

# 一种分数阶微积分算子的有理函数逼近方法

李文<sup>1</sup> 赵慧敏<sup>1</sup>

**摘要** 基于有理函数逼近理论, 提出了一种分数阶微积分算子  $s$  域最佳有理逼近函数的构造方法. 详细讨论了构造最佳有理逼近函数的思路、方法及具体算法. 运用最佳有理逼近定义及特征定理, 对所构造的分数阶微积分算子最佳有理逼近函数进行了验证. 其结果表明: 该分数阶微积分算子最佳有理逼近函数构造方法是有效的, 且对确定的逼近误差及逼近频带, 所构造的最佳有理逼近函数能够以最低阶次取得最佳逼近特性.

**关键词** 最佳有理逼近, 分数阶微积分算子, 有理函数构造, 算法验证

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2011.00999

## Rational Function Approximation for Fractional Order Differential and Integral Operators

LI Wen<sup>1</sup> ZHAO Hui-Min<sup>1</sup>

**Abstract** A method of constructing the best rational approximation function is proposed based on rational approximation theory for fractional order differential and integral operators in  $s$  domain. The idea, method, and algorithm of constructing the best rational approximation function are discussed in detail. The best rational approximation function constructed for fractional integral operator is tested and verified by using best rational approximation definition and characteristic theorem. The verification results show that the proposed method is efficient, and the best rational approximation function constructed can achieve the best approximation performance with the lowest order for a given approximation error and an interested frequency band.

**Key words** Best rational approximation, fractional order differential and integral operators, rational function constructing, algorithm verification

随着分数阶微积分被越来越多地应用到控制器、滤波器的设计与分析、图像处理与信号分析等领域<sup>[1-6]</sup>, 分数阶系统或算子模型的逼近方法研究受到了更多研究者的关注. 分数阶系统或算子模型通常分为连续模型和离散模型两类. 对于连续模型, 人们往往借助于估计、插值和曲线拟合等技术来研究分数阶模型的有理逼近问题; 对于离散模型, 可使用 Lubich 公式、Tustin 规则和连分式展开 (Continuous fractional expansion, CFE) 等方法, 在  $z$  域对微积分算子实现离散化<sup>[7]</sup>. 在讨论分数阶微积分器模拟与数字实现、分数阶动态系统数字逼近及多分数阶系统逼近等文献中, 主要研究了分数阶微积分算子的直接离散化及逼近问题<sup>[8-9]</sup>. 离散化是分数阶微积分算子数字实现的关键步骤, 它分为直接离散化与间接离散化两种方法. 所谓直接离散化方法是指直接通过幂级数或连分式展开实现频率  $s$  域到离散时间  $z$  域的变换, 直接离散化

的思想与方法, 都集中在对于一个分数阶微积分算子, 如何在  $z$  域中用一个有限阶次的函数去逼近它. 通常首先用生成函数  $\omega(z^{-1})$  将分数阶微积分算子  $s^{\pm\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ , 从  $s$  域转换到  $z$  域; 然后在  $z$  域用有限项函数来逼近这个分数阶微积分算子的离散时间传递函数. 目前常用的生成函数有 Euler, Tustin rule 和 Al-Alaoui 等类型, 经过生成函数把微积分算子变换到  $z$  域后, 可采用幂级数展开 (Power series expansion, PSE)、连分式展开等方法求得分数阶微积分算子的离散化逼近函数  $G(z^{-1})$ <sup>[10-11]</sup>. 近年来, 一些研究者着眼于如何提高离散化逼近函数的精度研究, 提出了基于有理契比雪夫逼近、Pade 逼近和基于双线性变换的分数阶微积分算子的离散化问题<sup>[10-13]</sup>, 取得了较好的逼近特性. 分数阶微积分算子间接离散化包括  $s$  域传递函数逼近与逼近传递函数离散化两个步骤<sup>[8, 14]</sup>. 文献 [10] 在讨论分数阶最优控制问题时, 运用 Oustaloup 逼近方法<sup>[14]</sup> 将分数阶微积分算子转换为状态空间中的可实现形式, 以便解决一类问题的求解. Santouh 等对多分数阶传递函数在频域  $s$  中的逼近问题进行了研究<sup>[15]</sup>, 其主要思想本质上是单分数阶惯性环节的函数逼近方法应用到多个分数阶惯性环节连乘系统的有理逼近中. 单分数阶惯性环节的函数逼近方法与

收稿日期 2010-07-16 录用日期 2011-03-22  
Manuscript received July 16, 2010; accepted March 22, 2011  
国家自然科学基金 (60870009) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60870009)

1. 大连交通大学软件学院 大连 116028  
1. Software Institute, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028

Oustaloup 方法特别接近, 是一种基于函数逼近的方法. 该方法实际上是建立在控制理论基础之上的, 在  $s$  域中对传递函数的幅频特性曲线进行拟合, 以获取逼近传递函数. 它具有简单直观的特点, 并可直接根据参数计算公式来确定逼近传递函数.

目前, 在  $s$  域中通过特性曲线拟合或有理函数逼近方法来实现分数阶微积分算子逼近的研究中, 对所获得的逼近传递函数是否是最佳有理逼近函数的讨论很少. 如果在  $s$  域中, 我们得到逼近传递函数是一个最佳有理逼近函数, 则可以在不增加逼近函数阶次的前提下, 进一步提高逼近精度. 为此, 本文在  $s$  域中提出一种方便、实用、逼近特性更好的分数阶微积分算子最佳有理逼近函数的构造方法, 使其所获得的有理逼近函数是最佳的, 即在同一个有理函数类中, 其逼近效果最好. 在以下各节中, 将对最佳有理逼近函数的构造思路、方法及算法进行详细讨论, 并以一种分数阶积分算子为例, 给出了最佳有理逼近函数的构造过程以及验证方法. 结果表明, 本文所提出的方法是有效的.

## 1 最佳有理逼近函数的构造思路

### 1.1 最佳有理逼近的几个概念

本文所讨论的逼近是针对所有定义在  $[a, b]$  上的有理函数所构成的子集, 在范数  $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$  意义下, 对于给定函数  $f \in \mathbf{C}_{[a,b]}$  的最佳逼近.

文中符号说明:

对于分母为  $n$  阶、分子为  $m$  阶的有理函数用  $R_{mn}(x) = p_m(x)/q_n(x)$  表示; 由形如  $R_{mn}(x)$  的函数所构成的集合用  $R_{mn}[a, b]$  表示, 通常称为有理函数类, 是空间  $\mathbf{C}_{[a,b]}$  的一个子集.

**定义 1 (最佳逼近)**<sup>[16]</sup>. 设函数  $f \in \mathbf{C}_{[a,b]}$ ,  $f \notin R_{mn}[a, b]$ , 则集合  $R_{mn}[a, b]$  对于  $f$  的最佳逼近可用量

$$\Delta(f; R_{mn}[a, b]) = \inf_{R_{mn} \in R_{mn}[a, b]} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - R_{mn}(x)| = \inf_{R_{mn} \in R_{mn}[a, b]} \|f(x) - R_{mn}(x)\|$$

来定义. 又称

$$E(R_{mn}) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - R_{mn}(x)|$$

为  $R_{mn}(x)$  对于  $f(x)$  的偏差. 若有函数

$$R_{mn}^*(x) \in R_{mn}[a, b]$$

使得

$$E(R_{mn}^*) = \Delta(f; R_{mn}[a, b])$$

成立, 则称该函数  $R_{mn}^*(x) \in R_{mn}[a, b]$  为  $f$  的最佳有理逼近函数, 而量  $\Delta(f; R_{mn}[a, b])$  为最佳有理逼近值.

**引理 1 (存在性)**<sup>[16]</sup>. 对任意给定的函数  $f \in \mathbf{C}_{[a,b]}$ ,  $f \notin R_{mn}[a, b]$ , 子集  $R_{mn}[a, b]$  中至少存在一个有理函数  $R_{mn}^*(x) \in R_{mn}[a, b]$ , 使下面的等式

$$E(R_{mn}^*) = \Delta(f; R_{mn}[a, b])$$

成立.

定义 1 与引理 1 表明, 关于分数阶微积分算子  $f = s^{\pm\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , 在  $s$  域中存在最佳有理逼近函数.

**引理 2 (特征定理)**<sup>[16]</sup>. 对任意给定的函数  $f \in \mathbf{C}_{[a,b]}$ , 使子集  $R_{mn}[a, b]$  中的有理函数

$$R(x) = \frac{p_0 x^{m-\mu} + p_1 x^{m-\mu-1} + \cdots + p_{m-\mu}}{q_0 x^{n-\nu} + q_1 x^{n-\nu-1} + \cdots + q_{n-\nu}} = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$$

$$q_0 \neq 0, \quad 0 \leq \mu \leq m, \quad 0 \leq \nu \leq n$$

成为  $f$  的最佳有理逼近函数的充分必要条件是, 使误差函数  $f(x) - R(x)$  在区间  $[a, b]$  上至少存在  $N \geq m + n - d + 2$  个  $(e)$  点, 而且  $(e)$  正、负点依次相间出现, 其中  $d = \min(\mu, \nu)$ .

### 1.2 构造思路

最佳有理逼近函数构造方法的提出基于如下三点考虑:

1) 引理 1 保证了在  $s$  域分数阶微积分算子最佳有理逼近函数的存在性, 定义 1 为构造这个最佳有理逼近函数提供了方法.

2) 从控制理论观点出发, 所构造的最佳有理逼近函数就是传递函数. 为此, 我们可以将构造方法建立在最小相位系统及对数幅频特性渐近线概念基础上. 这样可以保证所构造的有理逼近函数其相频特性与幅频特性具有一致性, 故在构造方法中不必考虑相频特性的构造问题.

3) 因为在同等计算量的前提下, 一个分子分母同阶或阶次很接近的有理函数给出的逼近结果远优于多项式逼近方法给出的结果<sup>[17]</sup>, 所以对于分数阶微积分算子  $s^{\pm\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , 在构造有理逼近函数 (即传递函数) 时, 采用  $m$  个单负实零点和  $n$  个单负实极点构成, 且  $n - m = \{0, 1\}$ , 这样可以取得更好的分数阶微积分算子逼近特性.

## 2 有理逼近函数的构造

### 2.1 问题描述

本节以分数阶积分算子  $s^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  为例来讨论其有理逼近函数的构造方法, 并运用控制理论中绘制对数幅频特性渐近线的思想来说明具体的构

造步骤; 对于分数阶微分算子  $s^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , 其构造思想与方法类似, 在此不再具体讨论.

设被逼近的分数阶传递函数由分数阶积分算子和比例系数构成, 用

$$G_0(s) = \frac{k_0}{s^\alpha}, \quad k_0 = \omega_c^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

表示, 当  $k_0 = 1$  时, 则  $G_0(s)$  为一个纯分数阶积分算子. 又设所关心的逼近频带为  $[\omega_a, \omega_b]$ , 且  $\omega_a < \omega_c < \omega_b$ ,  $\omega_c$  为  $G_0(s)$  对数幅频特性的穿越频率.

首先, 根据 Bode 图绘制方法, 画出式 (1) 所对应的对数幅频特性曲线, 如图 1 中  $L_0$  所示; 然后, 根据给定的逼近幅频特性的允许最大误差  $\varepsilon$  (dB) 做两条与  $L_0$  平行的辅助线  $L_1$  和  $L_2$ , 其两线到  $L_0$  之间的幅值差均为  $\varepsilon$  (dB), 这两条辅助线分别对应如下的传递函数:

$$G_1(s) = \frac{k_1}{s^\alpha} \quad (2)$$

$$G_2(s) = \frac{k_2}{s^\alpha} \quad (3)$$

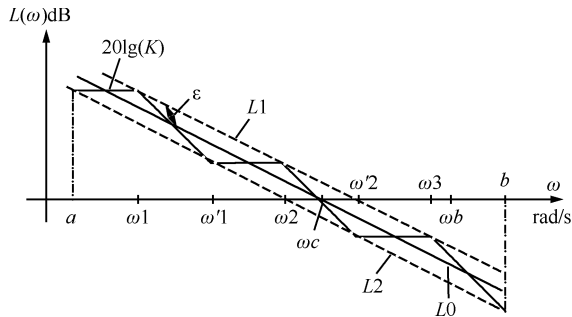


图 1 对数幅频特性曲线及渐近线

Fig. 1 Logarithmic amplitude-frequency characteristic curve and the asymptote

对式 (1)~(3), 令  $s = j\omega$  可得到三条斜率均为  $-20\alpha$  dB/dec 的对数幅频特性曲线, 其表达式如下:

$$L_0(\omega) = 20 \lg k_0 - 20 \lg \omega^\alpha \quad (4)$$

$$L_1(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega^\alpha \quad (5)$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg k_2 - 20 \lg \omega^\alpha \quad (6)$$

根据式 (4)~(6), 可求得

$$k_1 = k_0 \times 10^{\frac{\varepsilon}{20}} \quad (7)$$

$$k_2 = \frac{k_0}{10^{\frac{\varepsilon}{20}}} \quad (8)$$

根据构造最佳有理逼近函数的基本思路可知, 本文所构造的有理逼近函数其零极点均为单负实

零、极点, 即有理逼近函数是由一阶超前和滞后环节构成. 若被逼近函数形如式 (1), 则逼近函数的第一个环节 (对应最小转折频率  $\omega_1$ ) 选择一阶滞后环节. 当  $\omega_1$  确定后, 实际上就确定了一个有理逼近函数. 此时, 只要在辅助线  $L_1$  和  $L_2$  之间, 用斜率为  $-20$  dB/dec 和  $0$  dB/dec 组合的折线来逼近斜率为  $-20\alpha$  dB/dec 的直线  $L_0$ , 如图 1 中所示. 根据所构造的幅频特性渐进线可以很方便地写出对应的传递函数, 即为所求的有理逼近函数. 图 1 中所示区间  $[a, b]$  称为逼近区间, 它包含  $[\omega_a, \omega_b]$ .

由上可知, 所求的有理逼近函数与被逼近函数的分数阶次  $\alpha$ 、给定的最大逼近误差  $\varepsilon$ 、对数幅频特性渐进线的第一个转折频率  $\omega_1$  以及逼近区间  $[a, b]$  有关, 即所求有理逼近函数可表示如下:

$$R(s) = F(\alpha, \varepsilon, \omega_1, a, b) \quad (9)$$

因为式 (1) 函数满足  $G_0(s) \in \mathbf{C}_{[a,b]}$ ,  $G_0(s) \notin R_{mn}[a, b]$ , 根据最佳有理逼近函数的定义, 则要构造的最佳有理逼近函数问题可描述如下:

对于式 (9) 当参数  $\alpha$ 、 $\varepsilon$  和  $[a, b]$  确定后, 通过选择不同的转折频率  $\omega_1$ , 可以得到一个有理函数类  $R_{mn}^*[a, b]$ . 若有理函数

$$R_{mn}^*(s) \in R_{mn}[a, b]$$

使得

$$E(R_{mn}^*) = \Delta(G_0(s); R_{mn}[a, b])$$

成立, 则有理函数

$$R_{mn}^*(s) \in R_{mn}[a, b]$$

为式 (1) 函数  $G_0(s)$  的最佳有理逼近.

由式 (9) 直接求解  $R_{mn}^*(s)$  比较复杂, 下面采用数值求解的方法给出最佳有理逼近函数的构造步骤.

### 2.2 最佳有理逼近函数的构造步骤

根据上一节对构造最佳有理逼近函数的问题描述, 可以得到具体构造步骤如下:

**步骤 1.** 选择第一个转折频率  $\omega_1$ .

**步骤 2.** 从  $L_1$  上的第一个转折频率  $\omega_1$  对应点开始, 做斜率为  $-20$  dB/dec 直线线段, 该线段可表示为  $h_1/s$ , 它与辅助线  $L_2$  相交, 其交点频率为  $\omega_1'$ . 对频率  $\omega_1$  有

$$20 \lg h_1 - 20 \lg \omega_1 = L_1(\omega_1) \quad (10)$$

由式 (10) 可得  $h_1 = k_1 \omega_1^{1-\alpha}$ ; 对频率  $\omega_1'$  有

$$20 \lg h_1 - 20 \lg \omega_1' = L_2(\omega_1') \quad (11)$$

由式 (11) 可得  $\omega_1' = \left(\frac{h_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ .

**步骤 3.** 在辅助线  $L_2$  上, 从与频率  $\omega'_1$  对应点开始做水平线段至辅助线  $L_1$ , 其交点处对应频率为  $\omega_2$ . 对于  $\omega_2$  点有

$$L_1(\omega_2) = L_2(\omega'_1) \quad (12)$$

由式 (12) 可得  $\omega_2 = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \omega'_1$ .

这样所求得的频率  $\omega'_1$  和  $\omega_2$  即为第 1 个一阶超前和第 2 个一阶滞后环节对应的转折频率.

重复上述步骤, 可分别得出第  $i$  个一阶超前环节的转折频率  $\omega'_i$  和第  $i+1$  个一阶滞后环节的转折频率  $\omega_{i+1}$ . 递推公式如下:

$$\omega'_i = \left(\frac{h_i}{k_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (13)$$

$$\omega_{i+1} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \omega'_i \quad (14)$$

其中

$$h_i = k_1 \omega_i^{1-\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (15)$$

**步骤 4.** 每次求得  $\omega'_i$  和  $\omega_{i+1}$  后要判别其是否大于  $\omega_b$ , 若远大于  $\omega_b$ , 则去掉该转折点, 并停止循环.

**步骤 5.** 求对应有理逼近函数的最大误差  $E(R_{mn}) = \max_{\omega_a \leq \omega \leq \omega_b} |G_0(s) - R_{mn}(s)|, s = j\omega$ .

**步骤 6.** 若需继续求新的有理逼近函数, 则转步骤 1.

**步骤 7.** 求  $E(R_{mn}^*) = \Delta(G_0(s); R_{mn}[a, b]), s = j\omega$ , 结束.

最后得到所构造的形如式 (1) 的分数环节的 最佳有理逼近函数如下:

$$R_{mn}^*(s) = K \frac{\left(\frac{s}{\omega'_1} + 1\right) \cdots \left(\frac{s}{\omega'_m} + 1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right) \cdots \left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)} \quad (16)$$

其中,  $K = k_1/\omega_1^\alpha$ , 式 (16) 又可写成有理分式的一般表达形式

$$R_{mn}^*(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + 1} \quad (17)$$

其中,  $n - m = \{0, 1\}$ .

### 2.3 算法有效性验证

在给出算法有效性验证之前, 首先讨论算法中第一个转折频率  $\omega_1$  的选择问题. 设逼近频带为  $[\omega_a, \omega_b] = [1, 1000]$ , 取逼近区间为  $[a, b] = [0.5, 4000]$ . 当选择  $\omega_a/\omega_1$  分别为 1.3, 1.2, 1.1, 1.0, 0.9, 0.8, 0.7 时, 得到 7 个不同起始频率  $\omega_1$ . 设允许的最大误差

$\varepsilon = 4$  dB, 按前述 7 个步骤, 经 Matlab 编程来构造分数阶积分算子  $f = \frac{1}{s^{0.5}}$  的有理逼近函数, 并根据定义 1 计算最大幅值误差和最大相位误差的绝对值. 表 1 给出了 7 个不同起始频率对应的有理逼近函数幅频和相频特性的最大误差以及分子分母的阶次. 从表 1 可知, 7 个有理逼近函数分子阶次为 2, 分母阶次为 3, 这 7 个有理逼近函数构成了一个集合  $R_{23}[a, b]$ . 从表 1 可看出, 当第一个转折频率在  $\omega_a$  附近时, 所构造的有理逼近函数其最大幅值误差和最大相位误差较小. 第一个转折频率  $\omega_1$  的选择以及逼近区间  $[a, b]$  的选择对最大幅值误差和最大相位误差将产生不同的影响.

表 1 有理逼近函数相关参数  
Table 1 Parameters related with rational approximation function

序号 No.	第一个 转折频率 ( $\omega_1$ )	最大幅值 误差绝对值 (dB)	最大相位 误差绝对值 (deg)	分子分母 阶次 ( $m/n$ )
1	0.7692	1.5188	30.370	2/3
2	0.8333	1.2336	29.242	2/3
3	0.9091	1.1975	27.936	2/3
4	1.0	1.2022	26.406	2/3
5	1.1111	1.1937	24.597	2/3
6	1.25	1.2025	26.288	2/3
7	1.4286	1.2016	28.413	2/3

对于所提出的算法从两个方面进行其有效性验证.

1) 直接根据定义 1, 找出一个  $R_{23}^*(s) \in R_{23}[a, b]$ , 使得  $E(R_{23}^*) = \Delta(f; R_{23}[a, b])$  成立, 则函数  $R_{23}^*(s) \in R_{23}[a, b]$  为  $f$  的最佳有理逼近函数, 其所对应的误差值  $\Delta(f; R_{23}[a, b])$  为最佳有理逼近值. 图 2 和图 3 给出了有理逼近函数集合  $R_{23}[a, b]$  中各函数与被逼近函数在逼近区间  $[a, b]$  上的最大幅值误差和最大相位误差曲线, 图中横坐标数字对应于表 1 中的序号. 从曲线可看出序号为 5 所对应的有理逼近函数是集合  $R_{23}[a, b]$  中的最佳有理逼近函数, 用  $R_{23(5)}^*(s) \in R_{23}[a, b]$  表示, 其第一个转折频率  $\omega_1 = 1.1111$  rad/s,  $R_{23(5)}^*(s)$  具体表达式如下:

$$R_{23(5)}^*(s) = \frac{66.51s^2 + 19030s + 130100}{s^3 + 1806s^2 + 79900s + 86550} = \frac{66.51(s + 7.01)(s + 279.10)}{(s + 1.11)(s + 44.23)(s + 1761.00)} \quad (18)$$

2) 根据引理 2 给出的最佳有理逼近函数充要条

件来验证, 即在逼近区间  $[a, b]$  上使误差函数  $f(s) - R(s)$  至少存在  $N \geq m + n - d + 2$  个  $(e)$  点, 而且  $(e)$  正、负点依次相间出现. 由于有理逼近函数的构造是基于幅频特性而言的, 因此我们只需验证  $R_{23(5)}^*(s)$  的幅频特性误差曲线是否满足特征定理. 从图 4 中的幅值误差曲线可看出, 当选择逼近区间  $[a, b] = [0.5, 4000]$  时, 幅频特性误差变号次数  $N = 7$ , 满足  $N \geq m + n - d + 2 = 2 + 3 - 0 + 2 = 7$ . 在图 4 和图 5 的幅值曲线和相位曲线中, 粗实线表示理想曲线, 细实线表示有理逼近函数  $R_{23(5)}^*(s)$  对应的曲线. 从图 4 和图 5 中还可看出, 在逼近频带  $[\omega_a, \omega_b] = [1, 1000]$  里, 特性曲线的误差均小于其最大误差, 尤其是相频特性. 计算可得幅频特性绝对误差最大值和平均值分别为 1.1397 dB 和 0.72689 dB; 相频特性绝对误差最大值和平均值分别为  $24.597^\circ$  和  $6.8445^\circ$ .

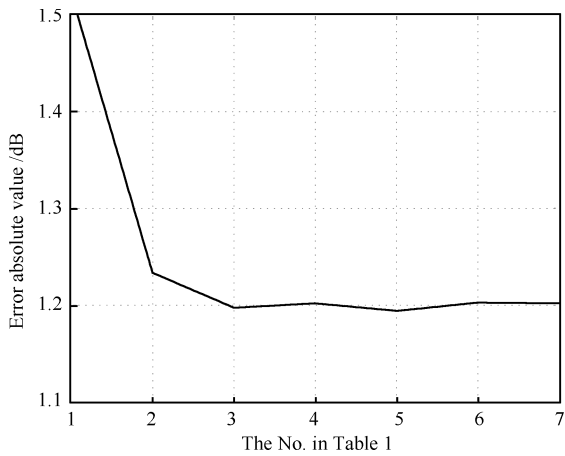


图 2 各有理逼近函数最大幅值误差曲线

Fig. 2 The maximum amplitude error curve of rational approximation functions

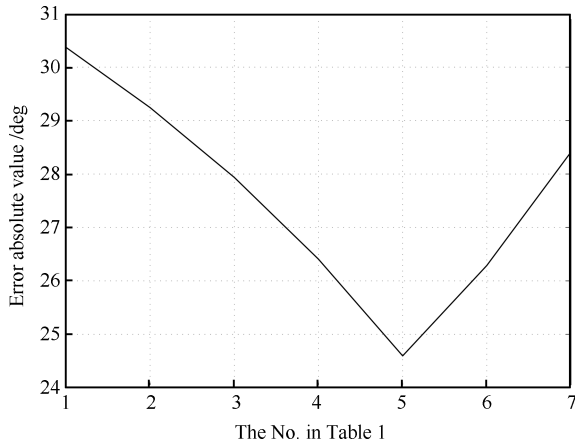


图 3 各有理逼近函数最大相位误差曲线

Fig. 3 The maximum phase error curve of rational approximation functions

以上从定义 1 和引理 2 均验证了所求有理逼近函数  $R_{23(5)}^*(s)$  是最佳有理逼近函数, 下面通过一个实例来进一步验证本算法.

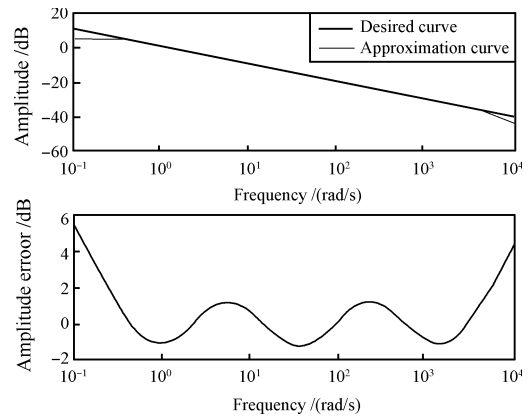


图 4 最佳有理逼近函数幅频特性及误差曲线

Fig. 4 Amplitude frequency characteristic and the error curves of the best rational approximation function

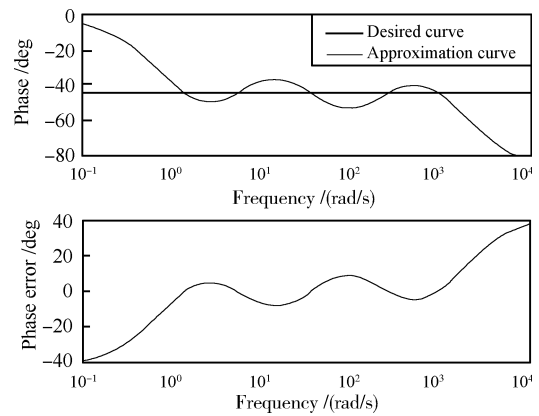


图 5 最佳有理逼近函数相频特性及误差曲线

Fig. 5 Phase frequency characteristic and the error curves of the best rational approximation function

设双惯性电机驱动系统在忽略阻尼情况下的模型<sup>[18]</sup>为

$$G_p(s) = \frac{s^2 + \omega_d^2}{J_M s(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{s^2 + 226.57^2}{0.004s(s^2 + 317.55^2)} \quad (19)$$

其中,  $\omega_0 = 317.55$  为系统的振动频率,  $\omega_d = 226.57$  为反振动频率,  $J_M = 0.004 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  为驱动侧等效惯量. 对应的幅频特性与相频特性为

$$|G_p(j\omega)| = \left| \frac{\omega_d^2 - \omega^2}{\omega J_M (\omega_0^2 - \omega^2)} \right| \quad (20)$$

$$\angle G_p(j\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega < \omega_d \\ +\frac{\pi}{2}, & \omega_d < \omega < \omega_0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (21)$$

式 (1) 给出的被逼近函数  $G_0(s)$  是一个分数阶积分器, 而式 (18) 是这个分数阶积分器的一个最佳有理逼近. 将  $G_0(s)$  和  $R_{23(5)}^*(s)$  分别与  $G_p(s)$  串联, 则可得到其逼近前、后系统的开环传递函数如下:

$$G_{\text{before}}(s) = G_0(s)G_p(s) = \frac{1}{s^{0.5}} \times \frac{s^2 + 226.57^2}{0.004s(s^2 + 317.55^2)} \quad (22)$$

$$G_{\text{after}}(s) = R_{23(5)}^*(s)G_p(s) = \frac{66.51(s + 7.01)(s + 279.1)}{(s + 1.11)(s + 44.22)(s + 1761)} \times \frac{s^2 + 226.57^2}{0.004s(s^2 + 317.55^2)} \quad (23)$$

图 6 给出了式 (22) 和式 (23) 所对应的 Bode 图, 由图或通过计算可知逼近前、后开环系统的幅值穿越频率  $\omega_c$  均为 24 rad/s, 对应的相位裕量分别为  $45^\circ$  和  $51.5^\circ$ . 通过对实例系统逼近前、后的开环频率特性比较, 进一步验证了文中所提出的分数阶微积分算子最佳有理逼近函数构造方法的有效性.

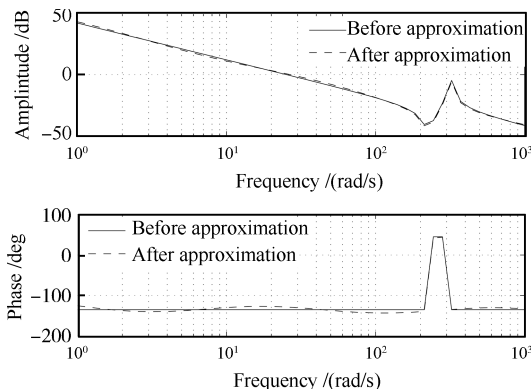


图 6 逼近前后系统特性比较

Fig. 6 Characteristic comparison before and after the system approximation

### 3 结论

本文以最佳有理逼近理论为基础, 在频率  $s$  域中讨论了分数阶微积分算子最佳有理逼近函数的构造问题, 基于控制理论对数幅频特性渐近线思想, 给出了最佳有理逼近函数的构造算法. 对所求得的最

佳有理逼近函数从定义与特征定理两个方面进行了验证. 通过分析和最佳逼近特性检验表明, 本文所提出的分数阶有理逼近函数构造方法是有效的, 且应用起来简便、直观. 该方法可保证在给定最大逼近误差  $\varepsilon$  及实际逼近频带  $[\omega_a, \omega_b]$  内, 所构造的有理逼近函数是阶次最低、误差最小的最佳有理逼近函数. 由于该方法是以最佳有理逼近理论为基础的, 故在理论上保证了所构造的有理逼近函数的逼近精度; 实际上所构造的有理逼近函数是分数阶微积分算子的一个等价传递函数, 且由一阶环节所组成, 所以用该方法构造的有理逼近函数不但具有模拟实现简单、可行的特点, 而且可采用线性控制理论中的相关分析方法对其进行分析.

综上, 本文所提出的分数阶微积分算子有理函数逼近方法可以方便、有效地应用到分数阶控制器的设计、分析与实现中. 同时, 随着分数阶控制器在实际中被逐步采用, 该方法也会得到进一步的运用与完善.

### References

- Gao Chao-Bang, Zhou Ji-Liu. Image enhancement based on quaternion fractional directional differentiation. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(2): 150–159 (高朝邦, 周激流. 基于四元数分数阶方向微分的图像增强. *自动化学报*, 2011, **37**(2): 150–159)
- Li Yuan-Lu, Yu Sheng-Lin. Identification of non-integer order systems in frequency domain. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(8): 882–884 (李远禄, 于盛林. 非整数阶系统的频域辨识法. *自动化学报*, 2007, **33**(8): 882–884)
- Ghanbari M, Haeri M. Order and pole locator estimation in fractional order systems using bode diagram. *Signal Processing*, 2011, **91**(2): 191–202
- Pu Yi-Fei, Wang Wei-Xing. Fractional differential masks of digital image and their numerical implementation algorithms. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(11): 1128–1135 (蒲亦非, 王卫星. 数字图像的分数阶微分掩膜及数值运算规则. *自动化学报*, 2007, **33**(11): 1128–1135)
- Ozdemir N, Iskender B B. Fractional order control of fractional diffusion systems subject to input hysteresis. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2010, **5**(2): 1–5
- Zhao Hui-Min, Li Wen, Deng Wu. Approximation degree selection for one kind of fractional-order filter. *Electric Machines and Control*, 2010, **14**(1): 90–94 (赵慧敏, 李文, 邓武. 一类分数阶滤波器逼近阶次的选择. *电机与控制学报*, 2010, **14**(1): 90–94)
- Vinagre B M, Podlubny I, Hernandez A, Feliu V. Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2000, **3**(3): 231–248
- Shaher M, Omar K J, Rabha I. Numerical approximations of a dynamic system containing fractional derivatives. *Journal of Applied Sciences*, 2008, **8**(6): 1079–1084

- 9 Muslim M, Conca C, Nandakumaran A K. Approximation of solutions to fractional integral equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, **59**(3): 1236–1244
- 10 Hamdaoui K, Charef A. A new discretization method for fractional order differentiators via the bilinear transformation. In: Proceedings of the 15th International Conference on Digital Signal Processing. Cardiff, UK: IEEE, 2007. 280–283
- 11 Tricaud C, Chen Y Q. An approximate method for numerically solving fractional order optimal control problems of general form. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, **59**(5): 1644–1655
- 12 Tavakoli-Kakhki M, Haeri M. Model reduction in commensurate fractional-order linear systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2009, **223**(4): 493–505
- 13 Madrid A P D, Manoso C, Hernandez R. New direct discretization of the fractional-order differentiator/integrator by the Chebyshev-Pade approximation. In: Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications. Porto, Portugal: Curran Associates, 2006. 166–170
- 14 Oustaloup A, Levron F, Nanot F, Mathieu B, Nanot F M. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2000, **47**(1): 25–39
- 15 Santouh Z, Charef A, Assabaa M. Approximation of multiple fractional order systems. *Arab Research Institute in Sciences and Engineering*, 2007, **3**(4): 155–161
- 16 Wang De-Ren, Yang Zhong-Hua. *Numerical Approximation Introduction*. Beijing: Higher Education Press, 1990. 150–157
- (王德人, 杨忠华. 数值逼近引论. 北京: 高等教育出版社, 1990. 150–157)
- 17 Burden R L, Douglas Faires J. *Numerical Analysis (Seventh Edition)*. Belmont: Thomson Learning, 2001. 512–522
- 18 Li W, Hori Y. Vibration suppression using single neuron-based PI fuzzy controller and fractional-order disturbance observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2007, **54**(1): 117–126



**李文** 大连交通大学软件学院教授。主要研究方向为智能控制, 智能计算, 分数阶控制及在工业控制领域中的应用。本文通信作者。

E-mail: lw6017@vip.sina.com

(**LI Wen** Professor at the Software Institute, Dalian Jiaotong University.

Her research interest covers intelligent control, intelligent calculation, and fractional order control and their applications in industrial field. Corresponding author of this paper.)



**赵慧敏** 大连交通大学软件学院讲师, 博士研究生。主要研究方向为分数阶控制和感应电机振动频谱分析。

E-mail: hm.zhao1977@126.com

(**ZHAO Hui-Min** Lecturer, Ph.D. candidate at the Software Institute, Dalian Jiaotong University, Her research interest covers fractional order

control and the vibration frequency spectrum analysis of induction machine.)