in \mathbf{R}$ 使得

$$A_\delta = A + \sum_{i=1}^{m} \delta_i B_i$$

中立, 且 $\{A, B_1, \cdots, B_m\}_L$ 传递, 则系统 (3) 可控.

这里一矩阵中立是指其在实域下相似于一反对称阵. 文献 [34] 讨论了中立矩阵在系统 (3) 可控性研究中的作用. 事实上, 定理 3 中 A_δ 中立保证了矩阵系统 (8) 的所有解构成一李群.

在矩阵系统 (8) 中, 若 $X \in G$, G 是一闭李群, 其李代数为 $\{A, B_1, \cdots, B_m\}_L$, 则称矩阵系统 (8) 是在 G 上的右不变系统. 许多研究系统 (3) 可控性的文献均要讨论右不变系统 (8) 的解的拓扑性质, 以利用转移矩阵判定系统 (3) 的可控性, 具体可参见文献 [29, 31−32, 38]. 右不变系统 (8) 与系统 (3) 的关系可参见文献 [9, 14].

文献 [38, 42, 44] 讨论了系统 (3) 在单输入情况下, 即系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + u(t)B\boldsymbol{x} \tag{9}$$

的可控性问题. 文献 [38] 给出了一个充分条件.

定理 4[38]**.** 若 $\mathrm{tr}(A) = 0$, $\mathrm{tr}(B) = 0$, 且 B 严格正则, 不妨设 B 已是对角型. 其中 $A = [a_{ij}]$ 满足 $a_{ij} \neq 0$ 对任意 $|i - j| = 1$, 且 $a_{1n}a_{n1} < 0$, 则在控制不受限条件下系统 (9) 可控.

文献 [38] 通过研究右不变系统得到系统 (9) 的可控性. 文献 [42] 研究了系统 (9) 在二阶时的可控性, 通过直接分析系统的解, 给出了系统可控的充要条件.

定理 5[42]**.** 若系统 (9) 的阶数为 2, 且控制不受限, 则系统 (9) 可控的充要条件是 A, B 线性无关, 且对任意 $\mu \in \mathbf{R}$, $(A + \mu B)$ 无实特征值, 并随 μ 的不同, $(A + \mu B)$ 的特征值既能取到正实部亦能取到负实部.

文献 [44] 在 [42] 的基础上, 给出了一个形式上更易使用的可控性判据.

定理 6[44]**.** 对二阶系统 (9), 不妨设 B 是实域下的约当标准型, $A = [a_{ij}]$. 若 $\{A, B\}_L$ 传递, 则系统不可控当且仅当以下任一情况出现:

1) B 是对角阵且 $a_{12}a_{21} > 0$;

2) B 是反对称阵且 A 半正定 (含正定) 或半负定 (含负定).

注意到 $\{A, B\}_L$ 传递是系统 (9) 可控的必要条件. 而在二阶时 $\{A, B\}_L$ 传递当且仅当 A, B 线性无关且无共同实特征向量[42]. 定理 6 可看作定理 5 的一个补充. 此外, 文献 [44] 还研究了系统 (9) 在三阶时一些特殊情况下的可控性.

文献 [34] 研究了系统 (9) 的小可控性, 并给出系统小可控的必要条件和充分条件. 所谓小可控是指对任意 $\delta > 0$, 系统在控制限制 $|u(t)| \leq \delta$ (或 $|u(k)| \leq \delta$) 下均可控. 小可控性是系统在控制受强约束下的可控性, 是一种很强的性质. 而正如引言部分所述, 控制受限的双线性系统仍可以可控.

定理 7[34]**.** 若系统 (9) 小可控, 则 A 的特征值均在虚轴上, 即 A 的特征值仅为纯虚数或零.

定理 8[34]**.** 系统 (9) 是小可控的, 若对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n_*$, $[B\boldsymbol{x}\ \mathrm{ad}_A(B)\boldsymbol{x}\ \cdots\ \mathrm{ad}^r_A(B)\boldsymbol{x}]$ (r 为 ad_A 的最小多项式的阶) 列满秩, 且 A 中立.

在定理 8 中, A 中立蕴含了 A 的特征值均在虚轴上. 这里要指出, A 的特征值均在虚轴上并不等价于 A 中立, 而是包含了 A 中立. 此外, $[B\boldsymbol{x}\ \mathrm{ad}_A(B)\boldsymbol{x}\ \cdots\ \mathrm{ad}^r_A(B)\boldsymbol{x}]$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n_*$ 列满秩则蕴含了 $\{A, B\}_L$ 传递, 但后者推不出前者, 即后者是前者的必要条件. 根据定理 3, A 中立加上 $\{A, B\}_L$ 传递已可得系统 (9) 可控, 但要获得小可控性则需像定理 8 这样更强的条件. 由此可见, 小可控性比可控性的性质更强.

定理 7 能否改进为 "若系统 (9) 小可控, 则 A 中立" 值得研究.

至此, 定理 1 ∼ 3 是判断系统 (3) 和 (4) 可控性的经典判据, 均以李代数条件的形式给出, 适用于多输入情况, 但当系统阶数较高时使用困难. 定理 4 ∼ 8 针对单输入系统 (3), 即系统 (9). 其中定理 4 ∼ 6 的可控性判据以线性代数条件的形式给出, 较易使用. 定理 7 和 8 针对系统 (9) 的小可控性, 后者在系统阶数较高时难以应用, 因为此时很难验证 $[B\boldsymbol{x}\ \mathrm{ad}_A(B)\boldsymbol{x}\ \cdots\ \mathrm{ad}^r_A(B)\boldsymbol{x}]$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n_*$ 均列满秩.

文献 [39−40] 则研究了形式为 (9) 的正双线性系统可控性问题. 所谓正双线性系统是指对任意初值 $\boldsymbol{x}(0) \in \mathbf{R}^n_+$, 系统的解始终在 $\mathbf{R}^n_+$ 内, 其中 $\mathbf{R}^n_+$ 是所有元素均为正的 n 维向量的集合. 因此, 正双线性系统 (9) 可控是指对任意 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^n_+$, 存在控制 $u(t)$ 和有限时间 $T > 0$, 使得在某个 $t \in (0, T)$ 时, $\boldsymbol{\xi}$ 被转移至 $\boldsymbol{\eta}$. 文献 [39] 给出了系统 (9) 在控制不受限条件下是正双线性系统的充要条件, 即当且仅当 $A \trianglerighteq 0$ 且 B 是对角的, 系统 (9) 是正双线性系统. 其中 $A \trianglerighteq 0$ 指对任意 $i \neq j$ 有 $a_{ij} \geq 0$. 文献 [39] 同时研究了正系统 (9) 的拓扑性质, 给出了一些系统在二阶时可控的充分条件, 文献 [40] 则得到了二阶时可控性充要条件.

定理 9[40]**.** 若控制不受限, 则二阶正双线性系统 (9) 可控当且仅当 $B = \mathrm{diag}\{b_1, b_2\}$ 非奇异, 且以下任一条件满足:

1) $b_1 > 0$;

2) $b_1 < 0,\ \Delta > 0,\ a_{22}b_1 - a_{11}b_2 > 0$.
其中, $b_2 > 0,\ \Delta = (a_{22}b_1 - a_{11}b_2)^2 + 4a_{12}a_{21}b_1b_2$.

文献 [39] 则给出了一个判断正系统 (9) 不可控的条件.

定理 10[39]**.** 若存在向量 $\boldsymbol{p} = [p_1\ \cdots\ p_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}_+^n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} p_i b_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} \geq 0$$

其中, $A = [a_{ij}],\ B = \mathrm{diag}\{b_1, \cdots, b_n\}$, 则正系统 (9) 不可控.

对于由 Schrödinger 方程所描述的量子系统, 注意到其数学模型在形式上就是双线性系统微分方程, 因此量子系统可控性与连续双线性系统可控性密切相关[15−20].

综上所述, 连续双线性系统可控性的研究主要基于李群、李代数等数学工具. 目前为止, 只有不受限对称双线性系统 (4) 的可控性问题彻底解决了, 得到了充要条件, 这得益于李群、李代数的应用. 而对于齐次双线性系统 (3) 的可控性, 只有二阶单输入情况彻底解决了 (一阶时系统 (3) 不可控), 高阶情况仍无普适条件. 难点在于对半群的分析与处理. 这有待于半群理论的进一步发展. 另一方面, 由于矩阵系统 (8) 与系统 (3) 的可控性密切相关, 矩阵系统 (8) 的拓扑性质值得深入研究.

3 离散双线性系统可控性

许多实际系统的模型都具有离散双线性形式, 例如复利、神经网络、人口增长等[48−49]. 相比于连续双线性系统, 离散双线性系统可控性的研究和成果则较少, 数学工具主要是矩阵和数学分析. 究其原因在于离散系统的代数结构远不如连续系统丰富 (离散系统中通常要处理半群问题), 使得许多数学工具无法较好地应用. 绝大部分现有研究离散双线性系统可控性的文献均针对单输入系统 (5) 和 (6)[48−53], 且系统阶数大于 1 (一阶时可控性很明显, 两系统均可控). 其中文献 [48] 研究了系统 (5) 和 (6) 的小可控性, 给出了系统小可控的充分条件.

定理 11[48]**.** 系统 (5) 是小可控的, 若存在正整数 N, M, 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}_*^n$ 如下条件满足:

1) $\|A^N\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$, 即 A^N 是正交矩阵;

2) $H_M(\boldsymbol{x}) = [BA^{M-1}\boldsymbol{x}\ \ ABA^{M-2}\boldsymbol{x}\ \ \cdots\ \ A^{M-1}B\boldsymbol{x}]$ 行满秩, 即 $\mathrm{rank}H_M(\boldsymbol{x}) = n$.

定理 12[48]**.** 系统 (6) 是小可控的, 若存在正整数 N, M, 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}_*^n$ 如下条件满足:

1) $\|A^N\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$, 即 A^N 是正交矩阵;

2) $I_M(\boldsymbol{x}) = [BA^{M-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}\ \ ABA^{M-2}\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{c}\ \cdots\ A^{M-1}B\boldsymbol{x} + A^{M-1}\boldsymbol{c}]$ 行满秩, 即 $\mathrm{rank}I_M(\boldsymbol{x}) = n$.

文献 [48] 证明可控性的思路是在定理 11 和 12 中的两条件下, 先证明局部可控性, 进而再构造出有限个开覆盖将任意两非零的状态连接以得到可控性. 事实上, 在得到局部可控性后, 直接利用引理 1 便可得可控性, 因局部可控性保证了对系统所有状态都存在其一邻域对其可达, 且 $\mathbf{R}_*^n$ $(n \geq 2)$ 是连通的. 文献 [9] 已指出这一点. 注意到, 若系统阶数较高, 则定理 11 和 12 中第二个条件很难验证. 因此, 定理 11 和 12 难以应用于高阶系统.

文献 [51] 给出了系统 (5) 小可控的必要条件.

定理 13[51]**.** 若系统 (5) 小可控, 则 A 的特征值均在单位圆上.

结合文献 [48] 可知该定理对系统 (6) 亦成立, 因系统 (6) 可转化为增广的系统 (5)[48].

文献 [49] 则在假设 $\mathrm{rank}B = 1$ 的前提下, 将系统 (5) 和 (6) 分别转化为一线性系统和状态延迟反馈环节所组成的闭环系统加以分析. 即讨论如下形式的齐次离散双线性系统

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + u(k)B\boldsymbol{x}(k)\\&\mathrm{rank}B = 1,\ B = \boldsymbol{c}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{10}$$

和非齐次离散双线性系统

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + u(k)B\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{c}u(k)\\&\mathrm{rank}B = 1,\ B = \boldsymbol{c}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{11}$$

其中, $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n$. 注意到系统 (10) 和 (11) 分别等价于

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{c}v(k) \tag{12a}$$
$$v(k) = u(k)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k) \tag{12b}$$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{c}v(k) \tag{13a}$$
$$v(k) = u(k)(\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k) + 1) \tag{13b}$$

其中, 式 (12a) 和 (13a) 可看作线性系统, 式 (12b) 和 (13b) 可看作状态延迟反馈. 此时, 对系统 (10) 和 (11) 便可利用线性系统的理论来分析其可控性. 文献 [49] 给出了系统 (10) 和 (11) 可控的充分条件和必要条件. 文献 [50] 用一种多项式方法研究了系统 (12) 的可控性. 文献 [52−53] 则在文献 [49] 的基础上给出了可控性充要条件.

定理 14[52]**.** 记 $I = \{i|\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}A^{i-1}\boldsymbol{c} \neq 0,\ 0 < i \leq n^2\}$, 并记 j 为所有 $i \in I$ 的最大公约数, 则系统 (10) 可控当且仅当 $(A, \boldsymbol{c})$ 可控, $(\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}, A)$ 可观且 $j = 1$.

定理 15[53]**.** 记 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{h}\ A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\ \cdots\ (A^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{h}]^{\mathrm{T}} = m \leq n$, $I = \{i|\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}A^{i-1}\boldsymbol{c} \neq 0,\ 0 < i \leq m^2\}$, 并记 j 为所有 $i \in I$ 的最大公约数, 则系统 (11) 可控当且仅当 $(A, \boldsymbol{c})$ 可控且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \\ 1 & \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}A^{j} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}A^{\alpha j} \end{bmatrix} = \alpha + 1$$

其中, $m = \alpha j$.

文献 [54] 则简化了定理 14 的判定条件, 指出定理 14 中的集合 I 可以缩小, 即令 $I = \{i|\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}A^{i-1}\boldsymbol{c} \neq 0,\ 0 < i \leq 2n\}$, 再判断 j 即可.

若 $\operatorname{rank}B > 1$, 则无法对系统做类似于式 (12) 和 (13) 的分解, 因而文献 [49, 52−53] 研究系统 (5) 和 (6) 可控性的方法不适用于 $\operatorname{rank}B > 1$ 的情况.

文献 [55] 则研究了输入为二维及多维时, 即系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + \sum_{i=1}^{m} u_i(k)B_i\boldsymbol{x}(k)$$

的可控性, 并得到一些充分条件, 方法类似于文献 [49] 但假设更强, 要求 $\operatorname{rank}B_i$ 均等于 1.

定理 11 ∼ 15 是关于离散双线性系统早期的, 也是主要的可控性判据, 仅适用于单输入情况. 定理 11 和 12 针对小可控性, 为充分条件, 且在系统阶数较高时难以应用. 定理 14 和 15 为可控性充要条件, 易于使用, 但对象有限制. 此后对离散双线性系统可控性的研究几乎陷入停滞.

近来, 文献 [67] 首次构造了一个二阶双线性系统可控性反例, 即如下不可控严格双线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = u(t)B\boldsymbol{x}$$

经 Euler 离散化后得到的离散系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) + u(k)B\boldsymbol{x}(k) = (I + u(k)B)\boldsymbol{x}(k) \tag{14}$$

却是可控的, 其中

$$B = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

系统 (14) 是系统 (5) 中 $A = I$ 时的情况, 但无论是定理 11 还是定理 14 均不能用来判断系统 (14) 的可控性. 因 $A = I$ 导致定理 11 中第二项不可能被满足; 定理 14 的前提是 $\operatorname{rank}B = 1$. 文献 [68] 则给出了一个易于判断系统 (14) 可控的充分条件, 从而推广了文献 [67] 所提出的二阶反例. 文献 [69] 则进一步得到了系统 (14) 可控的充要条件.

定理 16[69]**.** 设系统 (14) 的阶数为 n. 则当 $n = 1$ 时, 系统可控的充要条件是 $B \neq 0$; 当 $n = 2$ 时, 系统可控的充要条件是 B 的特征值为一对共轭复数, 但不含纯虚数; 当 $n \geq 3$ 时, 系统不可控.

文献 [69] 之所以得到了可控性充要条件是因为在证明可控性的第一步 (将任意状态转移到自身) 中, 不同于文献 [67−68] 采用常值控制, 文献 [69] 构造出了非常值控制. 文献 [71] 则在文献 [69] 的基础上得到了一个包含二阶系统 (14) 可控性的充分条件.

定理 17[71]**.** 如下二阶系统 ($a \neq 0$)

$$\boldsymbol{x}(k+1) = (aI + u(k)B)\boldsymbol{x}(k)$$

可控, 若 $||a| - 1|$ 足够小且 B 的特征值为一对共轭复数 $r(\cos\alpha \pm \mathrm{j}\sin\alpha)$, 使得 $|a|\sin\alpha < 1$.

在定理 17 中令 $a = 1$, 即得定理 16 在 $n = 2$ 时的结论.

定理 16 指出系统 (14) 在三阶或三阶以上时不可控. 因此, 系统 (14) 似乎并无多少有价值的系统特性. 尽管如此, 文献 [70] 进一步研究了系统 (14), 发现并证明了离散双线性系统的一种新性质, 即对不可控的系统 (14), 它的可控域几乎可以覆盖全空间, 使得系统临近可控. 文献 [72] 则在文献 [70] 的基础上给出了如下更全面的临近可控性定义.

定义 6[72]**.** 一连续系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$ (离散系统 $\boldsymbol{x}(k+1) = f(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k))$) 是临近可控的, 若对任意 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n \setminus E$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^n \setminus F$, 存在分段常值控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $T > 0$ (有界控制序列 $\boldsymbol{u}(k)$, $k = 0, 1, \cdots, l$, l 为一正整数), 使得在某个 $t \in (0,\ T)$ 时 (在 $k = l$ 时), $\boldsymbol{\xi}$ 被转移至 $\boldsymbol{\eta}$. 其中 E, F 为 $\mathbf{R}^n$ 中两个 Lebesgue 测度为零的集合.

文献 [70] 研究了系统 (14) 的临近可控性, 给出如下结论.

定理 18[70]**.** 对于系统 (14), 若 $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 有 n 个非零的互不相同的实特征值, 则系统 (14) 临近可控. 特别地, 对任意

$$\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\boldsymbol{\xi}||\boldsymbol{\xi}\ B\boldsymbol{\xi}\ \cdots\ B^{n-2}\boldsymbol{\xi}\ B^{n-1}\boldsymbol{\xi}| = 0\}$$

$\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{\xi}$ 可被转移至 $\boldsymbol{\eta}$.

定理 18 中的双线性系统不可控, 但却 "几乎" 可控. 严格地说, 可控的双线性系统亦临近可控 (此时有 $E = F = \emptyset$), 而不可控的双线性系统可临近可控. 事实上, 临近可控性描述了不可控但具有很大可控域的系统, 是双线性系统, 亦非线性系统的一种本质属性. 而对一线性时不变系统, 若其不可控, 则所有的状态都不可控 (这里, 可控性并非指仅控制到原点, 而是控制到任意点. 对线性时不变系统, 可控性与可达性等价. 即, 可控的线性时不变系统的状态被控制到原点等价于被控制到任意点). 临近可控性是包含了可控性的更广泛的概念. 对这个性质的研究

不只限于双线性系统, 还可面向更广泛的非线性系统. 为说明这点, 例举如下两个不可控但临近可控的非线性系统例子.

考虑连续非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1(t)(x_1+u_1(t))^2\\ \dot{x}_2 &= u_2(t)x_3\\ \dot{x}_3 &= u_3(t)x_2\end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{x}=[x_1\ \cdots\ x_3]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{u}(t)=[u_1(t)\ \cdots\ u_3(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3$, 及离散非线性系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\left[\begin{array}{cc}1+2\sin u(k) & 0\\ 0 & -1+2\cos u(k)\end{array}\right]\boldsymbol{x}(k)$$

其中, $\boldsymbol{x}(k)\in\mathbf{R}^2$, $u(k)\in\mathbf{R}$. 对上述连续非线性系统易见形如 $[\xi_1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ 的状态不可控 (零项不可控). 对上述离散非线性系统易见形如 $[\xi_1\ 0]^{\mathrm{T}}$ 和 $[0\ \xi_2]^{\mathrm{T}}$ 的状态不可控 (零项不可控). 因此, 两非线性系统均不可控. 文献 [72] 则证明了它们均临近可控. 特别地, 对连续非线性系统有 E, $F=\{[\xi_1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}},\ \xi_1\in\mathbf{R}\}$. 对离散非线性系统有 $E=\{[\xi_1\ \xi_2]^{\mathrm{T}},\ \xi_1\xi_2=0\}$, $F=\emptyset$.

文献 [70] 利用定理 18, 给出了 Euler 离散化改变系统可控性的任意有限维例子. 考虑如下 n 阶连续双线性系统

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}=u(t)B\boldsymbol{x}=u(t)\left[\begin{array}{cccc}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{array}\right]\boldsymbol{x}\\ &\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\varphi}:[1\ \cdots\ 1]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{15}$$

直接求解系统可知, 无论采取何种控制, 系统的状态只能限制在曲线

$$\{\boldsymbol{x}(t)|x_2(t)=x_1^2(t),\cdots,x_n(t)=x_1^n(t),x_1(t)>0\}$$

上. 而根据定理 18, 系统 (15) 经 Euler 离散化后得到的离散系统

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}(k+1)=\left(I+u(k)\left[\begin{array}{cccc}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{array}\right]\right)\boldsymbol{x}(k)\\ &\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\varphi}\end{aligned}$$

临近可控. 因此, $\boldsymbol{\varphi}$ 可被转移至 $\mathbf{R}^n$ 中任意一点. 而与状态只能在一曲线上转移的系统 (15) 相比, 可控性发生了根本的改变.

这里要强调一点, 对线性时不变系统, Euler 离散化并不改变其可控性, 而对非线性系统, 则不一定.

此外, 文献 [59−61] 研究了系统 (9) 的采样可控性. 双线性系统采样可控性是指将连续双线性系统的解采样后得到的采样系统的可控性, 即系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\mathrm{e}^{\tau(A+u(k)B)}\boldsymbol{x}(k)$$

的可控性, 其中 τ 为采样周期. 注意到此系统已不是双线性了, 而是一离散非线性系统.

文献 [62−66] 讨论了系统 (5) 的零可控性, 即将任意状态控制到原点. 但对非线性系统, 状态被控制到原点并不代表能被控制到任意点.

综上所述, 与连续双线性系统可控性相比, 离散双线性系统可控性的研究和成果相对较少. 绝大多数现有文献所讨论的是单输入系统 (5) 和 (6) 的可控性, 且仅在一些特殊情况下得到了充要条件, 目前尚无普适条件. 而对多输入离散双线性系统可控性的研究则几乎没有. 近期发现的非线性系统临近可控性值得关注和研究. 由于控制与状态耦合所导致的非线性, 使得离散双线性系统可控性问题很复杂, 较难处理. 迄今没有一套合适的像李群那样成熟的数学工具来针对这个问题. 另一方面, 由于离散系统与连续系统有本质的不同, 离散系统的代数结构远不如连续系统丰富. 因此, 离散双线性系统可控性还需要更多更深入的研究. 可尝试对系统做适当的假设或增加一些辅助条件以降低可控性问题的难度, 如定理 14 和 15 中 $\mathrm{rank}B=1$ 以及定理 16 中 $A=I$.

4 可控的双线性系统例子

例 1. 考虑如下齐次双线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+u(t)B\boldsymbol{x}\tag{16}$$

其中

$$A=\left[\begin{array}{cc}0&1\\-1&0\end{array}\right],\ \ B=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\end{array}\right]$$

由于 A,B 线性无关, 且 $\lambda(A+\mu B)=\mu\pm i$, 根据定理 5, 系统 (16) 可控. 注意到 A,B 显然无共同实特征向量, 有 $\{A,B\}_L$ 传递. 若根据定理 6, 因 $a_{12}a_{21}=-1<0$, 可得系统 (16) 可控. 若根据定理 3, 注意到 A 中立, 可得系统 (16) 可控.

事实上, 直接求解系统 (16) 有

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\int_0^t(A+u(\tau)B)\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{x}(0)=\mathrm{e}^{\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{x}(0)=$$

$$\mathrm{e}^{\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau}\left[\begin{array}{cc}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{array}\right]\boldsymbol{x}(0)$$

上式最后一项中的第 1 项为可控制状态的幅值, 第 2 项为可控制状态的相角, 因而系统可控.

例 2. 考虑如下对称双线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = u_1(t)B_1\boldsymbol{x} + u_2(t)B_2\boldsymbol{x} \tag{17}$$

其中

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

注意到

$$[B_1, B_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\forall \boldsymbol{x} \neq 0$ 有

$$\begin{aligned} &\text{rank}[B_1\boldsymbol{x}\ B_2\boldsymbol{x}\ [B_1, B_2]\boldsymbol{x}] = \\ &\quad \text{rank}\begin{bmatrix} x_2 & 0 & x_1 \\ 0 & x_1 & -x_1 \end{bmatrix} = 2 \end{aligned}$$

因而 $\{B_1, B_2\}_L$ 传递. 根据定理 1, 系统 (17) 可控.

例 3. 考虑如下齐次双线性系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + u(k)B\boldsymbol{x}(k) \tag{18}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

注意到 $A^2 = I$, 且 $\forall \boldsymbol{x} \neq 0$ 有

$$\det[AB\boldsymbol{x}\ BA\boldsymbol{x}] = -(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0$$

即 $\text{rank}[AB\boldsymbol{x}\ BA\boldsymbol{x}] = 2$. 根据定理 11, 系统 (18) 小可控.

例 4. 考虑如下齐次双线性系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + u(k)B\boldsymbol{x}(k) \tag{19}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因 $\text{rank}B = 1$, 令

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{h}^{\rm T}$$

则有 $(A, \boldsymbol{c})$ 可控, $(\boldsymbol{h}^{\rm T}, A)$ 可观. 又 $\boldsymbol{h}^{\rm T}\boldsymbol{c} = 1$, $\boldsymbol{h}^{\rm T}A\boldsymbol{c} = 0$, $\boldsymbol{h}^{\rm T}A^2\boldsymbol{c} = 1$, $\boldsymbol{h}^{\rm T}A^3\boldsymbol{c} = 1$, 有 $I = \{1, 3, 4\}$, $j = 1$. 根据定理 14, 系统 (19) 可控.

例 5. 考虑如下齐次双线性系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) + u(k)B\boldsymbol{x}(k) \tag{20}$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

因 $\lambda(B) = 1 \pm j$. 根据定理 16, 系统 (20) 可控.

例 6. 考虑如下齐次双线性系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) + u(k)B\boldsymbol{x}(k) \tag{21}$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

因 $\lambda(B) = 1, 2$. 根据定理 18, 系统 (21) 可控临近.

5 结论与展望

本文讨论了双线性系统可控性. 将双线性系统分为连续型和离散型, 分别进行论述, 介绍了一些经典结果. 尤其对离散双线性系统, 报告了一些最新成果. 对连续双线性系统可控性的研究主要以李群、李代数为工具. 对离散双线性系统可控性的研究主要以矩阵、数学分析为工具. 目前, 仅一些具特殊形式或在一些特殊条件下的双线性系统可控性问题得到了彻底解决, 绝大多数情况仍未解决, 还有待进一步的研究. 特别地, 近期发现的非线性系统临近可控性值得关注和研究. 此外, 由于双线性系统的镇定问题一直以来是难点, 如何像线性时不变系统状态反馈镇定那样, 利用双线性系统的可控性来指导双线性系统的镇定, 值得思考.

References

1 Mohler R R. *Bilinear Control Processes*. New York: Academic Press, 1973

2 Mohler R R, Ruberti A. *Theory and Applications of Variable Structure Systems*. New York: Academic Press, 1972

3 Bruni C, Pillo G D, Koch G. Bilinear systems: an appealing class of “nearly linear” systems in theory and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, **19**(4): 334−348

4 Mohler R R, Kolodziej W J. An overview of bilinear system theory and applications. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, 1980, **10**(10): 683−688

5 Mohler R R, Kolodziej W J. An overview of stochastic bilinear control processes. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1980, **10**(12): 913−918

6 Mohler R R. *Nonlinear Systems (Vol. 2): Applications to Bilinear Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1991

7 Elliott D L. Bilinear systems. *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*. New York: Wiley, 1999. 308−323

8 Pardalos P M, Yatsenko V. *Optimization and Control of Bilinear Systems: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: Springer, 2008

9 Elliott D L. *Bilinear Control Systems: Matrices in Action*. Dordrecht: Springer, 2009

10 Aoki M. Some examples of dynamic bilinear models in economics. *Variable Structure Systems with Application to Economics and Biology*. New York: Springer, 1975. 163−169

11 Elliott D L. Mathematical models of blood coagulation kinetics. *Recent Developments in Variable Structure Systems, Economics and Biology*. New York: Springer, 1978. 118−122

12 Sussmann H. Semigroup representations, bilinear approximations of input-output maps, and generalized inputs. *Mathematical Systems Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1976. 172−192

13 D′Alessandro D. *Introduction to Quantum Control and Dynamics*. Boca Raton: Taylor and Francis, 2007

14 Cong Shuang, Zheng Yi-Song, Ji Bei-Chen, Dai Yi. Survey of progress in quantum control system. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2003, **20**(1): 2−9
(丛爽, 郑毅松, 姬北辰, 戴谊. 量子系统控制发展综述. 量子电子学报, 2003, **20**(1): 2−9)

15 Huang G M, Tarn T J, Clark J W. On the controllability of quantum-mechanical systems. *Journal of Mathematical Physics*, 1983, **24**(11): 2608−2618

16 D′Alessandro D. Small time controllability of systems on compact Lie groups and spin angular momentum. *Journal of Mathematical Physics*, 2001, **42**(9): 4488−4496

17 Altafini C. Controllability of quantum mechanical systems by root space decomposition of su(N). *Journal of Mathematical Physics*, 2002, **43**(5): 2051−2062

18 Albertini F, D′Alessandro D. Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(8): 1399−1403

19 Turinici G. Beyond bilinear controllability: applications to quantum control. *International Series of Numerical Mathematics*, 2007, **155**: 293−309

20 Cong Shuang, Dong Ning. Comparative study on controllability relationship of quantum mechanical systems and bilinear systems. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2006, **23**(1): 83−92
(丛爽, 东宁. 量子力学系统与双线性系统可控性关系的对比研究. 量子电子学报, 2006, **23**(1): 83−92)

21 Kucera J. Solution in large of the control problem: $x' = [A(1-u)+Bu]x$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1966, **16**(4): 600−623

22 Kucera J. Solution in large of the control problem: $x' = [Au+Bv]x$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1967, **17**(1): 91−96

23 Rink R E, Mohler R R. Completely controllable bilinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1968, **6**(3): 477−486

24 Kucera J. On accessibility of bilinear systems. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1970, **17**(1): 160−168

25 Haynes G W, Hermes H. Nonlinear controllability via Lie theory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1970, **8**(4): 450−460

26 Elliott D L, Tarn T J. Controllability and observability for bilinear systems. In: Proceedings of the SIAM National Meeting. Seattle, USA: SIAM, 1971

27 Elliott D L. A consequence of controllability. *Journal of Differential Equations*, 1971, **10**(2): 364−370

28 Mohler R R, Rink R E. Reachable zones for equicontinuous bilinear control processes. *International Journal of Control*, 1971, **14**(2): 331−339

29 Brockett R W. System theory on group manifolds and coset spaces. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1972, **10**(2): 265−284

30 Sussmann H J, Jurdjevic V. Controllability of nonlinear systems. *Journal of Differential Equations*, 1972, **12**(1): 95−116

31 Jurdjevic V, Sussmann H J. Control systems on Lie groups. *Journal of Differential Equations*, 1972, **12**(2): 313−329

32 Brockett R W. Lie theory and control systems defined on spheres. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1973, **25**(2): 213−225

33 Brockett R W. On the reachable set for bilinear systems. *Variable Structure Systems with Application to Economics and Biology*. New York: Springer, 1975. 54−63

34 Cheng G S J. Controllability of Discrete and Continuous-time Bilinear Systems [Master dissertation], Washington University, USA, 1974

35 Boothby W M. A transitivity problem from control theory. *Journal of Differential Equations*, 1975, **17**(2): 296−307

36 Jurdjevic V, Quinn J. Controllability and stability. *Journal of Differential Equations*, 1978, **28**(3): 381−389

37 Boothby W M, Wilson E N. Determination of the transitivity of bilinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1979, **17**(2): 212−221

38 Jurdjevic V, Kupka I. Control systems subordinated to a group action: accessibility. *Journal of Differential Equations*, 1981, **39**(2): 186−211

39 Boothby W M. Some comments on positive orthant controllability of bilinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1982, **20**(5): 634−644

40 Bacciotti A. On the positive orthant controllability of two-dimensional bilinear systems. *Systems and Control Letters*, 1983, **3**(1): 53−55

41 Jurdjevic V, Sallet G. Controllability properties of affine systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1984, **22**(3): 501−508

42 Koditschek D E, Narendra K S. The controllability of planar bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, **30**(1): 87−89

43 Piechottka U, Koditschek D E, Narendra K S. Comments, with reply, on "The controllability of planar bilinear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(6): 767−768

44 Piechottka U, Frank P M. Controllability of bilinear systems. *Automatica*, 1992, **28**(5): 1043−1045

45 Khapalov A Y, Mohler R R. Reachable sets and controllability of bilinear time-invariant systems: a qualitative approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(9): 1342−1346

46 Sachkov Y L. On positive orthant controllability of bilinear systems in small codimensions. *SIAM Journal on Control Optimization*, 1997, **35**(1): 29−35

47 Cheng D Z. Controllability of switched bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(4): 511−515

48 Tarn T J, Elliott D L, Goka T. Controllability of discrete bilinear systems with bounded control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1973, **18**(3): 298−301

49 Goka T, Tarn T J, Zaborszky J. On the controllability of a class of discrete bilinear systems. *Automatica*, 1973, **9**(5): 615−622

50 Mullis C. On the controllability of discrete linear systems with output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1973, **18**(6): 608−615

51 Cheng G S J, Tarn T J, Elliott D L. Controllability of bilinear systems. *Variable Structure Systems with Application to Economics and Biology*. New York: Springer, 1975. 83−100

52 Evans M E, Murthy D N P. Controllability of a class of discrete time bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(1): 78−83

53 Evans M E, Murthy D N P. Controllability of discrete time inhomogeneous bilinear systems. *Automatica*, 1978, **14**(2): 147−151

54 Funahashi Y. Comments on "Controllability of a class of discrete time bilinear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, **24**(4): 667−668

55 Hollis P, Murthy D N P. Controllability of two-input, discrete time bilinear systems. *International Journal of Systems Science*, 1981, **12**(4): 485−494

56 Jakubczyk B, Sontag E D. Controllability of nonlinear discrete-time systems: a Lie-algebraic approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1990, **28**(1): 1−33

57 Albertini F, Sontag E D. Discrete-time transitivity and accessibility: analytic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1993, **31**(6): 1599−1622

58 Albertini F, Sontag E D. Further results on controllability properties of discrete-time nonlinear systems. *Dynamics and Control*, 1994, **4**(3): 235−253

59 Sontag E D. An eigenvalue condition for sampled weak controllability of bilinear systems. *Systems and Control Letters*, 1986, **7**(4): 313−315

60 San Martin L A B. On global controllability of discrete-time control systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1995, **8**(3): 279−297

61 Barros C J B, San Martin L A B. Controllability of discrete-time control system on the symplectic group. *Systems and Control Letters*, 2001, **42**(2): 95−100

62 Sirotin A N. On controllability of homogeneous bilinear discrete systems with commutative matrices. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2000, **39**(2): 173−174

63 Sirotin A N. Zero-controllability sets of a bilinear discrete system with a bounded scalar control. *Automation and Remote Control*, 2000, **61b**(10): 1681−1689

64 Sirotin A N. Characterization of the null-controllability sets of commutative bilinear discrete systems with bounded scalar control. *Automation and Remote Control*, 2002, **63**(8): 1305−1321

65 Sirotin A N. On some problems of control of bilinear discrete systems with triangular matrices. *Journal of Computer and System Sciences International*, 2003, **42**(1): 1−5

66 Djeridane B, Calvet J L. A necessary and sufficient local controllability condition for bilinear discrete-time systems. In: Proceedings of the American Control Conference. Boston, USA: IEEE, 2004. 1755−1757

67 Elliott D L. A controllability counterexample. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(6): 840−841

68 Tie Lin, Cai Kai-Yuan, Lin Yan. Study on the controllability of a class of discrete-time bilinear systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 2010, **27**(5): 468−472 (铁林, 蔡开元, 林岩. 一类离散双线性系统可控性研究. 控制理论与应用, 2010, **27**(5): 468−472)

69 Tie L, Cai K Y, Lin Y, On controllability of discrete-time bilinear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2011, **348**(5): 933−940

70 Tie L, Cai K Y, Lin Y. On uncontrollable discrete-time bilinear systems which are "nearly" controllable. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(12): 2853−2858

71 Tie L, Cai K Y. New results on controllability of discrete-time bilinear systems. In: Proceedings of the 29th Chinese Control Conference. Beijing, China: IEEE, 2010. 520−523

72 Tie L, Cai K Y. On near-controllability of nonlinear control systems. In: Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Yantai, China: IEEE, 2011. 131−136

73 Sontag E D. Controllability is harder to decide than accessibility. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1988, **26**(5): 1106−1118

铁 林 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院博士后. 主要研究方向为非线性控制系统及其应用. 本文通信作者.
E-mail: kingking@asee.buaa.edu.cn
(**TIE Lin** Postdoctor at the School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics. His research interest covers nonlinear control systems and its applications. Corresponding author of this paper.)

蔡开元 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院教授. 主要研究方向为软件可靠性与测试, 可靠飞行控制和软件控制论. E-mail: kycai@buaa.edu.cn
(**CAI Kai-Yuan** Professor at the School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics. His research interest covers software reliability and testing, reliable flight control, and software cybernetics.)

林 岩 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院教授. 主要研究方向为鲁棒控制和自适应控制.
E-mail: linyanee2@yahoo.com.cn
(**LIN Yan** Professor at the School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics. His research interest covers robust control and adaptive control.)