第 37 卷 第 8 期 自 动 化 学 报 Vol. 37, No. 8
2011 年 8 月 ACTA AUTOMATICA SINICA August, 2011

基于灰色关联分析和 D-S 证据理论的区间直觉模糊决策方法

李 鹏 [1] 刘思峰 [1]

摘 要 针对方案的指标值为区间直觉模糊数的决策问题, 提出了一种基于灰色关联分析和 D-S 证据理论的决策方法. 定义了区间记分函数和区间数点算子, 并通过其将区间直觉模糊数转化为记分函数; 利用记分函数以及灰色关联方法确定各指标的不确信度, 进而构建出不同指标下各方案的 Mass 函数, 通过 D-S 合成法则进行信息融合, 确定最优方案. 最后, 通过算例表明, 本文提出的方法可得到满意结果并显著降低决策的不确定性.

关键词 区间直觉模糊数, D-S 证据理论, 数据融合, 决策, 灰色关联分析

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.00993

Interval-valued Intuitionistic Fuzzy Numbers Decision-making Method Based on Grey Incidence Analysis and D-S Theory of Evidence

LI Peng[1] LIU Si-Feng[1]

Abstract A method based on grey incidence analysis and D-S theory of evidence is proposed for decision-making problems with the attribute values of corresponding alternatives in the form of interval-valued intuitionistic fuzzy numbers. The uncertain degrees of different indices are determined by using the grey incidence analysis. First, the concept of interval-valued score function and interval number point operators are introduced, and the interval-valued intuitionistic fuzzy numbers are transformed into score function by them. The uncertain degrees of different indices are determined by using the grey incidence analysis and score functions, and the mass functions of different alternatives in different indices are obtained by the uncertain degrees and score functions. Information can be fused in accordance with the D-S combination rule and the best alternative is got by using the method. Finally, a numerical example is utilized to illustrate that a satisfying conclusion can be obtained and an obvious decrease can be observed in the uncertainty of decision making.

Key words Interval-valued intuitionistic fuzzy numbers, D-S theory of evidence, data fusion, decision-making, grey incidence analysis

由于现实决策问题的复杂性和不确定性, 往往无法利用传统方法建立准确的机理模型, 而只能根据已知数据进行分析并决策[1]. 对此, Zadeh[2] 提出了模糊集理论来描述外延不分明的亦此亦彼的模糊概念. 刘开第等[3] 利用滤波器提出了一种多指标决策中隶属度转换算法. 王永富等[4] 提出了一个具有完备性和鲁棒性的模糊规则提取算法. Atanassov[5] 于 1986 年提出了直觉模糊集的概念, 它是对传统的模糊集的一种扩充和发展, 直觉模糊集增加了新的属性参数: 非隶属度函数, 它比传统的模糊集在处理模糊性和不确定性方面更具灵活性和实用性. Atanassov 等[6] 对直觉模糊集做进一步推广, 提出区间直觉模糊集的概念. Atanassov[7] 定义了区间直觉模糊集的一些基本运算法则. Bustince 等[8] 定义了区间直觉模糊集的关联度, 并研究了区间直觉模糊集关联性两个分解定理. Hung 等[9] 利用形心法来计算区间直觉模糊集的关联系数. 目前对区间直觉模糊集的研究主要集中于其基础理论方面, 对区间直觉模糊信息的集成方式和区间直觉模糊集理论的实际应用研究还比较少见[10−13], 因而, 有必要对该类问题进行探讨.

传统的决策方法大都是对各方案的属性 (指标) 值加权求和得到各方案的综合属性值, 再根据其大小进行排序. 事实上, 现实中人们在决策时, 除了用方案的属性值加权求和进行决策外, 很多情况下, 是利用个体的经验和所能收集到的相关事实与数据作为判断与推理的证据进行证据推理, 找出最优方案的. 在这里, 我们称其为 "证据推理决策". 目前, 已有学者将 D-S 证据理论融合到决策方法中, 进行证据推理决策方法与模型的探讨. Shafer[14] 针对单个证据不能全面反映事物运行规律的特点, 研究了如

收稿日期 2010-10-25 录用日期 2011-02-18
Manuscript received October 25, 2010; accepted February 18, 2011
国家自然科学基金重大研究计划培育项目 (90924022), 国家自然科学基金面上项目 (70971064), 国家自然科学基金 (70701017) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (90924022, 70971064, 70701017)
1. 南京航空航天大学经济与管理学院 南京 210016
1. College of Economics and Manangement, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016

何促进不同证据之间的有机融合, 运用证据融合的结果表征复杂现象的本质. 刘付显等[15] 提出了基于不确定融合证据的决策方法. 这些理论的提出和应用促进了 D-S 证据理论和决策理论的进一步发展.

然而在证据理论与决策理论相结合时, 如何将含有区间直觉模糊数的不确定性决策问题转化为确定性的决策问题, 以及 Mass 函数如何构建仍是需要深入研究的问题, 本文将灰色系统理论与证据理论相结合, 提出了一种基于灰色关联与 D-S 证据理论的区间直觉模糊决策方法, 解决了以下三个方面的决策问题:

1) 提供一种新的基于证据推理的快速有效的决策方法与模式, 便于人们方便地利用其已有的经验和动态决策过程中不断补充新的信息作为证据进行推理决策;

2) 显著地降低不确定性决策的不确定性以及人们主观认知的不确定性和迷茫性, 提高决策水平;

3) 将灰色关联与 D-S 证据理论相结合, 建立推理决策模型, 拓宽了灰色系统理论的应用领域.

1 决策模型构建与算法设计

1.1 基本知识

定义 1[14]**.** 设 θ 为一辨识框架, 如果集函数 $m: 2^\theta \to [0,1]$ (2^θ 为 θ 的幂集), 满足 $m(\varnothing)=0$, 且 $\sum_{A\subseteq\theta} m(A)=1$, 则称为 m 辨识框架上的基本概率分配 (Mass 函数). 其中, 使得 $m>0$ 的 A 称为焦元; $\forall A\subseteq\theta$, $m(A)$ 称为 A 的基本概率分配值; $\forall A\subseteq\theta$, $bel(A)=\sum_{B\subseteq A} m(B)$, 称 $bel(A)$ 为 A 的信度函数.

辨识框架 θ 是关于命题相互独立的可能答案的一个有限集合, 且假设已知这些答案中有且仅有一个是正确的. 基本概率分配值 (Mass 函数) $m(A)$ 表示证据支持命题 A 发生的程度, 但是不表示对任何 A 的真子集的支持程度; $bel(A)$ 为 A 中每个子集的基本概率分配值之和.

设 X 是一个给定论域, 则 X 上的一个直觉模糊集[5] 为 $B=\{\langle x, u_B(x), v_B(x)\rangle | x\in X\}$. 其中, $u_B(x)$ 和 $v_B(x)$ 分别为 X 中元素 x 属于 B 的隶属度和非隶属度. $u_B: X\to[0,1]$, $v_B: X\to[0,1]$, 且满足条件 $0\le u_B(x)+v_B(x)\le 1$, $x\in X$, 称 $\pi_B(x)=1-u_B(x)-v_B(x)$ 表示 X 中元素 x 属于 B 的犹豫度.

一个直觉模糊集 B, 其隶属度 $u_B(x)$、非隶属度 $v_B(x)$ 及其犹豫度 $\pi_B(x)$ 分别表示对象 x 属于直觉模糊集 B 的支持、反对、中立这三种证据的程度.

由于客观事物的复杂性和不确定性, $u_B(x)$ 和 $v_B(x)$ 的值往往难以用精确的实数值来表达, 而用区间数形式表示是比较适合的, 因此, Atanassov 等[6] 对直觉模糊集进行了拓展, 称 $\bar{B}=\{\langle x, \bar{u}_{\bar{B}}(x), \bar{v}_{\bar{B}}(x)\rangle | x\in X\}$ 为区间直觉模糊集, 其中, $\bar{u}_{\bar{B}}(x)=[\bar{u}^l_{\bar{B}}, \bar{u}^u_{\bar{B}}]\subset[0,1]$, $\bar{v}_{\bar{B}}(x)=[\bar{v}^l_{\bar{B}}, \bar{v}^u_{\bar{B}}]\subset[0,1]$, 且满足条件 $\sup\bar{u}_{\bar{B}}(x)+\sup\bar{v}_{\bar{B}}(x)\le 1$, $\forall x\in X$.

X 中的元素 x 属于 B 的隶属度与非隶属度所组成的有序对 $\langle\bar{u}_{\bar{B}}(x), \bar{v}_{\bar{B}}\rangle$ 称为区间直觉模糊数. 可以将 X 上的区间直觉模糊集 $\bar{B}$ 看作是全区间体直觉模糊数的集合, 记为 IIFS(X).

1.2 决策模型构建与决策步骤

假设多属性 (指标) 决策问题, 有 m 个可行方案 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, n 个评价指标 $I_1, I_2, \cdots, I_n$, 可行方案 A_i 在评价指标 I_j 下的属性值为区间直觉模糊数 d_{ij}, 得到区间直觉模糊决策矩阵 $D=(d_{ij})_{m\times n}$. 在本文中, 将决策系统的指标体系视为一组证据信息.

本文的模型构建思路是利用记分函数和指标的确信度来构建各证据下的不同方案的 Mass 函数, 然后, 运用 D-S 合成法则进行信息融合, 从而得出决策结果.

对于直觉模糊数 $\alpha=\langle u_B(x), v_B(x)\rangle$, 定义 $S(\alpha)=u_B(x)-v_B(x) >$ 为 α 的记分函数[16], 其中 $S(\alpha)\in[0,1]$.

Chen 于 1994 年首先引进记分函数, 其意义是支持程度与反对程度的差值, 该值表示净支持程度, 该值越大越好, 这与人们的直觉非常相近. 特别的, 当 $S(\alpha)=-1$ 时, 表示完全反对该方案; 当 $S(\alpha)=1$ 时, 表示完全赞成该方案; 当 $S(\alpha)=0$ 时, 表示支持程度与反对程度一样.

对于区间直觉模糊数, 本文给出区间记分函数的定义.

定义 2. 对于区间直觉模糊数 $\beta=\langle\bar{u}_{\bar{B}}(x)-\bar{v}_{\bar{B}}(x)\rangle$ 为 β 的区间记分函数, 其中, $S(\beta)\subset[-1,1]$ 为一区间数.

通过定义 2 可以将区间直觉模糊决策矩阵 $D=(d_{ij})_{m\times n}$ 转化为区间记分函数矩阵 $S=(s_{ij})_{m\times n}$, 其中, $s_{ij}=[s^l_{ij}, s^u_{ij}]$ 为区间数.

定义 3. 设 $s_{ij}=[s^l_{ij}, s^u_{ij}]$ 为一区间数, 称 $G_\alpha(s_{ij})=(s^l_{ij}+s^u_{ij})/2+\alpha(s^u_{ij}-s^l_{ij})/2$ 为区间数 $s_{ij}=[s^l_{ij}, s^u_{ij}]$ 的点算子. 其中, α 为风险因子, $S(\alpha)\in[-1,1]$; 当 $\alpha=0$ 时, 说明决策者为风险中性, $\alpha>0$ 时说明决策者是追求风险的, $\alpha<0$ 时说明决策者是厌恶风险的.

通过定义 3 可以将区间数 s_{ij} 转化为实数 g_{ij}, 从而区间记分矩阵 $S=(s_{ij})_{m\times n}$ 转化为记分矩阵 $G=(g_{ij})_{m\times n}$, 文献 [11] 提出的记分函数

$S(\beta)=(\bar{u}_B^l(x)-\bar{v}_B^l(x)+\bar{u}_B^u(x)-\bar{v}_B^u(x))/2$ 是定义 3 中 $\alpha=0$ 时的特殊情况. 决策者可以根据风险偏好选择 α 的值, 从而比文献 [11] 提出的记分函数更加灵活.

若想运用证据理论进行决策, 需要得到各证据下的不同方案的 Mass 函数, 而求解证据 (指标) 的不确信度是一个关键点, 下面用灰色关联方法求证据 (指标) 的不确信度.

指标不确信度的提取方法要根据实际情况予以选择, 理论上而言, 如果某个指标信息相对于其他指标而言, 越匹配于指标体系的平均信息, 则说明该指标包含的信息越利于决策, 该指标信息的不确信度低; 反之亦成立.

设记分矩阵 $G=(g_{ij})_{m\times n}$, 令 $\bar{g}_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n g_{ij}$, $i=1,2,\cdots,m$.

定义 4[17]**.** 指标 I_j 的 q 阶不确信度为 $DOI(I_j)=\frac{1}{m}[\sum_{i=1}^m (r_{ij})^q]^{\frac{1}{q}}$, 其中

$$r_{ij}=\frac{\min\limits_i|g_{ij}-\bar{g}|+\xi\min\limits_i|g_{ij}-\bar{g}|}{|g_{ij}-\bar{g}|+\xi\min\limits_i|g_{ij}-\bar{g}|}$$
$$i=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,n$$

为灰色均值关联度, 一般令 $\xi=0.5$.

通过定义 4 (为了提高分辨效果, 采用欧氏距离而不采用 Hamming 距离, 这里取 $q=2$), 可以得到指标 I_j 证据 (指标) 的不确信度 $DOI(I_j)$.

为了得到各证据下的不同方案的 Mass 函数, 考虑到记分函数有可能出现负数, 故运用下列公式进行规范化:

$$\bar{g}_{ij}=\frac{g_{ij}-\min\limits_i(g_{ij})}{\max\limits_i(g_{ij})-\min\limits_i(g_{ij})} \tag{1}$$

定义 5[18]**.** 令长度为 t $(t\neq 0)$ 的有限差异信息序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_t)$, 且至少存在 $x_j\neq 0$, $j\in J$, $J=\{1,2\cdots,t\}$, 为序列的指标集, 称映射

$$f:x\rightarrow yy_j=\frac{x_j}{\sum\limits_{k=1}^t x_k}$$

为有限序列 x 的信息结构算子, 这里 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_t)$ 被称为信息结构映像序列.

将规范化的记分函数矩阵运用定义 5 得到信息结构映像序列矩阵 $Y=(y_{ij})_{m\times n}$.

从以上分析可以得到如下的 Mass 函数: $m_j(i)=(1-DOI(I_j)y_{ij}$, 其中, $m_j(i)$ 为指标 I_j 下方案 A_i 的 Mass 函数. 由于客观事物的复杂性以及人们认识的局限性, 通过上述分析可以看出某指标 I_j 下各方案的 Mass 函数之和小于 1, 即 $\sum_{i=1}^m m_j(i)<1$, 存在整体的不确定情况, 在本文中将这部分 Mass 函数值赋给辨识框架 Θ 本身. 因此, 可以得到指标 I_j 下整体不确定性的 Mass 函数: $m_j(i+1)=1-\sum_{i=1}^m m_j(i)$.

这样得到了不同方案在各指标下的 Mass 函数, 要进行决策需要对方案在所有指标下的 Mass 函数进行合成, 下面给出合成方法:

定义 6 (D-S 合成法则)[14]**.** 对于 $\forall A\in\Theta$, Θ 上的两个集函数 (Mass 函数) m_1 和 m_2 的合成法则为

$$(m_1\oplus m_2)(A)=\frac{1}{1-K}\sum_{B\bigcap C=A} m_1(B)m_2(C)$$

其中, $K=\sum_{B\bigcap C=\varnothing} m_1(B)m_2(C)$

定理 1. D-S 合成公式满足交换律和结合律, 即

1) $m_1\oplus m_2=m_2\oplus m_1$;

2) $m_1\oplus(m_2\oplus m_3)=(m_1\oplus m_2)\oplus m_3$.

证明. 1) 交换律: 对于

$$\begin{aligned}&\forall A\subseteq\Theta,\ (m_1\oplus m_2)(A)=\\&\frac{1}{1-\sum\limits_{B\bigcap C=\varnothing} m_1(B)m_2(C)}\times\\&\sum_{B\bigcap C=A} m_1(B)m_2(C)=\\&\frac{1}{1-\sum\limits_{B\bigcap C=\varnothing} m_1(C)m_2(B)}\times\\&\sum_{B\bigcap C=A} m_1(C)m_2(B)=\\&(m_2\oplus m_1)(A)\end{aligned}$$

2) 结合律: 对于 $\forall A\subseteq\Theta$,

$$\begin{aligned}&m_1\oplus(m_2\oplus m_3)(A)=\\&\frac{\sum\limits_{A_2\bigcap A_3\bigcap A_1=A} m_2(A_2)m_3(A_3)m_1(A_1)}{1-\sum\limits_{A_2\bigcap A_3\bigcap A_1=\varnothing} m_2(A_2)m_3(A_3)m_1(A_1)}=\\&\frac{\sum\limits_{A_1\bigcap A_2\bigcap A_3=A} m_1(A_1)m_2(A_2)m_3(A_3)}{1-\sum\limits_{A_1\bigcap A_2\bigcap A_3=\varnothing} m_1(A_1)m_2(A_2)m_3(A_3)}=\\&((m_1\oplus m_2))\oplus(m_3)(A)\end{aligned}$$

□

定理 2. 对于 $\forall A\subseteq\Theta$, 辨识框架 Θ 上有限个 Mass 函数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的 D-S 合成法则可以表示如下: $(m_1\oplus m_2\oplus\cdots\oplus m_n)(A)=$

$1/(1-K)\sum_{A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap m_n=A} m_1(A_1)m_2(A_2)\cdots m_n(A_n)$, 其中, $K=\sum_{A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap m_n=\varnothing} m_1(A_1)m_2(A_2)\cdots m_n(A_n)$.

证明 (应用数学归纳法). 当 $n=2$ 时, 由定义 6 可直接得出结论成立. 假设结论对于 n 成立, 即对于 $\forall A\subseteq\Theta$, $(m_1\oplus m_2\oplus\cdots\oplus m_n)(A)=1/(1-K)\sum_{A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap m_n=A} m_1(A_1)m_2(A_2)\cdots m_n(A_n)$. 则结论对于 $n+1$ 时, 由定义 6, 对于 $\forall B\subseteq\Theta$,

$$(m_1\oplus m_2\oplus\cdots\oplus m_n)(A)\oplus m_{n+1})(A)=\frac{\sum\limits_{A\bigcap A_{n+1}=B} m_1\oplus m_2\oplus\cdots\oplus m_n)(A)m_{n+1}(A_{n+1})}{1-\sum\limits_{A\bigcap A_{n+1}=\varnothing} m_1\oplus m_2\oplus\cdots\oplus m_n)(A)m_{n+1}(A_{n+1})}=$$
$$\frac{\sum\limits_{A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_{n+1}=B}(m_1(A_1)m_2(A_2)\cdots m_n(A_n))m_{n+1}(A_{n+1}))}{\sum\limits_{A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_{n+1}\neq\varnothing}(m_1(A_1)m_2(A_2)\cdots m_n(A_n))m_{n+1}(A_{n+1}))}=$$
$$\frac{\sum\limits_{A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_{n+1}=B}(m_1(A_1)m_2(A_2)\cdots m_n(A_n))m_{n+1}(A_{n+1}))}{1-\sum\limits_{A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_{n+1}=\varnothing}(m_1(A_1)m_2(A_2)\cdots m_n(A_n))m_{n+1}(A_{n+1}))}$$

因此, 结论对于 $n+1$ 时也成立, 由归纳法, 定理得证. □

上述两个定理给出了多个 Mass 函数的合成方法, 对于 n 个 Mass 函数的合成, 可以用定理 1 一步一步合成, 也可以直接用定理 2 一次性合成.

综上所述, 可以得到基于灰色关联和 D-S 证据理论的区间直觉模糊决策方法步骤如下:

1) 根据直觉模糊决策矩阵 D 和定义 2 得到区间记分函数矩阵 S;

2) 根据区间记分函数矩阵 S 和定义 3 得到记分矩阵 $G=(g_{ij})_{m\times n}$;

3) 根据记分函数矩阵 G 和定义 4 得到指标的不确信度 $DOI(I_j)$, $j=1,2,\cdots,n$;

4) 根据式 (1) 和定义 5 得到信息结构映像序列矩阵 $Y=(y_{ij})_{m\times n}$;

5) 根据信息结构映像序列矩阵 $Y=(y_{ij})_{m\times n}$ 和指标的不确信度 $DOI(I_j)$ 构建 Mass 函数 $m_j(i)$ 以及整体不确定性的 Mass 函数 $m_j(i+1)$;

6) 运用 D-S 合成法则进行证据信息融合;

7) 根据信度函数最大化原则进行决策.

2 实例分析 (为了便于比较, 本文采用文献 [11] 的算例)

某单位在对干部进行考核选拔时, 首先, 制定了 6 项考核指标 (属性): 思想品德 (I_1)、工作态度 (I_2)、工作作风 (I_3)、文化水平和知识结构 (I_4)、领导能力 (I_5) 和开拓能力 (I_6). 然后, 由群众推荐和评议, 对各候选人按上述 6 项指标进行评估, 再进行统计处理, 并从中确定了 5 名候选人 A_j ($j=1,2,\cdots,n$). 假设每位候选人在各指标下的评估信息经过统计处理后, 可表示为区间直觉模糊数 (见表 1).

下面用本文方法确定最佳候选人:

根据直觉模糊决策矩阵和区间记分函数公式得到区间记分函数矩阵

$$S=\begin{bmatrix}[-0,3,-0.1] & [0.3,0.5] & [0,0.3] & [0.5,0.7] & [-0,5,0.2] & [0.2,0.5]\\ [0.3,0.5] & [0.2,0.5] & [0.3,0.5] & [0.4,0.6] & [-0.3,-0.1] & [0.2,0.5]\\ [0,0.2] & [0.5,0.7] & [0.1,0.3] & [0.3,0.6] & [0,0.2] & [0,0.4]\\ [0.3,0.5] & [0.2,0.6] & [0.5,0.7] & [0.1,0.3] & [0.2,0.5] & [0.5,0.7]\\ [0,0.3] & [-0.2,0.1] & [0.3,0.6] & [0.4,0.7] & [0.3,0.5] & [0.1,0.4]\end{bmatrix}$$

表 1 决策矩阵

Table 1 Decision matrix

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
A_1	$([0.2,0.3],[0.4,0.5])$	$([0.6,0.7],[0.2,0.3])$	$([0.4,0.5],[0.2,0.4])$	$([0.7,0.8],[0.1,0.2])$	$([0.1,0.3],[0.5,0.6])$	$([0.5,0.7],[0.2,0.3])$
A_2	$([0.6,0.7],[0.2,0.3])$	$([0.5,0.6],[0.1,0.3])$	$([0.6,0.7],[0.2,0.3])$	$([0.6,0.7],[0.1,0.2])$	$([0.3,0.4],[0.5,0.6])$	$([0.4,0.7],[0.1,0.2])$
A_3	$([0.4,0.5],[0.3,0.4])$	$([0.7,0.8],[0.1,0.2])$	$([0.5,0.6],[0.3,0.4])$	$([0.6,0.7],[0.1,0.3])$	$([0.4,0.5],[0.3,0.4])$	$([0.3,0.5],[0.1,0.3])$
A_4	$([0.6,0.7],[0.2,0.3])$	$([0.5,0.7],[0.1,0.3])$	$([0.7,0.8],[0.1,0.2])$	$([0.3,0.4],[0.1,0.2])$	$([0.5,0.6],[0.1,0.3])$	$([0.7,0.8],[0.1,0.2])$
A_5	$([0.5,0.6],[0.3,0.4])$	$([0.3,0.4],[0.3,0.5])$	$([0.6,0.7],[0.1,0.3])$	$([0.6,0.8],[0.1,0.2])$	$([0.6,0.7],[0.2,0.3])$	$([0.5,0.6],[0.2,0.4])$

根据区间记分函数矩阵 S 和定义 3, 并取 $\alpha = 0$ (风险中性), 得到记分函数矩阵:

$$G = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 & 0.15 & 0.6 & -0.35 & 0.35 \\ 0.4 & 0.35 & 0.4 & 0.5 & -0.2 & 0.35 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.45 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.2 & 0.35 & 0.6 \\ 0.15 & -0.05 & 0.45 & 0.55 & 0.4 & 0.25 \end{bmatrix}$$

根据记分函数矩阵 G 和定义 4 得到指标 I_j 的不确信度 $DOI(I_j)$:

$$\begin{aligned} DOI(I_1) = 0.389, \quad & DOI(I_2) = 0.380 \\ DOI(I_3) = 0.344, \quad & DOI(I_4) = 0.482 \\ DOI(I_5) = 0.417, \quad & DOI(I_6) = 0.435 \end{aligned}$$

根据式 (1) 和定义 5 得到信息结构映像序列矩阵 $Y = (y_{ij})_{m\times n}$:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0.231 & 0 & 0.308 & 0 & 0.200 \\ 0.324 & 0.205 & 0.238 & 0.231 & 0.073 & 0.200 \\ 0.162 & 0.333 & 0.048 & 0.192 & 0.220 & 0 \\ 0.324 & 0.231 & 0.429 & 0 & 0.341 & 0.533 \\ 0.189 & 0 & 0.286 & 0.269 & 0.366 & 0.067 \end{bmatrix}$$

根据信息结构映像序列矩阵 $Y = (y_{ij})_{m\times n}$ 和指标的不确信度 $DOI(I_j)$ 构建 Mass 函数 $m_j(i)$ 以及整体不确定性的 Mass 函数 $m_j(i+1)$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.143 & 0 & 0.159 & 0 & 0.113 \\ 0.198 & 0.127 & 0.156 & 0.120 & 0.043 & 0.113 \\ 0.099 & 0.207 & 0.031 & 0.100 & 0.128 & 0 \\ 0.198 & 0.143 & 0.281 & 0 & 0.199 & 0.301 \\ 0.116 & 0 & 0.187 & 0.139 & 0.213 & 0.038 \\ 0.389 & 0.380 & 0.344 & 0.482 & 0.417 & 0.435 \end{bmatrix}$$

其中, 在上述 Mass 函数矩阵中, 整体不确定性 Mass 函数为

$$\begin{aligned} & m_1(6) = 0.389, \quad m_2(6) = 0.380, \quad m_3(6) = 0.344 \\ & m_4(6) = 0.482, \quad m_5(6) = 0.417, \quad m_6(6) = 0.435 \end{aligned}$$

这里令 $\theta = A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$, 并且取 $2^\theta = \{\{A_1\}, \{A_2\}, \{A_3\}, \{A_4\}, \{A_5\}, \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}\}$.

由 D-S 合成法则, 得到合成后辨识框架内的各子集的信度函数分别为

$$\begin{aligned} & bel(A_1) = (m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus \\ & \quad m_5 \oplus m_6)(A_1) = 0.065 \\ & bel(A_1) = (m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus \\ & \quad m_5 \oplus m_6)(A_2) = 0.203 \\ & bel(A_1) = (m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus \\ & \quad m_5 \oplus m_6)(A_3) = 0.102 \\ & bel(A_1) = (m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus \\ & \quad m_5 \oplus m_6)(A_4) = 0.420 \\ & bel(A_1) = (m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus \\ & \quad m_5 \oplus m_6)(A_5) = 0.161 \\ & bel(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) = \\ & \quad (m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_5 \oplus m_6)\times \\ & \quad (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) = 0.050 \end{aligned}$$

根据信度函数最大化原则, 方案 A_4 为最优方案, 方案的优劣顺序为 $A_4 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_1$ 这与文献 [11] 结果完全一致. 同时可以看出, 在信息融合过程中, 整体不确定性的信度函数值也在不断减小, 从最初的平均值 40.7 % 降低到融合后的 5 %, 也能说明将灰色关联与证据理论相结合来处理决策问题可以显著降低人们主观认识的不确定性, 提高决策水平.

3 结论

本文将灰色关联与 D-S 证据理论相结合, 提出了一种基于灰色关联与 D-S 证据理论的区间直觉模糊决策方法; 运用灰色关联方法确定各指标不确信度, 定义了区间记分函数和区间记分函数的点算子, 通过点算子将区间记分函数转化为记分函数, 利用记分函数以及指标不确信度构建出不同指标下各方案的 Mass 函数, 通过 D-S 合成法则进行信息融合, 得到了较好的结果. 通过算例可以看出, 本方法可以充分挖掘各指标的信息, 降低决策的不确定性, 使决策结果更加科学、合理.

References

1 Wang Hong-Wei, Qi Chao, Wei Yong-Chang, Li Bin, Zhu Song. Review on data-based decision making methodologies. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(6): 820−833
(王红卫, 祁超, 魏永长, 李彬, 朱松. 基于数据的决策方法综述. 自动化学报, 2009, **35**(6): 820−833)

2 Zadeh L A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, **8**: 338−353

3 Liu Kai-Di, Pang Yan-Jun, Li Wen-Guo. Membership transforming algorithm in multi-index decision and its applica-

tion. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(3): 315−319
(刘开第, 庞彦军, 栗文国. 多指标决策中隶属度转换算法及其应用. 自动化学报, 2009, **35**(3): 315−319)

4 Wang Yong-Fu, Wang Dian-Hui, Chai Tian-You. Extraction of fuzzy rules with completeness and robustness. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(9): 1337−1342
(王永富, 王殿辉, 柴天佑. 一个具有完备性和鲁棒性的模糊规则提取算法. 自动化学报, 2010, **36**(9): 1337−1342)

5 Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, **20**(1): 87−96

6 Atanassov K T, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, **31**(3): 343−349

7 Atanassov K T. Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, **64**(2): 159−174

8 Bustince H, Burillo P. Correlation of interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, **74**(2): 237−244

9 Hung W L, Wu J W. Correlation of intuitionistic fuzzy sets by centroid method. *Information Sciences*, 2002, **144**(1−4): 219−225

10 Xu Z S. On correlation measures of intuitionistic fuzzy sets. *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 16−24

11 Xu Ze-Shui. Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and their application to decision making. *Control and Decision*, 2007, **22**(2): 215−219
(徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用. 控制与决策, 2007, **22**(2): 215−219)

12 Wang Z J, Li K W, Wang W Z. An approach to multiattribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy assessments and incomplete weights. *Information Sciences*, 2009, **179**(17): 3026−3040

13 Ye J. Fuzzy cross entropy of interval-valued intuitionistic fuzzy sets and its optimal decision-making method based on the weights of alternatives. *Expert Systems with Applications*, 2011, **38**(5): 6179−6183

14 Shafer G. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton: Princeton University Press, 1976

15 Liu Fu-Xian, Xing Qing-Hua. New decision making method based on D-S fusion evidence. *Systems Engineering — Theory and Practice*, 2009, **29**(7): 125−131
(刘付显，邢清华. 基于 D-S 融合证据的决策新方法. 系统工程理论与实践, 2009, **29**(7): 125−131)

16 Chen S M, Tan J M. Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, **67**(2): 163−172

17 Liu Si-Feng, Dang Yao-Guo, Fang Zhi-Geng. *Grey Systems Theory and Its Applications (Third Edition)*. Beijing: Science Press, 2004
(刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用 (第三版). 北京: 科学出版社, 2004)

18 Zhang Qi-Shan. *Difference Information Theory in Grey Hazy Set*. Beijing: Petroleum Industry Press, 2002
(张岐山. 灰朦胧集的差异信息理论. 北京: 石油工业出版社, 2002)

李 鹏 南京航空航天大学经济与管理学院博士研究生. 主要研究方向为决策分析与灰色系统理论. 本文通信作者.
E-mail: jellyok@126.com
(**LI Peng** Ph. D. candidate at the College of Economics and Manangement, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. His research interest covers decision making and grey system theory. Corresponding author of this paper.)

刘思峰 南京航空航天大学经济与管理学院教授. 主要研究方向为灰色系统理论. E-mail: sfliu@nuaa.edu.cn
(**LIU Si-Feng** Professor at the College of Economics and Manangement, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics. His main research interest is grey system theory.)