

一种基于死区离散趋近律的 准滑模控制

刘涛^{1,2} 刘贺平¹

摘要 针对受正弦信号干扰的不确定离散时间系统,提出一种基于死区离散趋近律的准滑模控制方法.系统能够由任一初始状态向死区作单调趋近运动,并于有限时间到达准滑动模态区作准滑动模态运动.准滑动模态带具有任意阶次小的特点.该方法进一步增强了系统鲁棒性,有效改善系统动态品质,减小了稳态误差.系统无控制抖振和稳态抖振产生.仿真结果表明该方法的有效性.

关键词 离散趋近律,死区,准滑模控制,不确定性

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.00760

Quasi-sliding-mode Control Based on Discrete Reaching Law with Dead Zone

LIU Tao^{1,2} LIU He-Ping¹

Abstract A quasi-sliding-mode control design method based on discrete reaching law with dead zone is considered for discrete time systems with uncertainty which is a sinusoidal signal. The control strategy could drive the state of controlled system to the dead zone monotonously for arbitrary initial value and the quasi-sliding-mode is reached in a finite time. Quasi-sliding-mode band could be designed to be as small as arbitrary order of magnitude. At the same time, better robustness is guaranteed, dynamic quality is improved and steady-state error is reduced. Furthermore, the undesired control chattering and steady-states chattering are avoided. Simulation results show the effectiveness for the proposed method.

Key words Discrete reaching law, dead zone, quasi-sliding-mode control, uncertainty

滑模控制是一种鲁棒控制方法,该方法能够使系统状态限制在一个称为滑动流形的状态子空间中,并最终使其状态收敛到原点.滑模控制的显著特点是:滑动模态对符合匹配条件的参数摄动和外部干扰具有不变性.

随着数字计算机的广泛应用,离散时间系统滑模控制的研究越来越深入.离散滑模控制不能由连续滑模控制直接等效得到.为此,先后出现了几种不同形式的离散形式到达条件和准滑模控制^[1-7].在离散时间系统中,由于有限采样周期的存在,控制作用在一个采样周期内保持不变,系统一般不能在滑模面上作理想准滑动模态运动,而只能在滑模面的某一个邻域内作准滑动模态运动,同时伴有控制抖振和稳态抖振产生^[8-10].

高为炳院士提出的离散趋近律方法,具有物理意义明确、控制律设计简单、适用范围广等特点.但系统存在控制抖振和稳态抖振,抖振幅度会因不确定性存在而加剧^[5-6].Bartoszewicz 采用新型离散趋近律,消除了抖振,准滑动模态带宽得到缩窄^[7].翟长连等利用灰色估计器对系统不确定

部分进行补偿,给出了一种改进型离散趋近律,抖振得到有效改善^[11].文献[12-14]分别提出改进形式的离散趋近律,但均未考虑不确定性对系统的影响.文献[15]采用扰动动态补偿离散趋近律,使得系统鲁棒性增强,但抖振仍然存在.文献[16]利用一种离散时变趋近律,消除了控制抖振和稳态抖振.文献[17]对离散趋近律作了进一步分析,提出理想趋近律和鲁棒趋近律的概念.

本文针对一类受正弦信号干扰的不确定离散时间系统,提出一种死区离散趋近律和相应的准滑模控制策略.该方法不仅能够使得处于死区外的趋近模态具有单调性,而且能够将准滑动模态带缩窄到任意阶小,系统鲁棒性得到增强.控制律不含切换项,避免了系统控制抖振和稳态抖振的出现.

1 系统描述及相关定义

为简单起见,考虑单输入不确定离散时间系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) + \Gamma f(k) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 表示系统状态; $u(k) \in \mathbf{R}$ 表示系统控制输入; $f(k) \in \mathbf{R}$ 表示模型不确定性和外部干扰,称为等效干扰; Φ 和 Γ 是具有适当维数的常数矩阵,且满足 $\text{rank } \Gamma = 1$.

系统(1)满足4个假设条件.

假设 1. (Φ, Γ) 具有完全能控性.

假设 2. 等效干扰 $f(k)$ 为某一未知正弦信号.

$$f(k) = A_f \sin(\omega k T_s + \varphi) \quad (2)$$

其中, $A_f > 0$, $\omega > 0$, φ 分别表示等效干扰 $f(k)$ 的幅值,角频率和初始相位,均为未知常数. T_s 表示系统采样周期.

假设 3. 已知等效干扰 $f(k)$ 的幅值 A_f 和角频率 ω 满足

$$A_f \leq A_{f,\max} \quad (3)$$

$$\omega \leq \omega_{\max} \quad (4)$$

假设 4. 系统采样周期 T_s 满足

$$T_s < \frac{\pi}{3\omega_{\max}} \quad (5)$$

对系统(1)定义滑模面

$$s(k) = C^T \mathbf{x}(k) = 0 \quad (6)$$

其中, $C \in \mathbf{R}^n$, $s(k) \in \mathbf{R}$. C 为待设计的常数向量,满足 $C^T \Gamma \neq 0$.

根据假设 2 和式(3),可得以下关系式成立

$$|d(k)| \leq A_{d,\max} \quad (7)$$

其中

$$d(k) = C^T \Gamma f(k) = A_d \sin(\omega k T_s + \varphi) \quad (8)$$

$$A_d = C^T \Gamma A_f$$

$$A_{d,\max} = |C^T \Gamma| A_{f,\max} \quad (9)$$

借鉴文献[7]对准滑动模态和准滑动模态带宽作如下定义.

定义 1. 若系统运动满足

$$|s(k)| \leq \varepsilon$$

收稿日期 2010-06-13 录用日期 2010-12-02

Manuscript received June 13, 2010; accepted December 2, 2010

1. 北京科技大学自动化学院 北京 100083 2. 北京物资学院信息学院 北京 101149

1. School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083 2. School of Information, Beijing Wuzi University, Beijing 101149

则称系统在滑模面 $s(k) = C^T \mathbf{x}(k) = 0$ 的 ε -邻域内具有准滑动模态. 其中, ε 为某一个正常数, 称为准滑动模态带宽.

2 主要结论

2.1 死区离散趋近律及准滑模控制

对系统 (1) 设计死区离散趋近律

$$s(k+1) = D(s(k)) [|s(k)| - (1 + \alpha(k)) A_{d,\max}] + \Delta^{l(k)} d(k) \quad (10)$$

其中, $\alpha(k) = \beta_U - (\beta_U - \beta_L) e^{(\lambda - |s(k)|)}$, $\beta_U > \beta_L > 0$, $\lambda = (2 + \beta_U) A_{d,\max}$, $\Delta^{l(k)} d(k)$ 是 $d(k)$ 的 $l(k)$ 阶差分,

$$l(k) = \begin{cases} k, & k < l_o \\ l_o, & k \geq l_o \end{cases} \quad l_o \text{ 为非负整数}$$

$$D(s(k)) = \begin{cases} \text{sgn}(s(k)), & \mathbf{x}(k) \in \bar{S}_\lambda \\ 0, & \mathbf{x}(k) \in S_\lambda \end{cases} \quad (11)$$

$$S_\lambda = \{\mathbf{x} \mid |s(k)| \leq \lambda\}$$

根据式 (8) 对不确定干扰 $d(k)$ 的定义, 结合系统动态方程式 (1) 可知:

$$d(k) = C^T \Gamma f(k) = C^T [\mathbf{x}(k+1) - \Phi \mathbf{x}(k) - \Gamma u(k)] = s(k+1) - C^T \Phi \mathbf{x}(k) - C^T \Gamma u(k) \quad (12)$$

将其延时 i 步得:

$$d(k-i) = s(k+1-i) - C^T \Phi \mathbf{x}(k-i) - C^T \Gamma u(k-i), \quad i \in \mathbf{Z} \quad (13)$$

由式 (13) 可知 $d(k)$ 的 $l(k)$ 阶差分

$$\Delta^{l(k)} d(k) = \sum_{i=0}^{l(k)} (-1)^i C_{l(k)}^i d(k-i) = d(k) + \sum_{i=1}^{l(k)} (-1)^i C_{l(k)}^i d(k-i) = d(k) + \sum_{i=1}^{l(k)} (-1)^i \frac{l(k)!}{(l(k)-i)!i!} [s(k+1-i) - C^T \Phi \mathbf{x}(k-i) - C^T \Gamma u(k-i)] \quad (14)$$

通过系统动态方程式 (1) 和滑模面式 (6) 可得:

$$s(k+1) = C^T \mathbf{x}(k+1) = C^T [\Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) + \Gamma f(k)] = C^T \Phi \mathbf{x}(k) + C^T \Gamma u(k) + d(k) \quad (15)$$

将式 (14) 和式 (15) 代入式 (10), 整理得可实现的准滑模控制律

$$u(k) = \left(C^T \Gamma \right)^{-1} \left\{ D(s(k)) [|s(k)| - (1 + \alpha(k)) A_{d,\max}] - C^T \Phi \mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{l(k)} (-1)^i \frac{l(k)!}{(l(k)-i)!i!} [s(k+1-i) - C^T \Phi \mathbf{x}(k-i) - C^T \Gamma u(k-i)] \right\} \quad (16)$$

在第 2.2 节对系统趋近模态及准滑动模态的具体分析可以看到: 死区离散趋近律 (10) 中 $D(s(k)) [|s(k)| - (1 + \alpha(k)) A_{d,\max}]$ 的存在, 能够保证系统在趋近 S_λ 过程具有单调性. 其最低趋近速度随系统状态变化而变化, 最低趋近速度的取值范围可以通过 β_L 和 β_U 来调整. 死区离散趋近律 (10) 中 $\Delta^{l(k)} d(k)$ 的作用是, 对当前时刻不确定干扰 $d(k)$ 进行有效补偿, 减小不确定干扰 $d(k)$ 对系统趋近模态和准滑动模态的影响.

2.2 趋近模态和准滑动模态分析

下面对由死区离散趋近律 (10) 得到的系统趋近模态和准滑动模态进行具体分析.

引理 1. 不确定扰动 $d(k)$ 的 m 阶差分 $\Delta^m d(k)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ 是正弦信号.

$$\Delta^m d(k) = A_d \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^m \times \sin \left(\frac{m\pi}{2} + \frac{\omega(2k-m)T_s}{2} + \varphi \right) \quad (17)$$

当系统采样周期 T_s 满足假设 4 时

$$|\Delta^m d(k)| \leq A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^m \leq A_{d,\max} \quad (18)$$

证明. 略. \square

引理 1 表明: $d(k)$ 的任意阶差分是一个正弦信号, 其幅值会随着差分阶次 m 的增大而减小, 并且有 $\lim_{m \rightarrow \infty} |\Delta^m d(k)| = 0$.

根据引理 1 的结论可知

$$|\Delta^{l(k)} d(k)| \leq A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l(k)} \leq A_{d,\max} \quad (19)$$

引理 2. 若系统采样周期 T_s 满足假设 4, 集合 S, S_A, S_λ 必满足以下关系

$$S \subseteq S_A \subset S_\lambda \quad (20)$$

其中

$$S = \left\{ \mathbf{x} \mid |s(k)| \leq A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l_o} \right\}$$

$$S_A = \{ \mathbf{x} \mid |s(k)| \leq A_{d,\max} \}$$

证明. 由引理 1 可知, 当系统采样周期 T_s 满足假设 4 时

$$A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l_o} \leq A_{d,\max}$$

又因 $\beta_U > 0$, 可得

$$A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l_o} \leq A_{d,\max} < (2 + \beta_U) A_{d,\max}$$

此时必有 $S \subseteq S_A \subset S_\lambda$ 成立. \square

引理 2 表明: S 区域大小会随着 l_o 的增大而减小. 当 $l_o \rightarrow \infty$ 时, S 区域将由一个包含滑模面的带域退化成滑模面. 通过下面定理 1 对系统趋近模态和准滑动模态的具体分析, 将会看到系统趋近死区 S_λ 的最低趋近速度上确界 β_U 越大, 死区 S_λ 越大, 反之越小.

定理 1. 当系统采样周期 T_s 满足假设 4 时, 对系统 (1) 采用死区离散趋近律 (10) 设计准滑模控制律, 系统必能够由任意初始状态在 $k_1 + k_2$ 时刻到达 S 区域, 其中 k_1 是系统状态首次进入死区 S_λ 的时刻, $k_2 = k_d r(k_d) + 1$,

$$k_d = l_o - k_1, \quad r(k_d) = \begin{cases} 0, & k_d \leq 0 \\ 1, & k_d > 0 \end{cases}$$

此后, 系统将保持在 S 区域内作准滑动模态运动, 准滑动模态带宽为 $A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2}\right)^{l_o}$.

证明. 由式 (19) 可知

$$-A_{d,\max} \leq \Delta^{l(k)} d(k) \leq A_{d,\max} \quad (21)$$

当 $\mathbf{x}(k) \in \bar{S}_\lambda$ 且 $s(k) > 0$ 时, 结合离散趋近律式 (10) 和式 (21) 得

$$\begin{aligned} & -(2 + \alpha(k)) A_{d,\max} \leq \\ & s(k) - (1 + \alpha(k)) A_{d,\max} + \\ & \Delta^{l(k)} d(k) \leq s(k) - \alpha(k) A_{d,\max} \\ & -(2 + \alpha(k)) A_{d,\max} \leq \\ & s(k+1) \leq s(k) - \alpha(k) A_{d,\max} \end{aligned} \quad (22)$$

同理, 当 $\mathbf{x}(k) \in \bar{S}_\lambda$ 且 $s(k) < 0$ 时,

$$\begin{aligned} & s(k) + \alpha(k) A_{d,\max} \leq \\ & s(k) + (1 + \alpha(k)) A_{d,\max} + \\ & \Delta^{l(k)} d(k) \leq (2 + \alpha(k)) A_{d,\max} \\ & s(k) + \alpha(k) A_{d,\max} \leq \\ & s(k+1) \leq (2 + \alpha(k)) A_{d,\max} \end{aligned} \quad (23)$$

又由 $\alpha(k) = \beta_U - (\beta_U - \beta_L) e^{(\lambda - |s(k)|)}$, 当 $\mathbf{x} \in \bar{S}_\lambda$, 即 $|s(k)| > \lambda$ 时,

$$\beta_L < \alpha(k) < \beta_U \quad (24)$$

综合式 (22)~(24) 可知: 当 $\mathbf{x} \in \bar{S}_\lambda$ 时, 系统状态将至少以每步 $\alpha(k) A_{d,\max}$ 的量向死区 S_λ 作单调趋近运动, 最低位移量与系统状态有关, 且不会出现穿越死区 S_λ 的情况发生. 由此可见, 系统必能在某一有限时刻 $k_1, k_1 \geq 0$ 进入死区 S_λ , 即 $\mathbf{x}(k_1) \in S_\lambda$.

若 $\mathbf{x}(k_1) \in S_\lambda$ 且 $k_d \leq 0$ (即 $k_1 \geq l_o$), 此时, $D(s(k)) = 0$, 根据死区离散趋近律式 (10) 和式 (19) 有

$$\begin{aligned} |s(k_1 + 1)| &= \left| \Delta^{l_o} d(k_1) \right| \leq \\ & A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l_o} \end{aligned} \quad (25)$$

通过式 (25) 可知 $\mathbf{x}(k_1 + 1) \in S \subset S_\lambda$, 同理可得

$$\begin{aligned} |s(k_1 + 1 + p)| &= \left| \Delta^{l_o} d(k_1 + p) \right| \leq \\ & A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l_o}, \quad p \in \mathbf{Z}^+ \end{aligned} \quad (26)$$

由式 (25) 和式 (26) 可知: 系统必能够在 $k_1 + 1$ 时刻到达 S 区域, 并将保持在 S 区域内作准滑动模态运动.

若 $\mathbf{x}(k_1) \in S_\lambda$ 且 $k_d > 0$ (即 $k_1 < l_o$), 此时, $D(s(k)) = 0$, 根据死区离散趋近律式 (10) 和式 (19) 有

$$\begin{aligned} |s(k_1 + 1)| &= \left| \Delta^{l_o - k_d} d(k_1) \right| \leq \\ & A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l_o - k_d} \end{aligned} \quad (27)$$

通过式 (27) 可知 $\mathbf{x}(k_1 + 1) \in S_A \subset S_\lambda$, 同理可得

$$\begin{aligned} |s(k_1 + 2)| &= \left| \Delta^{l_o - k_d + 1} d(k_1 + 1) \right| \leq \\ & A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l_o - k_d + 1} \\ & \vdots \\ |s(k_1 + k_d + 1)| &= \left| \Delta^{l_o} d(k_1 + k_d) \right| \leq \\ & A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l_o} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} |s(k_1 + k_d + 1 + p')| &= \left| \Delta^{l_o} d(k_1 + k_d + p') \right| \leq \\ & A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l_o}, \quad p' \in \mathbf{Z}^+ \end{aligned} \quad (29)$$

由式 (27)~(29) 可知: 系统必能够在时刻 $k_1 + k_d + 1$ 到达 S 区域, 并将保持在 S 区域内作准滑动模态运动.

综上所述, 当系统采样周期 T_s 满足假设 4 时, 系统必能够由任意初始状态在有限时刻 $k_1 + k_2$ 到达 S 区域, 并将保持在 S 内作准滑动模态运动, S 即为准滑动模态区, 准滑动模态带宽为 $A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2}\right)^{l_o}$. \square

注 1. 当 $\mathbf{x}(k) \in \bar{S}_\lambda$ 时, β_L 和 β_U 的取值越大, 最低趋近速度相对越快, 能量消耗越高; β_L 和 β_U 的取值越小, 最低趋近速度相对越慢, 能量消耗越低. 系统离死区 S_λ 越近, 最低趋近速度越小; 系统离死区 S_λ 越远, 最低趋近速度越大.

注 2. 其他参数不变的情况下, l_o 越大, 系统处于趋近模态的时间越长, 准滑动模态带越窄, 系统稳态误差越小; l_o 越小, 系统处于趋近模态的时间越短, 准滑动模态带越宽, 系统稳态误差越大; 特别地, 当 $l_o = 0$ 时, 系统处于趋近模态的时间最短, 准滑动模态带最宽, 此时 $S = S_A$.

注 3. 当 $k_1 = 0$ 时, 系统将会一直保持在死区 S_λ 内, 并于 l_o 后处于准滑动模态.

2.3 准滑动模态稳定性分析

通过第 2.2 节的分析可知, 系统状态能够在时刻 $k_1 + k_2$ 到达准滑动模态区 S , 最终转换成准滑动模态. 类似文献 [6], 下面利用 Lyapunov 方法对系统准滑动模态稳定性作进一步分析.

当系统处于准滑动模态时, $l(k) = l_o$, $\mathbf{x}(k) \in S \subset S_\lambda$, $D(s(k)) = 0$. 系统控制律为

$$u(k) = (C^T \Gamma)^{-1} \left\{ -C^T \Phi \mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{l_0} (-1)^i \frac{l_0!}{(l_0-i)!i!} [s(k+1-i) - C^T \Phi \mathbf{x}(k-i) - C^T \Gamma u(k-i)] \right\} = (C^T \Gamma)^{-1} [-C^T \Phi \mathbf{x}(k) + \Delta^{l_0} d(k) - d(k)] \quad (30)$$

将控制输入矩阵 Γ 作奇异值分解

$$\Gamma = U \begin{bmatrix} \Lambda & \\ & 0_{(n-1) \times 1} \end{bmatrix} V^T$$

其中, $U \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbf{R}^n$ 均为酉矩阵, $\Lambda \in \mathbf{R}$, $U = [U_1 \ U_2]$, $U_1 \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $U_2 \in \mathbf{R}^{n \times (n-1)}$.

定义 $W^T = [U_2 \ U_1]$, 则

$$W\Gamma = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ \tilde{\Gamma}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_2 \neq 0$$

对系统 (1) 作非奇异变换 $\mathbf{z}(k) = W\mathbf{x}(k)$, 则系统 (1) 可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1(k+1) &= \tilde{\Phi}_{11} \mathbf{z}_1(k) + \tilde{\Phi}_{12} \mathbf{z}_2(k) \\ \mathbf{z}_2(k+1) &= \tilde{\Phi}_{21} \mathbf{z}_1(k) + \tilde{\Phi}_{22} \mathbf{z}_2(k) + \tilde{\Gamma}_2 u(k) + \tilde{\Gamma}_2 f(k) \end{aligned} \quad (31)$$

其中, $\tilde{\Phi}_{11} = U_2^T \Phi U_2$, $\tilde{\Phi}_{12} = U_2^T \Phi U_1$, $\tilde{\Phi}_{21} = U_1^T \Phi U_2$, $\tilde{\Phi}_{22} = U_1^T \Phi U_1$, $\mathbf{z}_1(k) \in \mathbf{R}^{n-1}$, $\mathbf{z}_2(k) \in \mathbf{R}$. 相应的滑模函数, 控制律和不确定干扰 $d(k)$ 可写为

$$s(k) = C^T \mathbf{x}(k) = C^T W^{-1} W \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1^T & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{z}(k) = \tilde{C}_1^T \mathbf{z}_1(k) + \tilde{C}_2 \mathbf{z}_2(k) \quad (32)$$

其中, $C^T W^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1^T & \tilde{C}_2 \end{bmatrix}$, $\tilde{C}_1 \in \mathbf{R}^{n-1}$, $\tilde{C}_2 \in \mathbf{R}$, 不失一般性, 假设 $\tilde{C}_2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} u(k) &= (C^T \Gamma)^{-1} [-C^T \Phi \mathbf{x}(k) + \Delta^{l_0} d(k) - d(k)] = (\tilde{C}_2 \tilde{\Gamma}_2)^{-1} \left[-\begin{bmatrix} \tilde{C}_1^T & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} \\ \tilde{\Phi}_{21} & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{z}(k) + \Delta^{l_0} d(k) - d(k) \right] = \\ &= -(\tilde{C}_2 \tilde{\Gamma}_2)^{-1} (\tilde{C}_1^T \tilde{\Phi}_{11} + \tilde{C}_2 \tilde{\Phi}_{21}) \mathbf{z}_1(k) - (\tilde{C}_2 \tilde{\Gamma}_2)^{-1} (\tilde{C}_1^T \tilde{\Phi}_{12} + \tilde{C}_2 \tilde{\Phi}_{22}) \mathbf{z}_2(k) + (\tilde{C}_2 \tilde{\Gamma}_2)^{-1} (\Delta^{l_0} d(k) - d(k)) \end{aligned} \quad (33)$$

$$d(k) = C^T \Gamma f(k) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1^T & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ \tilde{\Gamma}_2 \end{bmatrix} f(k) = \tilde{C}_2 \tilde{\Gamma}_2 f(k) \quad (34)$$

系统 (31) 再经过非奇异变换

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(k) \\ s(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{C}_1^T & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(k) \\ \mathbf{z}_2(k) \end{bmatrix}$$

整理可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1(k+1) &= \bar{\Phi}_{11} \mathbf{z}_1(k) + \bar{\Phi}_{12} s(k) \\ s(k+1) &= \bar{\Phi}_{21} \mathbf{z}_1(k) + \bar{\Phi}_{22} s(k) + \bar{\Gamma}_2 u(k) + \bar{\Gamma}_2 f(k) \end{aligned} \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11} &= \tilde{\Phi}_{11} - \tilde{\Phi}_{12} \tilde{C}_2^{-1} \tilde{C}_1^T \\ \bar{\Phi}_{12} &= \tilde{\Phi}_{12} \tilde{C}_2^{-1} \\ \bar{\Phi}_{21} &= \tilde{C}_1^T \tilde{\Phi}_{11} + \tilde{C}_2 \tilde{\Phi}_{21} - (\tilde{C}_1^T \tilde{\Phi}_{12} + \tilde{C}_2 \tilde{\Phi}_{22}) \tilde{C}_2^{-1} \tilde{C}_1^T \\ \bar{\Phi}_{22} &= (\tilde{C}_1^T \tilde{\Phi}_{12} + \tilde{C}_2 \tilde{\Phi}_{22}) \tilde{C}_2^{-1} \\ \bar{\Gamma}_2 &= \tilde{C}_2 \tilde{\Gamma}_2 \end{aligned}$$

将控制律 (33) 代入式 (35), 经整理得到相应的闭环系统动态方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(k+1) \\ s(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{C11} & \bar{\Phi}_{C12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(k) \\ s(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta^{l_0} d(k) \end{bmatrix} \quad (36)$$

其中, $\bar{\Phi}_{C11} = \tilde{\Phi}_{11} - \tilde{\Phi}_{12} \tilde{C}_2^{-1} \tilde{C}_1^T$, $\bar{\Phi}_{C12} = \tilde{\Phi}_{12} \tilde{C}_2^{-1}$.

由于 (Φ, Γ) 具有完全能控性, 所以 $(\tilde{\Phi}_{11}, \tilde{\Phi}_{12})$ 也是具有完全能控性^[6]. 因此, 可以选择适当矩阵 \tilde{C}_1 和 \tilde{C}_2 , 使得 $\bar{\Phi}_{C11}$ 是稳定的. 此时, 对任意正定矩阵 Q , $Q \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, 必存在正定矩阵 P , $P \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, 使得下述关系式成立

$$\bar{\Phi}_{C11}^T P \bar{\Phi}_{C11} - P = -Q \quad (37)$$

定理 2. 系统 (36) 是关于原点的 Ψ 邻域渐近稳定的. 其中, $\Psi = \Omega \cap S$, Ω 是以 $\mathbf{z}_1 = 0$ 为圆心, $\frac{a + \sqrt{a^2 + \lambda_{\min}(Q)b}}{\lambda_{\min}(Q)}$ 为半径的球体,

$$\begin{aligned} a &= \lambda_{\max}(P) A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l_0} \|\bar{\Phi}_{C11}\| \|\bar{\Phi}_{C12}\| \\ b &= A_{d,\max}^2 \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{2l_0} \left[\lambda_{\max}(P) \|\bar{\Phi}_{C12}\|^2 + 4 \sin^2 \frac{\omega T_s}{2} \right] \end{aligned}$$

$\lambda_{\min}(Q)$ 和 $\lambda_{\max}(P)$ 分别表示 Q 的最小奇异值和 P 的最大奇异值.

证明. 选择 Lyapunov 函数

$$V(k) = \mathbf{z}_1^T(k) P \mathbf{z}_1(k) + s^2(k) \quad (38)$$

结合式 (19), 可知 $V(k)$ 沿闭环系统 (36) 的差分增量 $\Delta V(k)$ 为

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) = \\
& \mathbf{z}_1^T(k+1) P \mathbf{z}_1(k+1) + s^2(k+1) - \mathbf{z}_1^T(k) P \mathbf{z}_1(k) - s^2(k) = \\
& [\bar{\Phi}_{C11} \mathbf{z}_1(k) + \bar{\Phi}_{C12} s(k)]^T P [\bar{\Phi}_{C11} \mathbf{z}_1(k) + \bar{\Phi}_{C12} s(k)] - \mathbf{z}_1^T(k) P \mathbf{z}_1(k) + s^2(k+1) - s^2(k) = \\
& \mathbf{z}_1^T(k) \left(\bar{\Phi}_{C11}^T P \bar{\Phi}_{C11} - P \right) \mathbf{z}_1(k) + 2 \mathbf{z}_1^T(k) \bar{\Phi}_{C11}^T P \bar{\Phi}_{C12} s(k) + s(k) \bar{\Phi}_{C12}^T P \bar{\Phi}_{C12} s(k) + s^2(k+1) - s^2(k) = \\
& - \mathbf{z}_1^T(k) Q \mathbf{z}_1(k) + 2 \mathbf{z}_1^T(k) \bar{\Phi}_{C11}^T P \bar{\Phi}_{C12} \Delta^{l_o} d(k-1) + \left[\Delta^{l_o} d(k-1) \right]^2 \bar{\Phi}_{C12}^T P \bar{\Phi}_{C12} + \\
& \Delta^{l_o+1} d(k) \left[\Delta^{l_o} d(k) + \Delta^{l_o} d(k-1) \right] \leq \\
& - \|\mathbf{z}_1(k)\|^2 \lambda_{\min}(Q) + 2 \|\mathbf{z}_1(k)\| \|\bar{\Phi}_{C11}\| \lambda_{\max}(P) \|\bar{\Phi}_{C12}\| \left| \Delta^{l_o} d(k-1) \right| + \left| \Delta^{l_o} d(k-1) \right|^2 \|\bar{\Phi}_{C12}\|^2 \lambda_{\max}(P) + \\
& \left| \Delta^{l_o+1} d(k) \right| \left[\left| \Delta^{l_o} d(k) \right| + \left| \Delta^{l_o} d(k-1) \right| \right] \leq \\
& - \lambda_{\min}(Q) \|\mathbf{z}_1(k)\|^2 + 2 \lambda_{\max}(P) A_{d,\max} \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{l_o} \|\bar{\Phi}_{C11}\| \|\bar{\Phi}_{C12}\| \|\mathbf{z}_1(k)\| + \\
& A_{d,\max}^2 \left(2 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right)^{2l_o} \left[\lambda_{\max}(P) \|\bar{\Phi}_{C12}\|^2 + 4 \sin \frac{\omega T_s}{2} \right] = \\
& - \lambda_{\min}(Q) \|\mathbf{z}_1(k)\|^2 + 2a \|\mathbf{z}_1(k)\| + b = -\lambda_{\min}(Q) \left[\|\mathbf{z}_1(k)\| - \frac{a}{\lambda_{\min}(Q)} \right]^2 + \frac{a^2}{\lambda_{\min}(Q)} + b \quad (39)
\end{aligned}$$

若 $\|\mathbf{z}_1(k)\| > \frac{a + \sqrt{a^2 + \lambda_{\min}(Q)b}}{\lambda_{\min}(Q)}$, 则 $\Delta V(k) < 0$.

由上述分析可知: $\mathbf{z}_1(k)$ 将渐近趋向于以 $\mathbf{z}_1(k) = 0$ 为圆心, $a + \sqrt{a^2 + \lambda_{\min}(Q)b} / \lambda_{\min}(Q)$ 为半径的球体 $\Omega \left(0, \frac{a + \sqrt{a^2 + \lambda_{\min}(Q)b}}{\lambda_{\min}(Q)} \right)$. 同时, 系统 (36) 在 $k \geq k_1 + k_2$ 时刻将一直保持在准滑动模态区 S 中, 所以系统 (36) 将渐近趋向于原点的一个邻域 $\Psi: \Psi = \Omega \cap S$, 即球体 Ω 与准滑动模态区 S 的交集. \square

根据定理 2 可知, 系统 (36) 是关于原点的 Ψ 邻域渐近稳定的. 因此, 系统 (1) 在控制律 (16) 作用下的准滑动模态也是关于原点的某一个相应邻域渐近稳定的.

注 4. 滑模面参数 C^T 可以通过 $\begin{bmatrix} \tilde{C}_1^T & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} W$ 求得.

注 5. 球体 Ω 的半径大小与 l_o 相关. l_o 越大, 球体 Ω 半径越小, 反之越大. 同时, Ω 的半径大小还可以通过 P, Q 来调整.

3 数值算例

考虑二阶不确定离散时间系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) + \Gamma f(k) \quad (40)$$

其中,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(k) = 0.6 \sin(20kT_s)$$

系统初始状态 $\mathbf{x}(0) = [-5 \quad 8]^T$. 已知不确定干扰 $f(k)$ 的幅值 $A \leq A_{f,\max} = 0.6$, $f(k)$ 的角频率 $\omega \leq \omega_{\max} = 8\pi \text{ rad/s}$, 系统采样周期 $T_s = 0.035 \text{ s}$.

取滑模函数 $s(k) = C^T \mathbf{x}(k)$, $C^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{aligned}
d(k) &= C^T \Gamma f(k) = 0.6 \sin(20kT_s) \\
|d(k) - d(k-1)| &< 0.42
\end{aligned}$$

对系统 (40) 利用文献 [5] 提出的离散指数趋近律方法, 文献 [7] 提出的修正离散趋近律方法, 文献 [15] 提出的基于扰动补偿的离散趋近律方法和本文提出的死区离散趋近律方法进行仿真对比研究.

文献中控制律参数分别取 $q = 14.57$, $\xi = 34.29$, $d_o = \frac{d_l + d_u}{2} = 0$, $\delta_d = \frac{d_u - d_l}{2} = 0.6$, d_l 和 d_u 分别为 $d(k)$ 的上界值和下界值:

$$\begin{cases} s_d(k) = \frac{k^* - k}{k^*} s(0), & k < k^* \\ s_d(0) = 0, & k \geq k^* \end{cases}$$

$k^* = 3$, $\Delta_d = 0.42$, $A_{d,\max} = |C^T \Gamma| A_{f,\max} = 0.6$, $\beta_L = 9.3$, $\beta_U = 9.5$, $l_o = 7$. 仿真结果如图 1~4 所示.

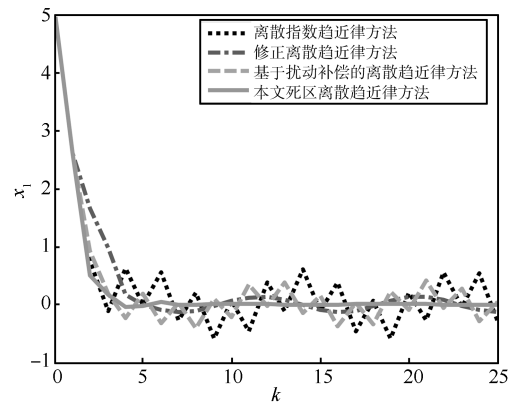
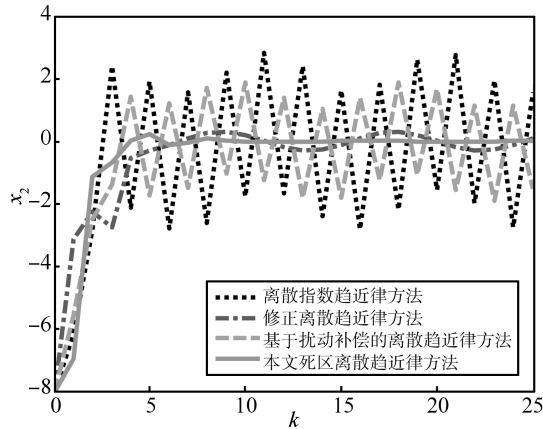
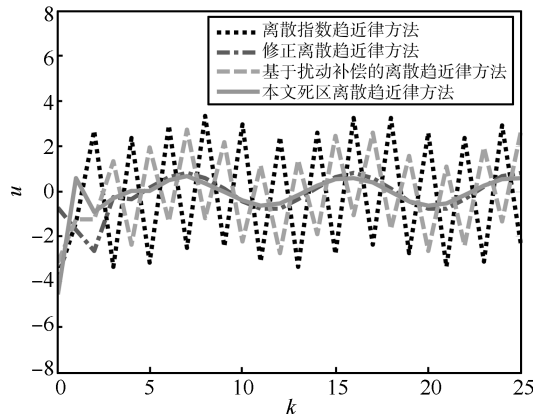
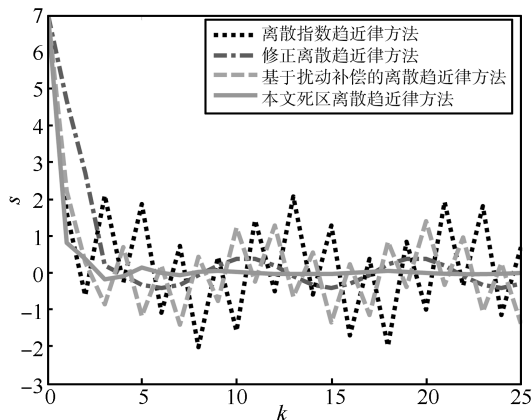


图 1 系统状态 $\mathbf{x}_1(k)$ 动态轨迹

Fig. 1 Trajectories of system state $\mathbf{x}_1(k)$

图2 系统状态 $x_2(k)$ 动态轨迹Fig. 2 Trajectories of system state $x_2(k)$ 图3 系统控制输入 $u(k)$ 动态轨迹Fig. 3 Trajectories of system control input $u(k)$ 图4 滑模函数 $s(k)$ 动态轨迹Fig. 4 Trajectories of sliding function $s(k)$

由仿真结果可以看出:本文提出的死区离散趋近律方法,具有更宽的趋近模态、更窄的准滑动模态带和更小的稳态误差。系统鲁棒性得到进一步增强,无控制抖振和稳态抖振。若以 $J = \sum_{i=0}^{25} |u(i)|$ 作为控制作用总体能量消耗指标,则上述4种方法总体能量消耗为 $J_1 = 71.015$, $J_2 = 15.933$, $J_3 = 46.855$ 和 $J_4 = 14.118$ 。由此可见,本文方法总体能量消耗较少。

4 结论

本文提出了一种基于死区离散趋近律方法的准滑模控制策略,该方法对受正弦干扰的不确定离散时间系统具有更好的控制效果。文中对系统趋近模态和准滑动模态作了具体分析。该方法使得死区 S_λ 外的趋近模态具有单调趋近特征,系统一旦进入死区 S_λ ,将会维持在死区内运动,最终进入准滑动模态区 S 作准滑动模态运动。准滑动模态带具有任意阶次小,系统鲁棒性得到增强,有效改善系统的动态性能和稳态性能。控制律具有累加形式,避免了控制抖振和稳态抖振的出现。该方法可直接推广至不确定多输入离散时间系统。仿真结果验证了理论分析的正确性。

References

- Dot Y, Hoft R G. Microprocessor based sliding mode controller for dc motor drives. In: Proceedings of the Industrial Application Society Annual Meeting. Washington D. C., USA: IEEE, 1980. 641-645
- Milosavljević Č. General conditions for the existence of a quasisliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems. *Automation and Remote Control*, 1985, **46**(3): 307-314
- Sarpturk S Z, Istefanopulos Y, Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, **32**(10): 930-932
- Furuta K. Sliding mode control of a discrete system. *Systems and Control Letters*, 1990, **14**(2): 145-152
- Gao W B, Wang G F, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, **42**(2): 117-122
- Gao Wei-Bing. Variable structure control of discrete-time systems. *Acta Automatica Sinica*, 1995, **21**(2): 154-161 (高为炳. 离散时间系统的变结构控制. *自动化学报*, 1995, **21**(2): 154-161)
- Bartoszewicz A. Discrete-time quasi-sliding-mode control strategies. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1998, **45**(4): 633-637
- Young K D, Utkin V I, Ozguner U. A control engineer's guide to sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999, **7**(3): 328-342
- Eun Y, Cho D D. Robustness of multivariable discrete-time variable structure control. *International Journal of Control*, 1999, **72**(12): 1106-1115
- Golo G, Milosavljević Č. Robust discrete-time chattering free sliding mode control. *Systems and Control Letters*, 2000, **41**(4): 19-28
- Zhai Chang-Lian, Wu Zhi-Ming. Variable structure control design for uncertain discrete time systems. *Acta Automatica Sinica*, 2000, **26**(2): 184-191 (翟长连, 吴智铭. 不确定离散时间系统的变结构控制设计. *自动化学报*, 2000, **26**(2): 184-191)
- Zhou De-Wen, Gao Cun-Chen, Li Zi-Qiang. Reaching law of discrete-time variable structure control system. *Control and Decision*, 2008, **23**(3): 306-309 (周德文, 高存臣, 李自强. 一种离散变结构控制趋近律. *控制与决策*, 2008, **23**(3): 306-309)

- 13 Mi Yang, Li Wen-Lin, Jing Yuan-Wei. Variable structure control for a class of discrete-time system based on power reaching law. *Control and Decision*, 2008, **23**(6): 643–646
(米阳, 李文林, 井元伟. 基于幂次趋近律的一类离散时间系统的变结构控制. *控制与决策*, 2008, **23**(6): 643–646)
- 14 Zhu Qi-Dan, Wang Tong. New variable structure control scheme for discrete-time systems. *Control and Decision*, 2009, **24**(8): 1209–1213
(朱齐丹, 汪瞳. 一种离散时间系统变结构控制的新方法. *控制与决策*, 2009, **24**(8): 1209–1213)
- 15 Qu Shao-Cheng, Wang Yong-Ji. Discrete time sliding mode control based on dynamic disturbance compensator. *Control and Decision*, 2004, **19**(3): 311–314, 318
(瞿少成, 王永骥. 基于扰动动态补偿的离散滑模变结构控制. *控制与决策*, 2004, **19**(3): 311–314, 318)
- 16 Liu Tao, Liu He-Ping, Qu Wei. Quasi-sliding-mode control based on discrete time-variant reaching law. *Control and Decision*, 2010, **25**(5): 797–800
(刘涛, 刘贺平, 屈微. 基于离散时变趋近律的准滑模控制. *控制与决策*, 2010, **25**(5): 797–800)
- 17 Song Li-Zhong, Li Huai-Shu, Yao Qiong-Hui. Discrete-time variable-structure control based on reaching law approach. *Control Theory and Applications*, 2008, **25**(3): 525–528
(宋立忠, 李槐树, 姚琼荟. 基于趋近律方法的离散时间系统变结构控制. *控制理论与应用*, 2008, **25**(3): 525–528)

刘 涛 北京科技大学自动化学院博士研究生, 北京物资学院信息学院讲师. 主要研究方向为滑模控制和数字控制系统. 本文通信作者.

E-mail: liutao19832001@163.com

(**LIU Tao** Ph.D. candidate at the School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing. Lecturer at the School of Information, Beijing Wuzi University. His research interest covers sliding mode control and digital control system. Corresponding author of this paper.)

刘贺平 北京科技大学自动化学院教授. 主要研究方向为复杂系统建模和自适应控制. E-mail: lhpjx@ies.ustb.edu.cn

(**LIU He-Ping** Professor at the School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing. His research interest covers modeling complex system and adaptive control.)
