

基于区间二型模糊集合的 语言动力系统稳定性

莫红^{1,2} 王飞跃² 肖志权^{2,3} 陈茜²

摘要 运用区间二型模糊集合 (Interval type-2 fuzzy sets, IT2 FSs) 的扩展原理将常规的数值函数转化为对应的区间二型模糊函数, 并给出了相应的词计算 (Computing with words, CW) 方法与算法, 最后分析了严格单调情况下基于区间二型模糊集合的单输入单输出系统的语言动力系统 (Linguistic dynamic systems, LDS) 稳定性。

关键词 区间二型模糊集合, 词计算, 语言动力系统, 稳定

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.01018

Stabilities of Linguistic Dynamic Systems Based on Interval Type-2 Fuzzy Sets

MO Hong^{1,2} WANG Fei-Yue² XIAO Zhi-Quan^{2,3}
CHEN Qian²

Abstract The paper converts conventional numerical functions to their interval type-2 fuzzy sets counterparts by using their extension principle, then presents the corresponding method and arithmetic of computing with words, and finally gives the linguistic dynamic stability of SISO systems under strictly monotone functions in interval type-2 fuzzy sets.

Key words Interval type-2 fuzzy sets (IT2 FSs), computing with words (CW), linguistic dynamic systems (LDS), stability

当前, 与人类行为相关的问题已经引起研究人员的广泛关注, 这类问题主要表现为感知信息, 且其分析和处理往往是采用自然语言的方式进行的, 因此如何运用自然语言来处理感知信息成为了解决该问题的关键。语言动力系统理论采用词计算的方法, 讨论了在语言的层次上动态地有效利用信息来解决复杂系统的建模、分析、控制、预测和评估问题^[1-3]。

模糊集合 (一型模糊集合) 作为一种有效处理感知信息的方法被成功地应用于解决一些实际问题^[4-5]。然而将模糊集合直接用于处理非确定性信息仍存在一定的局限性, 因为在现实社会里, 相同的词语对于不同的人来说可能表示不同的含义, 而且一型模糊集合自身作为一个精确的数值函数, 被用于描述与处理不精确的感知信息是不合适的。二型模糊集合 (Type-2 fuzzy sets, T2 FSs) 相对于相应的一型而言, 给人们确定隶属函数以更大的自由度, 能更好解决语言歧义和数据噪声问题。因此, 二型模糊集合已经成为计算智能研究的一个热点^[6-10]。

近十多年来, 二型模糊集合理论与应用研究取得了很大的进展。在国外, Mendel 等在二型模糊集合的表述、运算推理、逆模糊化等方面做了大量的工作^[11-15], 并成功地应用于解决连接许可控制^[16]、移动机器人^[17]、决策^[18]、时间序列预测^[19]、故障诊断^[20] 等问题。在国内, 陈薇等概述了二型模糊逻辑系统的结构、发展和应用范围^[21], 随后 Mo 等提出了不确定覆盖域 (Footprint of uncertainty, FOU) 划分法来表述连续区间二型模糊集合^[22], 分析了基于区间二型模糊集合的线性系统的语言动力学轨迹与性质^[23-24], 进一步完善了二型模糊集合的基础理论; 在应用方面, Li 等运用二型模糊神经网络解决了柔性驱动并联机构的水平调节问题^[25], 张伟斌等采用区间二型模糊集合 (Interval type-2 fuzzy sets, IT2 FSs) 方法实现了对交通流的预测^[26]。

语言动力系统 (Linguistic dynamic systems, LDS) 通过借助常规数值动力系统的概念、框架与方法, 建立了自己相应的体系, 主要应用于常规数值动力系统的语言化, 基于词描述的复杂系统的分析、决策、评估以及海量信息的数据挖掘和动态表示, 以期建立连接人类的语言知识表示和计算机的数字知识表示的桥梁, 为下一代智能化人机交互奠定理论基础^[1]。在语言动力系统理论中, 由于包含无限个元素的论域可以用有限个区间二型模糊集合覆盖, 这样将常规的数值函数转化为对应的区间二型模糊函数, 将常规的数值动力系统转化为对应的语言动力系统, 不仅可以简化对系统状态的描述, 使系统最终的结果易于被多数人所接受, 还可以由已知的数值动力系统来验证二型模糊集合下的语言动力系统理论, 为区间二型模糊集合与语言动力系统理论在复杂系统中的应用奠定了理论基础。

稳定性是系统能够正常工作的首要条件, 也是控制理论最重要的问题之一。过去, 语言动力系统稳定性研究主要是基于一型模糊集合。本文在介绍了二型模糊集合的相关概念的基础上, 运用 FOU 划分法来表述区间二型模糊集合^[22], 并结合区间二型模糊集合的扩展原理^[23], 给出了相应的数值算法及词计算的方法, 最后分析了单输入单输出系统的语言动力学轨迹的稳定性。

1 预备知识

设 U 为论域, 一型模糊集合 A 定义为

$$A: U \rightarrow I \quad (1)$$

这里, $I = [0, 1]$ 。即对任意 $u \in U$, 存在 $a \in I$ 使得 $A(u) = a$, 其中 $A(u)$ 为元素 u 对 A 的隶属度。

一个二型模糊集合 ω 定义为

$$\omega: U \rightarrow I^I \quad (2)$$

其中, I^I 表示所有定义域与值域均为 I 的映射之集合, 即

$$I^I = [0, 1]^{[0, 1]} = \{f|f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]\} \quad (3)$$

由此可见, 一个二型模糊集合 ω 为三维空间中的点 $(u, x, \mu_2(u, x))$ 的集合^[9], 即

$$\omega = \{(u, x, \mu_2(u, x)) | \forall u \in U, \forall x \in J_u \subseteq I\} \quad (4)$$

这里, $u \in U$ 为主变量, x 为次变量。对任意 $u \in U$, 其隶属度 $\mu_1(u)$ 为区间 $[0, 1]$ 的一个子集, 称为主隶属度, 记为 $J_u \subseteq I$ 。 $x \in J_u$ 的隶属度 $\mu_2(u, x)$ 为次隶属度, 记为 $J_u(x)$ 。

收稿日期 2010-11-05 录用日期 2011-03-09
Manuscript received November 5, 2010; accepted March 9, 2011
国家自然科学基金 (61074093) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61074093)
1. 长沙理工大学电气与信息工程学院 长沙 410114 2. 中国科学院自动化研究所复杂系统智能控制与管理国家重点实验室 (筹) 北京 100190 3. 武汉纺织大学机电工程学院 武汉 430073
1. School of Electric and Information Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114 2. State Key Laboratory for Intelligent Control and Management of Complex Systems, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190 3. School of Electrical and Mechanical Engineering, Wuhan Textile University, Wuhan 430073

称 $\overline{\mu_\omega^u} = \sup J_u$, $\underline{\mu_\omega^u} = \inf J_u$ 分别为 J_u 的上端点和下端点.

若 U 连续, ω 可以写为

$$\omega = \int_{u \in U} \int_{x \in J_u} \frac{\mu_2(u, x)}{(u, x)}, J_u \subseteq I \quad (5)$$

其中, \int 表示 u 与 x 所有容许值之并, 若 U 离散, 则 \int 可以由 \sum 取代^[10, 13].

若 $\mu_2(u, x) = 1$, 则称 ω 为区间二型模糊集合 (IT2 FS)^[10]. 论域 U 上区间二型模糊集合全体记为 $\Gamma(U)$.

对 $\forall \omega \in \Gamma(U)$, 称

$$FOU(\omega) = \{(u, x) | \forall u \in U, x \in J_u \subseteq I\}$$

为区间二型模糊集合的不确定覆盖域^[10, 13]. 易见, 区间二型模糊集合 ω 及其 $FOU(\omega)$ 一一对应.

若 ω 为一个区间二型模糊集合, 且对 $\forall u \in U$, 都有 $x = 1$, 则称 ω 为清晰词.

若 $U = \{a\}$, 则称 ω 为独点词, 表示为

$$\kappa_a = \int_{x \in J_a} \frac{1}{(a, x)}$$

若 κ_a 是一个清晰词, 则称 κ_a 为清晰独点词, 表示为

$$\chi_a = \frac{1}{(a, 1)}$$

本文中的词, 即为区间二型模糊集合. 平衡词与稳定词等的相关定义详见文献 [27].

2 词计算

设 $g: U \rightarrow D$ 为定义在论域 U 上的一个常规数值函数, 若对任意的 $u_1, u_2 \in U$, $u_1 < u_2$ 都有 $g(u_1) < g(u_2)$ (或 $g(u_1) > g(u_2)$), 则称函数 g 在论域 U 上严格单调递增 (或递减), 严格单调递增与严格单调递减函数统称严格单调函数.

设 $\Gamma(U)$, $\Gamma(D)$ 分别表示定义在论域 U, D 的区间二型模糊集合全体. 一个常规数值函数

$$g: U \rightarrow D \quad (6)$$

诱导一个区间二型模糊函数

$$G: \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(D) \quad (7)$$

对 $\forall \nu \in \Gamma(U)$, 如何计算 $G(\nu)$ 呢?

设输入词 ν 表示为

$$\nu = \int_{u \in U} \int_{x \in J_u} \frac{1}{(u, x)}, J_u \subseteq I \quad (8)$$

则由区间二型模糊集合的扩展原理^[23], 输出词为

$$G(\nu) = \int_{d \in D} \int_{y \in J_d} \frac{1}{(d, y)} \quad (9)$$

这里, $d = g(u)$, $J_d = [\underline{\mu_{G(\nu)}^d}, \overline{\mu_{G(\nu)}^d}]$ 且

$$\underline{\mu_{G(\nu)}^d} = \max\{\underline{\mu_\nu^u} | g(u) = d\}$$

$$\overline{\mu_{G(\nu)}^d} = \max\{\overline{\mu_\nu^u} | g(u) = d\}$$

特别地, 若 $g: U \rightarrow D$ 为一个严格单调函数, 则

$$G(\nu) = \int_{d \in D} \int_{y \in J_d} \frac{1}{(d, y)}, J_d \subseteq I \quad (10)$$

其中, $d = g(u)$, $J_d = J_u = [\underline{\mu_\nu^u}, \overline{\mu_\nu^u}]$. 这就说明在严格单调模糊函数的作用下, 输出词保持了输入词的主隶属度.

由于采用式 (5) 给出的表述式不易于对给定的区间二型模糊集合直接进行词计算, 本文中的区间二型模糊集合均采用文献 [22] 提出的 FOU 划分法来进行表述.

例 1. 论域 I 上严格单调递减函数定义为

$$g(x) = 1 - \sqrt[5]{x} \quad (11)$$

将其转化为对应的区间二型模糊函数

$$G(X) = 1 - \sqrt[5]{X} \quad (12)$$

$\Gamma(I)$ 表示论域 I 所有区间二型模糊集, 设输入词 $\omega \in \Gamma(I)$ 为“0.2 附近的点”, 其隶属函数定义为

$$\omega = \int_0^{0.1} \int_{5u}^{10u} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.1}^{0.2} \int_{5u}^1 \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.2}^{0.3} \int_{2-5u}^1 \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.3}^{0.4} \int_{2-5u}^{4-10u} \frac{1}{(u, x)} \quad (13)$$

则输出词为

$$G(\omega) = \int_{1-\sqrt[5]{0.1}}^1 \int_{5(1-u)^5}^{10(1-u)^5} \frac{1}{(u, x)} + \int_{1-\sqrt[5]{0.2}}^{1-\sqrt[5]{0.1}} \int_{5(1-u)^5}^1 \frac{1}{(u, x)} + \int_{1-\sqrt[5]{0.3}}^{1-\sqrt[5]{0.2}} \int_{2-5(1-u)^5}^1 \frac{1}{(u, x)} + \int_{1-\sqrt[5]{0.4}}^{1-\sqrt[5]{0.3}} \int_{2-5(1-u)^5}^{4-10(1-u)^5} \frac{1}{(u, x)} \quad (14)$$

分别见图 1 和图 2.

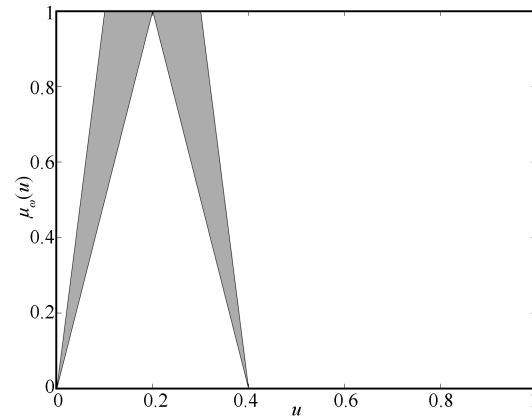


图 1 输入词的 FOU

Fig. 1 FOU of input word

由图 1 和图 2 知, 在模糊函数的作用下, 相对于输入词, 输出词的形状与粒度发生了很大的改变.

3 区间二型模糊集合的语言动力系统

设 $\Gamma(U)$ 为定义在论域 U 上的区间二型模糊集合全体, $f: U \rightarrow U$ 为一个连续函数, 定义了一个常规数值动力系统

$$u_{n+1} = f(u_n) \tag{15}$$

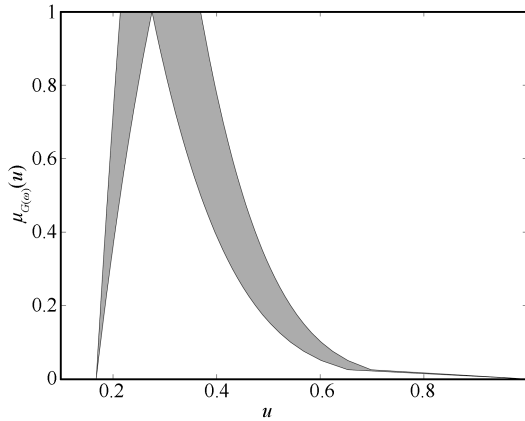


图2 输出词的 FOU
Fig.2 FOU of output word

将其转化为对应的区间二型模糊函数

$$F: \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(U)$$

则相应地生成了一个语言动力系统

$$\omega_{n+1} = F(\omega_n) \tag{16}$$

对任意 $\omega \in \Gamma(U)$, 其语言动力学轨迹为

$$\{\omega, F(\omega), \dots, F^n(\omega), \dots\} \tag{17}$$

这里, n 为一个任意正整数.

一般情况下, 计算初始词 $\omega \in \Gamma(U)$ 的语言动力系统轨迹并非易事. 若 $f: U \rightarrow U$ 为一个严格单调数值函数, 则有如下定理:

定理 1. 若 $f: U \rightarrow U$ 为一个严格单调数值函数, 其对应的区间二型模糊函数 $F: \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(U)$ 的语言动力学轨迹为

$$\{\omega, F(\omega), \dots, F^n(\omega), \dots\} \tag{18}$$

其中,

$$F^n(\omega) = \int_{w \in f^n(U)} \int_{s \in J_w} \frac{1}{(w, s)} \tag{19}$$

这里, $w = f^n(u)$, $J_w = J_{f^{-n}(w)} = J_u$, 且

$$J_w = [\underline{\mu}_{F^n(\omega)}^w, \overline{\mu}_{F^n(\omega)}^w]$$

$$\underline{\mu}_{F^n(\omega)}^w = \underline{\mu}_{\omega}^u$$

$$\overline{\mu}_{F^n(\omega)}^w = \overline{\mu}_{\omega}^u$$

$$f^n(u) = f(f^{n-1}(u))$$

$$F^{-n}(u) = F^{-1}(F^{-n+1}(u))$$

证明. 若 $f: U \rightarrow U$ 为一个严格单调数值函数, 则其逆函数 $f^{-1}: U \rightarrow U$ 也严格单调, 且对任意 $u \in U$, $f^{-1}(u)$ 存在, 且 $f^{-n}(u)$ 也存在, 这里

$$f^{-n}(u) = f^{-1}(f^{-n+1}(u))$$

对任意 $\omega \in \Gamma(U)$,

$$\omega = \int_{u \in U} \int_{x \in J_u} \frac{1}{(u, x)} \tag{20}$$

由式 (9), 有

$$F(\omega) = \int_{d \in f(U)} \int_{y \in J_d} \frac{1}{(d, y)} \tag{21}$$

这里, $d = f(u)$, $J_d = [\underline{\mu}_{F(\omega)}^d, \overline{\mu}_{F(\omega)}^d]$, 且

$$\underline{\mu}_{F(\omega)}^d = \max\{\underline{\mu}_{\omega}^u | f(u) = d\}$$

$$\overline{\mu}_{F(\omega)}^d = \max\{\overline{\mu}_{\omega}^u | f(u) = d\}$$

由于 $f: U \rightarrow U$ 为一个严格单调数值函数, 则

$$\underline{\mu}_{F^n(\omega)}^w = \underline{\mu}_{\omega}^u$$

$$\overline{\mu}_{F^n(\omega)}^w = \overline{\mu}_{\omega}^u$$

由递推原理

$$F^n(\omega) = F(F^{n-1}(\omega)) = \int_{w \in f^n(U)} \int_{s \in J_w} \frac{1}{(w, s)} \tag{22}$$

这里, $w = f^n(u)$, $J_w = [\underline{\mu}_{F^n(\omega)}^w, \overline{\mu}_{F^n(\omega)}^w]$, 且

$$\underline{\mu}_{F^n(\omega)}^w = \max\{\underline{\mu}_{\omega}^u | f^n(u) = w\}$$

$$\overline{\mu}_{F^n(\omega)}^w = \max\{\overline{\mu}_{\omega}^u | f^n(u) = w\}$$

□

由定理 1, 可得区间二型模糊集合在一个严格单调模糊函数下的语言动力学轨迹的数值算法:

步骤 1. 初始化, 置 $i = 0$, 初始状态

$$\omega_0 = \int_{u \in U} \int_{x \in J_u} \frac{1}{(u, x)}$$

步骤 2. 变化规则 $\omega_n = \int_{w \in f^n(U)} \int_{s \in J_{f^{-n}(w)}} \frac{1}{(w, s)}$;

步骤 3. 循环, 若 $i < N$, 则 $i \leftarrow i + 1$, 返回步骤 2, 否则, 停止.

例 2. 论域 $[0, 2]$ 上一个单输入单输出线性系统定义为

$$x_{n+1} = 0.25x_n \tag{23}$$

显然, 该系统是稳定的.

其对应的语言动力系统为

$$X_{n+1} = 0.25X_n \tag{24}$$

设初始词 ω_0 为

$$\omega_0 = \int_{0.6}^{0.8} \int_0^{2.5u-1.5} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.8}^1 \int_{5u-4}^{2.5u-1.5} \frac{1}{(u, x)} + \int_1^{1.2} \int_{-5u+6}^{-2.5u+3.5} \frac{1}{(u, x)} + \int_{1.2}^{1.4} \int_0^{-2.5u+3.5} \frac{1}{(u, x)} \tag{25}$$

则经过 n 次迭代后的输出词为

$$\begin{aligned} \omega_n = & \int_{0.6(0.25)^n}^{0.8(0.25)^n} \int_0^{2.5 \cdot (4^n u) - 1.5} \frac{1}{(u, x)} + \\ & \int_{0.8(0.25)^n}^{(0.25)^n} \int_{5 \cdot (4^n u) - 4}^{2.5 \cdot (4^n u) - 1.5} \frac{1}{(u, x)} + \\ & \int_{(0.25)^n}^{1.2(0.25)^n} \int_{-5 \cdot (4^n u) + 6}^{-2.5 \cdot (4^n u) + 3.5} \frac{1}{(u, x)} + \\ & \int_{1.2(0.25)^n}^{1.4(0.25)^n} \int_0^{-2.5 \cdot (4^n u) + 3.5} \frac{1}{(u, x)} \end{aligned} \quad (26)$$

词 ω_0 的 FOUs 的语言动力学轨迹见图 3.

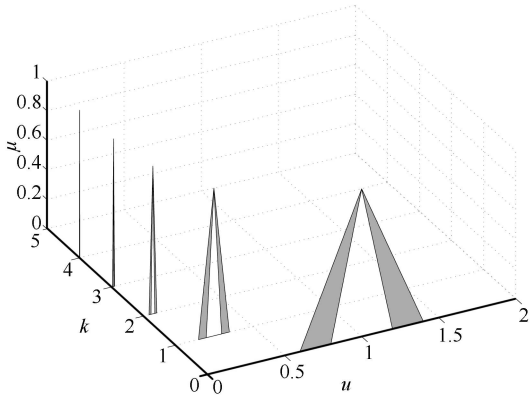


图 3 区间二型模糊集合的语言动力学轨迹
Fig. 3 Linguistic dynamic orbits of IT2 FS

由上图, 易见随着迭代次数的增加, 词轨迹中的每个词的粒度越来越小, 最后其轨迹非常接近平衡词 χ_0 , 这与对应的数值动力系统的性质是一致的.

4 稳定性分析

设 $\Gamma(U)$ 为定义在论域 U 上的区间二型模糊集合全体. 设 $f : U \rightarrow U$ 为一个常规的连续数值函数, $F : \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(U)$ 为对应的区间二型模糊映射, 这两者的稳定性之间的关系, 有如下定理:

定理 2. 设 $f : U \rightarrow U$ 是一个定义在 U 上单输入单输出系统, 且为严格单调函数, $F : \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(U)$ 为对应的区间二型模糊函数, 若数值动力系统是稳定的, 则其对应的语言动力系统 $F : \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(U)$ 也是稳定的.

证明. 由于单输入单输出系统 $f : U \rightarrow U$ 稳定, 则由稳定性定义, 存在 $e \in U$ 及其邻域 $U_e \subseteq U$, 使得对任意 $u \in U_e$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $f^n(u) \rightarrow e$.

对任意的 $\omega \in \Gamma(U)$

$$\omega = \int_{u \in U} \int_{x \in J_u} \frac{1}{(u, x)}$$

由于 f 严格单调, 则由定理 1 有

$$F^n(\omega) = \int_{w \in f^n(U)} \int_{s \in J_w} \frac{1}{(w, s)}$$

这里, $w = f^n(u)$, $J_w = [\underline{\mu}_{F^n(\omega)}^w, \overline{\mu}_{F^n(\omega)}^w]$, 且

$$\underline{\mu}_{F^n(\omega)}^w = \underline{\mu}_\omega^u$$

$$\overline{\mu}_{F^n(\omega)}^w = \overline{\mu}_\omega^u$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对任意 $u \in U$, 都有 $w = f^n(u) \rightarrow e$. 那么, 由极限理论, e 的主隶属度为

$$J_e = \vee_{w \in F^n(U)} [\underline{\mu}_{F^n(\omega)}^w, \overline{\mu}_{F^n(\omega)}^w]$$

这里, $[x_1, y_1] \vee [x_2, y_2] = [x, y]$, $x = \max\{x_1, x_2\}$ 并且 $y = \max\{y_1, y_2\}$. 从而有 $F^n(\omega) \rightarrow \kappa_e$, 且

$$\kappa_e = \int_{x \in [\underline{\mu}_{\kappa_e}, \overline{\mu}_{\kappa_e}]} \frac{1}{(e, x)}$$

$$\underline{\mu}_{\kappa_e} = \max\{\underline{\mu}_\omega^u | u \in U\}$$

$$\overline{\mu}_{\kappa_e} = \max\{\overline{\mu}_\omega^u | u \in U\}$$

特别地, 当 $\underline{\mu}_{\kappa_e} = \overline{\mu}_{\kappa_e} = 1$ 时,

$$\kappa_e = \chi_e = \frac{1}{(e, 1)}$$

故对应的语言动力系统是稳定的. 因此常规的数值动力系统与其对应的语言动力系统之间具有相同的稳定性. \square

例 3. 论域 $[0, 1]$ 上的一个单输入单输出非线性系统定义为

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_n^2, & 0 \leq u_n \leq 0.5 \\ \sqrt{0.5u_n - 0.25} + 0.5, & 0.5 < u_n \leq 1 \end{cases}$$

由上式可见, 该数值函数 $u_{n+1} = f(u_n)$ 严格单调, 且 $f([0, 0.5]) \subseteq [0, 0.5]$, $f([0.5, 1]) \subseteq [0.5, 1]$, 其逆映射 f^{-1} 也严格单调, 且 $f^{-1}([0, 0.5]) \subseteq [0, 0.5]$, $f^{-1}([0.5, 1]) \subseteq [0.5, 1]$.

显然, 点 0 与 1 为常规的数值动力学系统的两个稳定点. 对应的语言动力系统为

$$U_{n+1} = \begin{cases} 2U_n^2, & u_n \in \Gamma([0, 0.5]) \\ \sqrt{0.5U_n - 0.25} + 0.5, & u_n \in \Gamma((0.5, 1]) \end{cases}$$

令 ω_0, ψ_0 为 $\Gamma([0, 1])$ 中的两个初始输入词, 且 $\omega_0 =$ “0.2 附近的点”, $\psi_0 =$ “0.7 附近的点”, 分别定义为

$$\begin{aligned} \omega_0 = & \int_0^{0.1} \int_0^{5u} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.1}^{0.2} \int_{10u-1}^{5u} \frac{1}{(u, x)} + \\ & \int_{0.2}^{0.3} \int_{3-10u}^{2-5u} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.3}^{0.4} \int_0^{2-5u} \frac{1}{(u, x)} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \psi_0 = & \int_{0.5}^{0.6} \int_0^{5u-2.5} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.6}^{0.7} \int_{10u-6}^{5u-2.5} \frac{1}{(u, x)} + \\ & \int_{0.7}^{0.8} \int_{8-10u}^{4.5-5u} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.8}^{0.9} \int_0^{4.5-5u} \frac{1}{(u, x)} \end{aligned} \quad (28)$$

显然, 对任意 $u \in [0, 0.5]$,

$$f^n(u) = 2(2u)^{2^n} \quad (29)$$

$$f^{-n}(u) = 0.5(2u)^{0.5^{2^n}} \quad (30)$$

因此, $F^n(\omega_0), F^n(\psi_0)$ 可以表示为

$$F^n(\omega_0) = \int_0^{2(0.2)^{2^n}} \int_0^{2.5(2u)^{0.5^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{2(0.2)^{2^n}}^{2(0.4)^{2^n}} \int_{5(2u)^{0.5^{2^n}-1}}^{2.5(2u)^{0.5^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{2(0.4)^{2^n}}^{2(0.6)^{2^n}} \int_{3-2.5(2u)^{0.5^{2^n}}}^{2-2.5(2u)^{0.5^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{2(0.6)^{2^n}}^{2(0.8)^{2^n}} \int_0^{2-2.5(2u)^{0.5^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} \quad (31)$$

$$F^n(\psi_0) = \int_{0.5}^{0.5(0.2)^{0.5^{2^n}}+0.5} \int_0^{2.5(2u-1)^{2^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.5(0.2)^{0.5^{2^n}}+0.5}^{0.5(0.4)^{0.5^{2^n}}+0.5} \int_{5(2u-1)^{2^{2^n}}}^{2.5(2u-1)^{2^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.5(0.4)^{0.5^{2^n}}+0.5}^{0.5(0.6)^{0.5^{2^n}}+0.5} \int_{3-5(2u-1)^{2^{2^n}}}^{2-2.5(2u-1)^{2^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.5(0.4)^{0.5^{2^n}}+0.5}^{0.5(0.8)^{0.5^{2^n}}+0.5} \int_0^{2-2.5(2u-1)^{2^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} \quad (32)$$

这两个词 ω_0, ψ_0 的语言动力学轨迹见图 4.

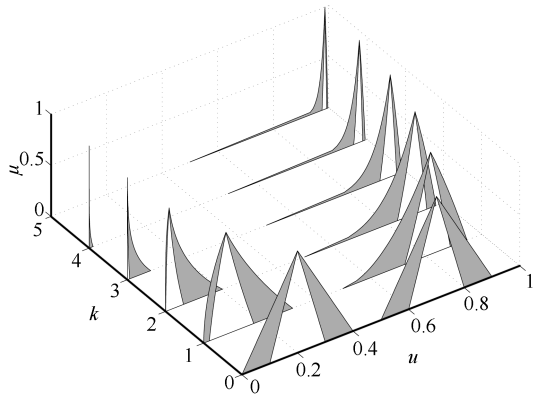


图4 有两个稳定词的 LDS
Fig. 4 LDS with two stable words

由图 4 可知, 随着迭代次数的不断增加, 两个初始词 $\omega_0 \in \Gamma([0, 0.5]), \psi_0 \in \Gamma([0.5, 1])$ 的语言动力学轨迹中的每个词的粒度越来越小, 分别趋近于稳定词 χ_0 与 χ_1 , 这和与其对应的数值动力学系统具有相同的性质.

例 4. 论域 $[0, 1]$ 上的一个非线性系统定义为

$$x_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{0.5x_n}, & 0 \leq u_n \leq 0.5 \\ 2(x_n - 0.5)^2 + 0.5, & 0.5 < u_n \leq 1 \end{cases}$$

易见, 该系统对应的函数 $u_{n+1} = h(u_n)$ 严格单调, 且 $h([0, 0.5]) \subseteq [0, 0.5], h([0.5, 1]) \subseteq [0.5, 1], h^{-1}([0, 0.5]) \subseteq [0, 0.5], h^{-1}([0.5, 1]) \subseteq [0.5, 1]$, 点 0.5 为常规动力学系统的稳定点.

其对应的语言动力系统为

$$X_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{0.5X_n}, & X_n \in \Gamma([0, 0.5]) \\ 2(X_n - 0.5)^2 + 0.5, & X_n \in \Gamma([0.5, 1]) \end{cases}$$

令 ϕ_0, φ_0 为 $\Gamma([0, 1])$ 上的两个初始词

ϕ_0 = “0.2 附近的点”

φ_0 = “0.7 附近的点”

显然, 对 $\forall u \in [0, 0.5]$, 存在

$$h^n(u) = 0.5(2u)^{0.5^{2^n}}$$

$$h^{-n}(u) = 0.5(2u)^{2^{2^n}}$$

因此 $H^n(\omega_0), H^n(\varphi_0)$ 可以表示为

$$H^n(\phi_0) = \int_0^{0.5(0.2)^{0.5^{2^n}}} \int_0^{2.5(2u)^{2^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.5(0.2)^{0.5^{2^n}}}^{0.5(0.4)^{0.5^{2^n}}} \int_{5(2u)^{2^{2^n}}}^{2.5(2u)^{2^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.5(0.4)^{0.5^{2^n}}}^{0.5(0.6)^{0.5^{2^n}}} \int_{3-5(2u)^{2^{2^n}}}^{2-2.5(2u)^{2^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{0.5(0.4)^{0.5^{2^n}}}^{0.5(0.8)^{0.5^{2^n}}} \int_0^{2-2.5(2u)^{2^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} \quad (33)$$

$$H^n(\omega_0) = \int_{0.5}^{2(0.2)^{2^n}+0.5} \int_0^{2.5(2u-1)^{0.5^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{2(0.2)^{2^n}+0.5}^{2(0.4)^{2^n}+0.5} \int_{2.5(2u-1)^{0.5^{2^n}}}^{2.5(2u-1)^{0.5^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{2(0.2)^{2^n}+0.5}^{2(0.6)^{2^n}+0.5} \int_{3-5(2u-1)^{0.5^{2^n}}}^{2-2.5(2u-1)^{0.5^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} + \int_{2(0.4)^{2^n}+0.5}^{2(0.8)^{2^n}+0.5} \int_0^{2-2.5(2u-1)^{0.5^{2^n}}} \frac{1}{(u, x)} \quad (34)$$

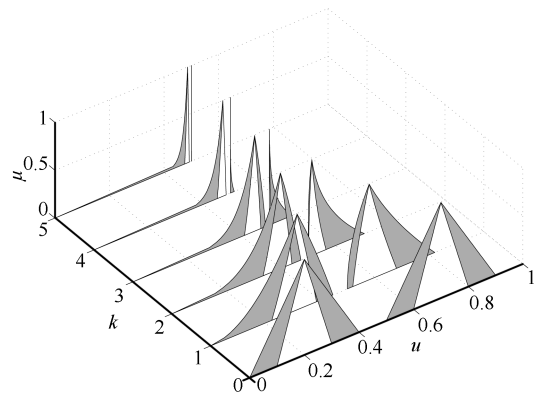


图5 唯一稳定词的 LDS
Fig. 5 LDS with one single stable word

由图 5 可见, 在模糊函数的作用下, 两个初始词 $\phi_0 \in \Gamma([0, 0.5]), \varphi_0 \in \Gamma([0.5, 1])$ 的语言动力学轨迹无限趋近于唯一的稳定词 $\chi_{0.5}$, 且随着迭代次数的增加, 每个词的粒度越来越小, 对任意其他的初始词, 有相同的结论.

例 3 和例 4 所介绍的两个非线性系统的函数图象在平面上关于直线 $y = x$ 对称, 但它们对应的数值动力系统的性质不相同, 不仅稳定点不同, 而且稳定点的个数也不同, 分别具

有两个稳定点 0, 1, 一个稳定点 0.5. 这一性质也同样体现在它们各自对应的语言动力系统上, 例 3 和例 4 中的语言动力系统分别具有两个稳定词 χ_0, χ_1 , 一个稳定词 $\chi_{0.5}$.

这说明在区间二型模糊函数下, 单输入单输出系统的语言动力学轨迹具有和其对应的常规动力学轨迹相同的性质.

5 结论

本文将数值动力系统转化为对应的语言动力学系统并分析其稳定性, 通过与对应数值动力系统的稳定性的比较, 说明二者具有相同的稳定性, 这也验证了在区间二型模糊集合下语言动力系统理论的正确性. 采用语言动力系统理论对系统进行分析, 能较好地消除噪声和其他外界因素的干扰, 能够简化对系统状态的描述, 使系统的输出结果更加人性化, 可以预见语言动力系统理论在未来的人机界面将有广阔的应用前景^[27].

References

- Wang Fei-Yue. Fundamental issues in research of computing with words and linguistic dynamic systems. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(6): 844–852
(王飞跃. 词计算和语言动力学系统的基本问题和研究. 自动化学报, 2005, **31**(6): 844–852)
- Wang F Y. On the abstraction of conventional dynamic systems: from numerical analysis to linguistic analysis. *Information Science*, 2005, **171**(1–3): 233–259
- Mo H, Wang F Y. Linguistic dynamic systems based on computing with words and their stabilities. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2009, **52**(5): 780–796
- Zadeh L A. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, **4**(2): 103–111
- Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1973, **SMC-3**(1): 28–44
- Juang C F, Huang R B, Lin Y Y. A recurrent self-evolving interval type-2 fuzzy neural network for dynamic systems proceeding. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, **17**(5): 1092–1105
- Du X Y, Ying H. Derivation and analysis of the analytical structures of the interval type-2 fuzzy-PI and PD controller. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, **18**(4): 802–814
- Simon C, Robert J. Geometric type-1 and type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, **15**(1): 3–15
- Mendel J M. Advances in type-2 fuzzy sets and systems. *Information Science*, 2007, **177**(1): 84–110
- Niewiadomski A. On finity, countability, cardinalities, and cylindric extensions of type-2 fuzzy sets in linguistic summarization of database. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, **18**(3): 532–545
- Mendel J M, John R I B. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, **10**(2): 117–127
- Karnik N N, Mendel J M. Operation on type-2 fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **122**(2): 327–348
- Karnik N N, Mendel J M. Centroid of a type-2 fuzzy set. *Information Science*, 2001, **132**(1–4): 195–220
- Karnik N N, Mendel J M, Liang Q. Type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 1999, **7**(6): 643–658
- Wu D R, Mendel J M. Uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets. *Information Science*, 2007, **177**(23): 5378–5393
- Liang Q, Karnik N N, Mendel J M. Connection admission control in ATM networks using survey-based type-2 fuzzy systems. *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, 2000, **30**(3): 329–339
- Wu K C. Fuzzy interval control of mobile robots. *Computers and Electrical Engineering*, 1996, **22**(3): 211–229
- Yager R R. Fuzzy subsets of type II in decisions. *Cybernetics and Systems*, 1980, **10**(1–3): 137–159
- Mendel J M. Uncertainty, fuzzy logic, and signal processing. *Signal Processing*, 2000, **80**(6): 913–933
- Aguero J R, Vargas A. Calculating functions of interval type-2 fuzzy numbers for fault current analysis. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, **15**(1): 31–40
- Chen Wei, Sun Zeng-Qi. Research on of type-2 fuzzy logic systems and its application. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2005, **19**(1): 126–135
(陈薇, 孙增圻. 二型模糊系统研究与应用. 模糊系统与数学, 2005, **19**(1): 126–135)
- Mo H, Wang F Y, Xiao Z Q. Representation of type-2 fuzzy sets and their operations. In: Proceedings of the Chinese Intelligent Automation Conference. Nanjing, China: Jiangsu Electronic Video Press, 2009. 453–459
- Zhao Liang. Computing with Words Study and Linguistic Dynamic Systems Research Based on Interval Type-2 Fuzzy Sets Method [Ph. D. dissertation], Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, China, 2009
(赵亮. 基于区间二型模糊方法的词计算和语言动力学系统研究 [博士学位论文], 中国科学院自动化研究所, 中国, 2009)
- Mo Hong, Wang Fei-Yue, Zhao Liang. LDS trajectories under one-to-one mappings in interval type-2 fuzzy sets. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2010, **23**(2): 144–147
(莫红, 王飞跃, 赵亮. 一一映射下区间二型模糊集合的语言动力学轨迹. 模式识别与人工智能, 2010, **23**(2): 144–147)
- Li Cheng-Dong, Yi Jian-Qiang, Yu Yi, Zhao Dong-Bin. Inverse control of cable-driven parallel mechanism using type-2 fuzzy neural network. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 459–464
- Zhang Wei-Bin, Hu Huai-Zhong, Liu Wen-Jiang. Traffic forecast of type-2 fuzzy logic and multilayer fuzzy control for intersections community. *Systems Engineering — Theory and Practice*, 2008, **28**(7): 111–118
(张伟斌, 胡怀中, 刘文江. 路口群落交通流的区间二型模糊预测与多级模糊控制. 系统工程理论与实践, 2008, **28**(7): 111–118)
- Wang Fei-Yue. Computing with words and a framework for computational linguistic dynamic systems. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2001, **14**(4): 377–384
(王飞跃. 词计算和语言动力学系统的计算理论框架. 模式识别与人工智能, 2001, **14**(4): 377–384)

莫 红 长沙理工大学电气与信息工程学院副教授. 2004 年获中国科学院研究生院工学博士学位. 主要研究方向为语言动力系统与智能计算. 本文通信作者. E-mail: mohong72@gmail.com

(**MO Hong** Associate professor at the School of Electric and Information Engineering, Changsha University of Science and Technology. She received her Ph. D. degree from the Graduate University of Chinese Academy of Sciences in 2004. Her research interest covers linguistic dynamic systems and intelligent computing. Corresponding author of this paper.)

王飞跃 中国科学院自动化研究所研究员, IEEE Fellow, IFAC Fellow. 1990 年获美国伦塞利尔理工学院计算机与系统工程博士学位. 主要研究方向为智能控制, 社会计算和复杂系统的分析、控制和管理.

E-mail: feiyue.wang@mail.ia.ac.cn

(**WANG Fei-Yue** Professor at the Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. He received his Ph. D. degree in computer and systems engineering from Rensselaer Polytechnic Institute, USA in 1990. His research interest covers intelligent control, social computing, and control and management of complex systems.)

肖志权 武汉纺织大学机电工程学院副教授. 2004 年获中国科学院研究生院工学博士学位. 主要研究方向为柔性机器人手臂机电一体化设计和语言动力系统. E-mail: xzqpower@gmail.com

(**XIAO Zhi-Quan** Associate professor at the School of Electrical and Mechanical Engineering, Wuhan Textile University. He received his Ph. D. degree from the Graduate University of Chinese Academy of Sciences in 2004. His research interest covers mechatronic design flexible robot arms and linguistic dynamic systems.)

陈 茜 中国科学院自动化研究所博士研究生. 2008 年获云南大学硕士学位. 主要研究方向为语言动力系统. E-mail: ingeccq@gmail.com

(**CHEN Qian** Ph. D. candidate at the Institute of Automation, Chinese Academy of Science. She received her master degree from Yunnan University in 2008. Her research interest covers linguistic dynamic systems.)
