

## 齿隙非线性输入系统的迭代学习控制

朱 胜<sup>1</sup> 孙明轩<sup>1</sup> 何熊熊<sup>1</sup>

**摘 要** 针对一类具有输入齿隙特性的非线性系统, 提出一种实现有限作业区间轨迹跟踪的迭代学习控制方法. 在系统不确定项可参数化的情形下, 基于类 Lyapunov 方法设计迭代学习控制器, 回避了常规迭代学习控制中受控系统非线性特性需满足全局 Lipschitz 连续条件的要求. 对未知时变参数进行泰勒级数展开, 参数估计采用微分学习律, 并在控制器设计中, 采用双曲函数处理级数展开后的余项以及齿隙特性里的有界误差项, 以保证控制器可导, 且可抑制颤振. 引入一级数收敛序列确保系统输出完全跟踪期望轨迹, 且闭环系统所有信号有界.

**关键词** 迭代学习控制, 齿隙, 非线性时变系统, 有限区间

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2011.01014

### Iterative Learning Control of a Class of Nonlinear Systems with Input Backlash

ZHU Sheng<sup>1</sup> SUN Ming-Xuan<sup>1</sup> HE Xiong-Xiong<sup>1</sup>

**Abstract** In this paper, an iterative learning control method is presented for a class of time-varying nonlinear systems with input backlash. In the circumstance of parameterized nonlinear uncertainties, unknown time-varying parameters are expanded into Taylor series and differential learning mechanisms are used to handle non-global Lipschitz nonlinearities in system dynamics. In the controller design, hyperbolic tangent function is introduced to eliminate the influence of the remaining term and the bounded error term due to input backlash, and simultaneously to guarantee the differentiability of the controller and suppress the chattering. Through Lyapunov-like synthesis and with the aid of a convergent series, the complete tracking over a pre-specified time interval is achieved and boundedness of all the signals in the closed-loop system is ensured.

**Key words** Iterative learning control, backlash, time-varying nonlinear systems, finite interval

工业系统存在大量的非线性特性, 可分为连续非线性和不连续非线性或静态非线性和动态非线性. 不连续静态非线性如死区非线性<sup>[1]</sup> 和饱和非线性<sup>[2]</sup>; 不连续动态非线性如齿隙非线性<sup>[3]</sup> 和滞环非线性<sup>[4]</sup>. 齿隙非线性是由系统传动装置各运动部件之间存在的间隙引起的, 它的存在会导致系统不稳定, 在设计控制器时必须考虑补偿甚至彻底消除齿隙非线性的影响.

早在上世纪中期, 已有文献 [5] 报道了针对齿隙非线性特性系统的研究工作. 随着研究的不断深入, 描述齿隙非线性特性的数学模型在不断完善, 主要有迟滞模型<sup>[6]</sup>、死区模型<sup>[7]</sup>、刚性冲击模型<sup>[8]</sup> 和弹性冲击模型<sup>[9]</sup>. 对于输入含齿隙非线性的系统, 往往采用逆模型补偿法, 在系统输入端建立齿隙逆模型, 再对系统施加各类控制策略. 如自适应策略<sup>[6, 10]</sup>、模糊逻辑控制策略<sup>[11]</sup> 以及神经网络控制策略<sup>[12]</sup> 等.

迭代学习控制<sup>[13]</sup> 对含时变参数不确定性的系统具有较强的处理能力. 经典迭代学习控制<sup>[13-14]</sup> 基于压缩映射方法和不动点原理, 受控对象局限于局部 Lipschitz 连续的动力系统, 学习增益需通过求解范数不等式来得到, 与其他主流非线性控制方法不易结合. 近年来, 发展的基于 Lyapunov-like 方法的学习控制在很大程度上拓展了学习控制的适用范围. 对不连续非线性系统, 文献 [16] 针对死区输入非线性系统, 在死区输出不可测的情形下, 设计迭代学习控制器; 文献 [17] 设计双迭代学习控制环, 所针对的输入非线性可以是死区、饱和等静态非线性. 至今尚未出现针对系统含齿隙非线性特性的学习控制结果, 最根本的原因在于齿隙非线性特性是动态特性, 要求控制律是连续可导, 而差分形式的迭代学习算法无法给出控制器的导数值. 注意到文献 [15] 提出的自适应学习控制可得到控制器的导数值, 但缺点是不能直接用来处理时变参数. 文献 [18] 对时变参数进行 Taylor 级数展开, 设计自适应控制器. 文献 [19-20] 采用级数展开法处理时变参数, 并指出逼近误差会随迭代次数的增加而不断累加, 最终导致系统发散.

本文提出的关于输入具有齿隙非线性特性控制系统的迭代学习控制是基于类 Lyapunov 方法的. 通过对有限时间区间重复运行的时变非线性系统的设计与分析, 参数估计 (包括系统未知参数和间隙模型未知参数两部分) 采用微分学习律, 为处理时变参数不确定性, 应用泰勒级数展开技术进行常参数化处理, 对于不可参数化部分, 利用鲁棒技术进行界估计, 采用双曲函数替代符号函数, 界估计误差通过引入级数收敛序列予以彻底消除, 使得系统最终实现零误差收敛. 仿真例子验证了算法的有效性.

### 1 问题的描述

考虑一类单输入单输出不确定性系统:

$$\begin{aligned} x_i^k &= x_{i+1}^k, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n^k &= p^T(t)\xi(x_1^k, \dots, x_n^k) + u(v^k(t)) \\ y^k(t) &= x_1^k(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $t \in [0, T]$ ,  $k$  是迭代次数, 记  $\mathbf{X}^k(t) = [x_1^k(t), x_2^k(t), \dots, x_n^k(t)]^T \in \mathbf{R}^{n \times 1}$  是系统的状态向量;  $u(\cdot)$  是齿隙非线性特性;  $v^k(t)$  是系统输入;  $y^k \in \mathbf{R}^1$  是系统输出;  $\xi(x_1^k, \dots, x_n^k)$  是已知光滑函数;  $\mathbf{p}^T(t)$  是未知光滑函数向量.

**假设 1.** 未知时变参数向量  $\mathbf{p}(t)$  的每一个分量  $p_i(t)$ , 在  $[0, T]$  上存在直至  $l_i$  阶的连续导函数, 在  $(0, T)$  上存在  $(l_i + 1)$  阶连续导函数, 其中  $i = 1, \dots, n$ .

这里,  $l_i$  表示 Taylor 展开的项数. 根据 Taylor 定理, 满足假设 1, 可对未知时变函数向量  $\mathbf{p}(t)$  的每一个分量在  $t = 0$  处进行 Taylor 展开, 如下:

$$p_i(t) = \phi_i^T(t)\theta_i + \epsilon_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

其中,  $\phi_i(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_{l_i}(t)]^T$ ,  $\theta_i = [\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,l_i}]^T$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$$\varphi_j = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}, \quad j = 1, 2, \dots, l_i \quad (3)$$

$$\theta_{i,j} = p_i^{(j-1)}(0), \quad j = 1, 2, \dots, l_i \quad (4)$$

$$\epsilon_i = \int_0^t \frac{(t-s)^{l_i-1}}{(l_i-1)!} p_i^{(l_i)}(s) ds \quad (5)$$

收稿日期 2010-12-20 录用日期 2011-03-09  
Manuscript received December 20, 2010; accepted March 9, 2011  
国家自然科学基金 (60474005, 60774021, 60874041) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60474005, 60774021, 60874041)  
1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023  
1. Institute of Information and Control, College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023

令

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_n(t) \end{bmatrix} \in R^{n \times \sum_{i=1}^n l_i}$$

$\Theta = [\theta_1^T, \dots, \theta_n^T]^T$ ,  $\epsilon(t) = [\epsilon_1(t), \dots, \epsilon_n(t)]^T$ . 那么, 参数向量  $p(t)$  可写成

$$p(t) = \Phi^T(t)\Theta + \epsilon(t) \tag{6}$$

由于系统是在有限时间区间  $[0, T]$  上运行, 根据假设 1,  $p_i(t)$  的  $l_i$  次导数有界, 假设  $\sup_{t \in [0, T]} |p_i^{(l_i)}(t)| \leq c_i$ , 那么  $\epsilon_i$  有界, 且界为

$$|\epsilon_i(t)| \leq \frac{c_i T^{l_i}}{l_i!}, \quad t \in [0, T] \tag{7}$$

令  $\bar{\epsilon}$  为误差向量  $\epsilon(t)$  的界, 即:  $\|\epsilon(t)\| \leq \bar{\epsilon}$ . 由于时变参数  $p(t)$  是未知的, 所以  $\Theta$  是未知常数向量, 令  $\hat{\Theta}(t) = [\hat{\theta}_1^T(t), \dots, \hat{\theta}_n^T(t)]^T$  作为其估计, 设计估计律. 将式 (6) 代入式 (1),  $n$  阶系统重新描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^k &= x_{i+1}^k, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n^k &= \Theta^T \Phi \xi(x_1^k, \dots, x_n^k) + \epsilon^T \xi(x_1^k, \dots, x_n^k) + u(v^k(t)) \\ y^k(t) &= x_1^k(t) \end{aligned} \tag{8}$$

一种典型的齿隙数学模型如下:

$$\dot{v}(t) = \begin{cases} m\dot{v}, & e \dot{v}(t) \geq 0 \\ u(t) = m(v(t) - c_r), & \\ e \dot{v}(t) \leq 0 \\ u(t) = m(v(t) - c_l) \\ 0, & K \end{cases} \tag{9}$$

其中,  $m > 0$ ,  $c_l < c_r$  是未知常参数. 也可用微分方程描述齿隙模型, 如下

$$\frac{dv}{dt} = \alpha \left| \frac{dv}{dt} \right| (cv - u) + B \frac{dv}{dt} \tag{10}$$

其中,  $\alpha, c, B$  是未知常数, 满足  $c > 0$ ,  $c > B$ . 解此方程, 得:

$$u(t) = cv(t) + d(v) \tag{11}$$

其中,

$$\begin{aligned} d(v) &= [u_0 - cv_0]e^{-\alpha(v-v_0)\text{sgn}(\dot{v})} + e^{-\alpha v \text{sgn}(\dot{v})} + \\ &e^{-\alpha v \text{sgn}(\dot{v})} \int_{v_0}^v [B - c]e^{\alpha \tau \text{sgn}(\dot{v})} d\tau \end{aligned} \tag{12}$$

当  $\dot{v} > 0$  或  $\dot{v} < 0$  时, 对上式求极限, 分别有

$$\lim_{v \rightarrow \infty} d(v) = \lim_{v \rightarrow \infty} [u(v; v_0, u_0) - f(v)] = -\frac{c-B}{\alpha} \tag{13}$$

$$\lim_{v \rightarrow -\infty} d(v) = \lim_{v \rightarrow -\infty} [u(v; v_0, u_0) - f(v)] = \frac{c-B}{\alpha} \tag{14}$$

因此,  $d(v)$  是有界的, 定义其界为  $\bar{d}$ , 由于齿隙参数  $\alpha, c, B$  未知, 故  $\bar{d}$  未知.

本文的控制目标是针对系统 (1), 给定一致有界的期望轨迹  $y_d(t)$ , 在输入存在齿隙非线性特性的情形下, 设计控制律  $v^k(t)$ , 使输出  $y^k(t)$  在  $[0, T]$  上完全收敛于  $y_d(t)$ .

## 2 控制器设计

**定义 1.** 级数收敛序列  $\Delta^k$  定义为

$$\Delta^k = \frac{\delta}{k^\eta} \tag{15}$$

其中,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\delta$  和  $\eta$  是给定常参数, 要求  $\delta \geq 0 \in \mathbf{R}$ ,  $\eta \geq 2 \in \mathbf{N}$ .

**引理 1.** 对于给定序列  $\frac{1}{k^\eta}$ , 其中,  $k = 1, 2, \dots$ , 正整数  $\eta \geq 2$ , 下列不等式成立:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^\eta} \leq 2 \tag{16}$$

**证明.** 令  $s^k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^\eta}$ , 显然  $s^k \geq 1$  是递增的, 下面证明  $s^k$  具有上界. 事实上,

$$s^k \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} = 2 - \frac{1}{k} \leq 2 \tag{17}$$

于是得出结论式 (16). □

显然, 序列  $\Delta^k$  具有以下两条性质:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^k = 0 \tag{18}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \Delta^i < \infty \tag{19}$$

**假设 2.** 理想轨迹  $y_d(t)$  具有  $n-1$  阶导数.

定义误差  $e^k(t) = \mathbf{X}^k(t) - \mathbf{X}_d(t) = [e_1^k(t), e_2^k(t), \dots, e_n^k(t)]^T$ , 其中,  $\mathbf{X}_d(t) = [y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(n-1)}]^T$ , 记滤波误差  $e_s^k = [\Lambda^T \quad 1]e^k(t)$ , 其中参数向量  $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}]^T$ , 使得多项式  $H(p) = p^{n-1} + \lambda_{n-1}p^{n-2} + \dots + \lambda_1$  是 Hurwitz 的.

$$\begin{aligned} e_s^k &= a^k(t) + \Theta^T \Phi(t) \xi(x_1^k, \dots, x_n^k) + \\ &\epsilon^T(t) \xi(x_1^k, \dots, x_n^k) + cv^k(t) + d_1(t) \end{aligned} \tag{20}$$

其中,  $a^k(t) = [0 \quad \Lambda^T]e^k(t) - y_d^{(n-1)}$ .

定义  $\beta = \frac{1}{c}$ , 给出控制律:

$$v^k(t) = \chi^k(t) \hat{\beta}^k(t) \tag{21}$$

其中,  $\chi^k(t) = -a^k(t) - q_1 e_s^k - (\hat{\Theta}^k)^T \Phi(t) \xi(x_1^k, \dots, x_n^k) - \hat{d}^k \tanh(\frac{\hat{d}^k e_s^k}{\Delta^k}) - \bar{\epsilon} \xi^k \tanh(\frac{\bar{\epsilon} \xi^k e_s^k}{\Delta^k})$ ;  $\hat{\beta}^k$ ,  $\hat{\Theta}^k$  和  $\hat{d}^k$  分别作为  $\beta$ ,  $\Theta$  和  $\bar{d}$  的估计, 其自适应律如下:

$$\dot{\hat{\beta}}^k = -q_2 \chi^k e_s^k \tag{22}$$

$$\dot{\hat{d}}^k = -q_3 \Delta^k \hat{d}^k + q_3 |e_s^k| \tag{23}$$

$$\dot{\hat{\Theta}}^k = \Gamma_1 \Phi(t) \xi(x_1^k, \dots, x_n^k) e_s^k \tag{24}$$

其中,  $q_1, q_2, q_3, \Gamma_1$  是控制器参数,  $\Delta^k$  由定义 1 给出.

**假设 3.**  $\forall k, X^k(0) = X_d(0)$ ; 参数  $\hat{\Theta}^k(0) = \hat{\Theta}^{k-1}(T)$ ,  $\hat{\beta}^k(0) = \hat{\beta}^{k-1}(T)$ ,  $\hat{d}^k(0) = \hat{d}^{k-1}(T)$ .

### 3 稳定性和收敛性分析

**定理 1.** 针对系统 (1), 满足假设 1 ~ 3, 在控制器 (21) 以及参数自适应律 (22)~(24) 的作用下, 闭环系统内所有信号有界, 并且输出误差完全收敛于理想轨迹, 即  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_s^k(t) = 0 \quad (25)$$

**证明.** 首先定义如下类 Lyapunov 函数

$$V^k = \frac{1}{2c}(e_s^k)^2 + \frac{1}{2q_3c}(\tilde{d}^k)^2 + \frac{1}{2q_2}(\tilde{\beta}^k)^2 + \frac{1}{2c}(\tilde{\Theta}^k)^T \Gamma_1^{-1} \tilde{\Theta}^k \quad (26)$$

其中,  $\tilde{d}^k(t) = \bar{d} - \hat{d}^k(t)$ ,  $\tilde{\beta}^k(t) = \beta - \hat{\beta}^k(t)$ ,  $\tilde{\Theta}^k(t) = \Theta(t) - \hat{\Theta}^k(t)$ . 对上式第 1 项求导, 并将式 (20) 和控制律 (21) 代入, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} (e_s^k)^2 &= \beta e_s^k a^k(t) + e_s^k \chi^k \hat{\beta}^k + \beta e_s^k d_1(t) + \\ &\quad \beta e_s^k \Theta^T \Phi(t) \xi(x_1^k, \dots, x_n^k) + \\ &\quad \beta e_s^k \epsilon(t) \xi(x_1^k, \dots, x_n^k) \end{aligned} \quad (27)$$

对上式第 2 项求导, 并将自适应律 (23) 代入, 得

$$\frac{1}{2q_2} \frac{d}{dt} (\tilde{\beta}^k)^2 = \tilde{\beta}^k (-\dot{\hat{\beta}}^k) = \beta \chi^k e_s^k - \hat{\beta}^k \chi^k e_s^k \quad (28)$$

对上式第 3 项求导, 并将自适应律 (22) 代入, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2q_3c} \frac{d}{dt} (\tilde{d}^k)^2 &= -\beta \Delta^k (\hat{d}^k - \frac{1}{2} \bar{d})^2 + \frac{1}{4} \beta \Delta^k \bar{d}^2 - \\ &\quad \beta \tilde{d}^k |e_s^k| \end{aligned} \quad (29)$$

对上式第 4 项求导, 并将自适应律 (24) 代入, 得

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} ((\tilde{\Theta}^k)^T \Gamma_1^{-1} \tilde{\Theta}^k) = -\frac{1}{c} (\tilde{\Theta}^k)^T \Phi(t) \xi(x_1^k, \dots, x_n^k) e_s^k \quad (30)$$

将式 (27) 和 (28) 相加得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} (e_s^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\tilde{\beta}^k)^2 &\leq \\ &\quad -q_1 k \beta (e_s^k)^2 + \beta |e_s^k| (\bar{d} - |\hat{d}^k|) + 2\beta \delta \Delta^k + \\ &\quad \beta e_s^k \tilde{\Theta}^T \Phi(t) \xi(x_1^k, \dots, x_n^k) \end{aligned} \quad (31)$$

对式 (26) 求导, 并将式 (29) ~ (31) 代入, 化简得

$$\dot{V}^k \leq -q_1 k \beta (e_s^k)^2 + \gamma \Delta^k \quad (32)$$

其中,  $\gamma = 2\beta\delta + \frac{1}{4}\beta\bar{d}^2$ .

根据假设 3, 有  $(e_s^k(0))^2 = 0 \leq (e_s^k(T))^2$ , 由式 (32) 知

$$\begin{aligned} V^k(e_s^k(0), \hat{\beta}^k(T), \hat{\Theta}^k(T), \hat{d}^k(T)) &\leq \\ V^k(e_s^k(0), \hat{\beta}^k(0), \hat{\Theta}^k(0), \hat{d}^k(0)) &+ \int_0^T \dot{V}_n^k d\tau \leq \\ V^1(e_s^1(0), \hat{\beta}^1(0), \hat{\Theta}^1(0), \hat{d}^1(0)) &- \\ q_1 k \beta \sum_{i=1}^k \int_0^T (e_s^i)^2 d\tau + \gamma T \sum_{i=1}^k \Delta^i \end{aligned} \quad (33)$$

记  $V_0(k) = V^1(e_s^1(0), \hat{\beta}^1(0), \hat{\Theta}^1(0), \hat{d}^1(0)) + \gamma T \sum_{i=1}^k \Delta^i$ , 因此, 式 (33) 又可写成:

$$q_1 k \beta \sum_{i=1}^k \int_0^T (e_s^i)^2 d\tau \leq V_0(k) - V^k(e_s^k(0), \hat{\beta}^k(T), \hat{\Theta}^k(T), \hat{d}^k(T)) \quad (34)$$

由引理 1, 知  $\lim_{k \rightarrow \infty} V_0(k) = V^1 + 2\gamma q T$ , 所以  $V_0(k)$  有界, 又因为  $V^k(e_s^k(0), \hat{\beta}^k(T), \hat{\Theta}^k(T), \hat{d}^k(T)) > 0$ , 所以有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T (e_s^k)^2 d\tau = 0 \quad (35)$$

由式 (26) 知,  $\forall k$ , 有  $V^k(t) = V^k(0) + \int_0^t \dot{V}_n^k(\tau) d\tau$ , 将式 (32) 代入, 得

$$V^k(t) \leq V^k(0) - \int_0^t q_1 k \beta (e_s^k)^2 d\tau + \gamma t \Delta^k \quad (36)$$

由式 (35) 知  $\int_0^t q_1 k \beta (e_s^k)^2 d\tau$  有界, 由定义 1, 知  $\Delta^k$  有界, 而  $t \in [0, T]$ , 故  $\gamma t \Delta^k$  有界. 由假设 3 和式 (33) 知  $\forall k, V^k(e_s^k(0), \hat{\beta}^k(T), \hat{\Theta}^k(T), \hat{d}^k(T))$  有界, 故  $V^k(0, \hat{\beta}^k(0), \hat{\Theta}^k(0), \hat{d}^k(0)) = V^{k-1}(0, \hat{\beta}^{k-1}(T), \hat{\Theta}^{k-1}(T), \hat{d}^{k-1}(T))$  有界. 故  $\forall k, V^k(t)$  有界, 从而  $X^k$  有界,  $\hat{\beta}^k(t), \hat{\Theta}^k(t), \hat{d}^k(t)$  有界, 由式 (21) 知  $v^k(t)$  有界; 由式 (20) 知  $e_s^k$  有界, 所以  $e_s^k$  等度连续, 由此得到定理 1.  $\square$

### 4 仿真研究

针对输入带齿隙特性的非线性系统的迭代学习控制, 考虑如下二阶系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^k &= x_2^k \\ \dot{x}_2^k &= p(t)(x_1^k)^2 + u(v^k(t)) \\ y &= x_1^k \end{aligned} \quad (37)$$

其中,  $t \in [0, 1]$ ,  $p(t)$  是未知时变参数, 对其在  $t = 0$  处进行 Taylor 展开, 系统重新描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^k &= x_2^k \\ \dot{x}_2^k &= \Phi(t)^T \Theta (x_1^k)^2 + \epsilon(t)(x_1^k)^2 + u(v^k(t)) \\ y &= x_1^k \end{aligned} \quad (38)$$

其中,  $\Phi(t) = [1, t, t^2, t^3, t^4]^T$ ,  $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T$ . 假定  $p(t) = \sin(2\pi t)$ , 齿隙模型如式 (10), 其中  $c = 0.5, \alpha = 0.3, B = 0.2$ , 给定的理想轨迹为  $y_r = \frac{\pi}{6} \cos(2\pi t) + 0.5$ .

对上述系统施加控制律 (21) 和微分学习律 (22) ~ (24), 设定各个参数值以及状态初值和参数估计的初值如下:  $x_1^k(0) = \pi/6 + 0.5, x_2^k(0) = 0, \Theta(0) = [0, 0, 0, 0, 0]^T$ ;  $q_1 = 0.05, q_2 = 0.01, q_3 = 0.03, \Gamma_1 = \text{diag}\{0.01\}$ ; 取序列  $\Delta^k$  的参数  $\eta = 2, \frac{1}{\delta} = 0.03$ , 得到下面的结果: 图 1 用对数形式表示输出误差, 结果表明经过 25 次迭代, 收敛精度接近  $10^{-2.2}$ .

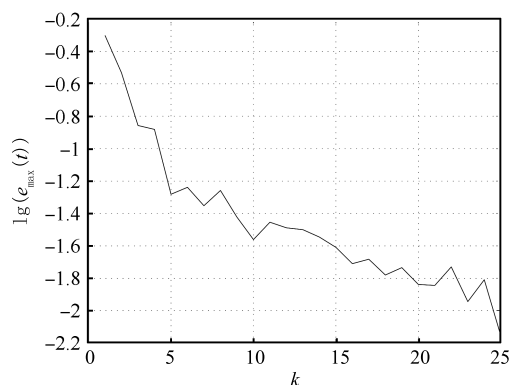


图1 输出误差

Fig. 1 Output error

## 5 结论

本文讨论了输入具有间隙非线性特性系统的学习控制问题. 设计基于 Lyapunov-like 方法的迭代学习控制器, 参数估计采用微分学习律以满足动态非线性环节对控制量求导的要求; 对时变参数采用泰勒级数展开进行常参数化处理, 采用鲁棒技术处理不可参数化部分, 为避免出现颤振, 采用双曲函数替代符号函数, 并引入一类特殊函数, 实现系统输出渐进跟踪期望轨迹.

## References

- 1 Tao G, Kokotovic P V. Adaptive control of plants with unknown dead-zone. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(1): 59–68
- 2 Pachter M, Miller R B. Manual flight control with saturating actuators. *IEEE Control Systems Magazine*, 1998, **18**(1): 10–20
- 3 Tao G, Kokotovic P V, Adaptive control of systems with backlash. *Automatica*, 1993, **29**(2): 323–335
- 4 Tao G, Kokotovic P V, Adaptive control of plants with unknown hysteresis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(2): 200–212
- 5 Tustin A. The effects of backlash and of speed-dependent friction on the stability of closed-cycle control systems. *Journal of the Institution of Electrical Engineers—Part IIA: Automatic Regulators and Servo Mechanisms*, 1947, **94**(1): 143–151
- 6 Grundelisu M, Angeli D. Adaptive control of systems with backlash acting on the input. In: Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control. Kobe, Japan: IEEE, 1996, 4689–4694
- 7 Tao G, Ma X, Ling Y. Optimal and nonlinear decoupling control of systems with sandwiched backlash. *Automatica*, 2001, **37**(2): 165–176
- 8 Mata-Jimenez M T, Brogliato B, Goswami A. On the control of mechanical systems with dynamic backlash. In: Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control. Washington D. C., USA: IEEE, 1997, 1990–1995
- 9 Gerdes J C, Kumar V. An impact model of mechanical backlash for control system analysis. In: Proceedings of American Control Conference. Seattle, USA: IEEE, 1995. 3311–3315
- 10 Tao G, Kokotovic P V. Continuous-time adaptive control of systems with unknown backlash. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(6): 1083–1087.

- 11 Jang J O, Lee P G, Park S B, Ahn I S. Backlash compensation of systems using fuzzy logic. In: Proceedings of the American Control Conference. Washington D. C., USA: IEEE, 2001. 4788–4789
- 12 Selmic R R, Lewis F L. Neural net backlash compensation with Hebbian tuning using dynamic inversion. *Automatica*, 2001, **37**(8): 1269–1277
- 13 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robotics by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, **1**(2): 123–140
- 14 Sun Ming-Xuan, Huang Bao-Jian. *Iterative Learning Control*. Beijing: National Defence Press, 1999 (孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制. 北京: 国防工业出版社, 1999)
- 15 French M, Rogers E. Nonlinear iterative learning by an adaptive Lyapunov technique. *International Journal of Control*, 2000, **73**(10): 840–850
- 16 Zhu Sheng, Sun Ming-Xuan. Iterative learning control of a class of nonlinear systems with unknown input dead-zone. *Control and Decision*, 2009, **24**(1): 96–100 (朱胜, 孙明轩. 具有未知死区输入非线性系统的迭代学习控制. 控制与决策, 2009, **24**(1): 96–100)
- 17 Tan Y, Xu J X. A note on iterative learning control for nonlinear systems with input uncertainties. In: Proceedings of the 17th World Congress of The International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea: IFAC, 2008. 12474–12479
- 18 Pagilla P R, Zhu Y. Adaptive control of mechanical systems with time-varying parameters and disturbances. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2004, **126**(3): 520–530
- 19 Zhu Sheng, Sun Ming-Xuan, He Xiong-Xiong. S-class functions based adaptive controller design for a class of periodically time-varying nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(8): 1137–1143 (朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 基于 S 类函数的严格反馈非线性周期系统的自适应控制. 自动化学报, 2010, **36**(8): 1137–1143)
- 20 Zhu Sheng, Sun Ming-Xuan, He Xiong-Xiong. Iterative learning control strict-feedback nonlinear time-varying systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 454–458 (朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 严格反馈非线性时变系统的迭代学习控制. 自动化学报, 2010, **36**(3): 454–458)

朱胜 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向是为非线性系统的学习控制. E-mail: zuseng@163.com

(ZHU Sheng Ph. D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His research interest covers learning control of nonlinear systems.)

孙明轩 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为学习控制. 本文通信作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn

(SUN Ming-Xuan Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control. Corresponding author of this paper.)

何熊熊 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为重复控制. E-mail: hxx@zjut.edu.cn

(HE Xiong-Xiong Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is repetitive control.)