

## 二进制神经网络中的汉明球突及其线性可分性

杨娟<sup>1</sup> 陆阳<sup>1</sup> 黄镇谨<sup>1</sup> 王强<sup>1</sup>

**摘要** 对于二进制神经网络, 剖析其神经元的逻辑意义对网络的规则提取是十分重要的, 而目前每个神经元所表达的线性结构的逻辑意义仍没有完全解决, 一部分线性函数的结构及其逻辑意义尚不明确. 本文在寻找线性可分结构的过程中, 提出了汉明球突的概念, 给出其是否线性可分的判定方法, 并得到二进制神经元与线性可分的汉明球突等价的充要条件, 从而建立了判别线性可分的汉明球突的一般方法, 并通过实例验证了该方法的有效性.

**关键词** 二进制神经网络, 线性可分函数, 汉明球突, 线性分类

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2011.00737

## Hamming Sphere Dimple in Binary Neural Networks and Its Linear Separability

YANG Juan<sup>1</sup> LU Yang<sup>1</sup> HUANG Zhen-Jin<sup>1</sup> WANG Qiang<sup>1</sup>

**Abstract** It is very important to analyze the logical meaning of neurons for extracting rules from binary neural networks (BNNs). However, the problem is that the logical meaning of linear structure expressed by neurons has not been completely solved and the structure of several linear functions is not clear. To solve this problem, we define a special structure called Hamming sphere dimple and provide the judgment method for linear separability. Furthermore, we obtain the necessary and sufficient condition for the equivalence between the linearly separable Hamming sphere dimple (LSHSD) and the binary neurons. Finally, we propose a general method for judging the LSHSD. This method is validated to be effective to judge the LSHSD through examples.

**Key words** Binary neural networks (BNNs), linearly separable function, Hamming sphere dimple, linear classification

二进制神经网络的一个关键问题是设计不同的网络结构以实现各类布尔函数. 研究表明, 含有一层隐元的二进制神经网络能够完备表达各类布尔逻辑<sup>[1]</sup>, 而实现任意给定的一个布尔函数所使用的二进制神经网络结构的最小规模仍不能确定<sup>[2-4]</sup>. 问题的关键在于布尔函数随着维数的增加, 其个数以级数方式增加, 如 9 维的布尔函数, 共有  $2^{2^9} = 2^{512} \approx 1.34078 \times 10^{154}$  个, 如此巨大的数量比宇宙的年龄都要大<sup>[5]</sup>.

布尔函数从本质上可以分为线性可分函数与非线性可分函数. 线性可分函数仅占整个布尔函数的一小部分, 对于较小的维数 ( $n \leq 9$ ), 文献 [6] 通过枚举法给出了线性可分函数的个数. 该类函数可用一个二进制神经元来表达, 每个二进制神经元也等价于一个线性可分函数, 但二进制神经元的表达形式以分类超平面来描述, 使得函数的信息融合在超平面的权值及阈值中. 从机器学习的角度考虑, 这样并不能反映出函数的本质且缺乏透明性, 在应用上受到限制, 因而需要在二进制神经元和线性可分函数之间建立联系的充要条件. 研究表明, 某些线性可分函数具有相似的逻辑结构和知识内涵, 组成一类线性可分结构

系. 对于某些线性可分结构系已有判别法, 并且有清晰的逻辑意义, 例如各类超立方体<sup>[7]</sup>、汉明球<sup>[8]</sup>、SP 函数<sup>[9]</sup> 以及笛卡尔球<sup>[10-11]</sup>. 同类的线性可分结构系从本质上又可从分类超平面的系数及阈值来进行划分, 但根据阈值在实轴上的取值情况, 已知的线性可分结构系并不包含所有的线性可分函数, 即还存在其他类型的逻辑结构.

另外, 非线性可分函数占了绝大部分的布尔函数<sup>[12]</sup>, 通常实现该类函数是将其分解为一些线性可分函数之间的逻辑运算<sup>[13-14]</sup>, 一般来讲, 在二进制神经网络中隐层神经元的个数和所分解的线性可分函数的个数是相同的, 故寻找最短的非线性可分函数的分解方法是优化网络结构的关键问题<sup>[15-18]</sup>. 如果二进制神经网络中的每个神经元都对应于某种线性可分结构, 则可以将任一非线性可分函数有目标地划分为某几种线性可分结构之间的逻辑运算, 故研究线性可分结构系对二进制神经元的覆盖问题及网络结构的优化都有着重要意义.

本文在已有线性可分结构系的基础上, 首先, 提出了汉明球突的概念, 并给出汉明球突是否线性可分的判定方法; 其次, 通过对该结构逻辑内涵的分析, 建立了线性可分的汉明球突在二进制神经元中的等价判别法, 从而又增加了一类可判别的线性可分结构系, 这对解决二进制神经元的覆盖问题很有意义.

收稿日期 2010-12-20 录用日期 2011-02-18  
Manuscript received December 20, 2010; accepted February 18, 2011

1. 合肥工业大学计算机与信息学院 合肥 230009  
1. School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009

### 1 相关概念

$B_2$  表示  $\{0, 1\}$  二元域,  $F$  是  $B_2^n \rightarrow B_2$  的任意映射, 称  $F$  为  $n$  元布尔函数,  $B_2^n$  构成了  $n$  维布尔函数样本空间. 对于所有  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n$ , 以  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  表示  $F$  在  $X$  处的取值, 简记为  $F(X)$ , 称  $X$  为  $B_2^n$  中的样本,  $F(X)$  为样本值,  $F(X) \in B_2$ .

首先对汉明球进行说明.

**定义 1.** 集合  $F^{-1}(1) = \{X \in B_2^n \mid F(X) = 1\}$ ,  $F^{-1}(0) = \{X \in B_2^n \mid F(X) = 0\}$ .

**定义 2.** 在  $B_2^n$  中, 对于样本  $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ , 如果存在集合  $U(d) = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n \mid d_H(X^c, X) \leq d\}$ , 使得  $U(d) = F^{-1}(1)$ ,  $\overline{U(d)} = F^{-1}(0)$ , 其中,  $d$  是位于区间  $[0, n]$  中的整数, 则  $U(d)$  称为以  $X^c$  为中心, 半径为  $d$  的汉明球,  $d_H(X^c, X)$  为  $X^c$  与  $X$  之间的汉明距离.

**定义 3.** 集合  $G = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$

$$1) C(G) = \begin{cases} k, & G \neq \emptyset \\ 0, & G = \emptyset \end{cases}$$

$$2) AS(G) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k |e_i|, & G \neq \emptyset \\ 0, & G = \emptyset \end{cases}$$

$$3) G_{[m]} \subseteq G, C(G_{[m]}) = m$$

$$4) G_{[m]}^L \subseteq G, C(G_{[m]}^L) = m,$$

$$\text{对 } \forall G_{[m]}, AS(G_{[m]}^L) \leq AS(G_{[m]})$$

$$5) G_{[m]}^H \subseteq G, C(G_{[m]}^H) = m,$$

$$\text{对 } \forall G_{[m]}, AS(G_{[m]}^H) \geq AS(G_{[m]})$$

根据布尔空间线性可分的概念, 设  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是定义于  $\{0, 1\}$  的线性可分布尔函数,  $\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = 0$  是  $F$  的分类超平面, 则  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$  时,  $\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta \geq 0$ ;  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  时,  $\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta < 0$ . 对于如下结构的二进神经元

$$O = U \left( \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta \right), U(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

则称二进神经元  $O$  表达布尔函数  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 记  $O$  为  $O(X, W, \theta)$ , 其中

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

### 2 汉明球突及其判别法

**定义 4.** 在  $B_2^n$  中, 对于样本  $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ , 如果存在集合  $U(d) = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n \mid d_H(X^c, X) \leq d\}$ , 及  $K(d+1) = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^{-1}(1) \mid d_H(X^c, X) = d+1\}$ , 使得  $U(d) \cup K(d+1) = F^{-1}(1)$ ,  $\overline{U(d) \cup K(d+1)} = F^{-1}(0)$ , 其中,  $d$  是位于区间  $[0, n]$  中的整数,  $C(K(d+1)) = m$ , 则  $M(d, m) = U(d) \cup K(d+1)$  称为以  $X^c$  为中心, 半径为  $d$  的  $m$ -阶汉明球突,  $K(d+1)$  为突点集.

下面介绍汉明图, 利用汉明图可以得到汉明球突是否线性可分的判定方法.

**定义 5.**  $n$  维汉明图  $HG = \langle V, E \rangle$  表示  $n$  维汉明几何空间的一个  $n$  次正则图. 其节点集  $V$  有  $2^n$  个节点, 每个节点对应  $n$  元布尔函数  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的一个样本  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 即相当于  $n$  维超立方体的一个顶点. 若  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ , 称  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  为真节点; 若  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , 称  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  为伪节点.  $HG$  的边集  $E$  有  $2^{n+1}$  条边, 每条边邻接两节点间的汉明距离均为 1.

汉明图在核心节点未确定之前是无向图, 确定之后是有向图. 并规定核心节点为第 0 层. 图 1 是  $n = 4$ , 核心节点为  $(0, 0, 0, 0)$  的汉明图. 将图中节点编码与所要求的不同核心节点的二进制码作按位相加, 即可得到任意核心节点的有向汉明图.

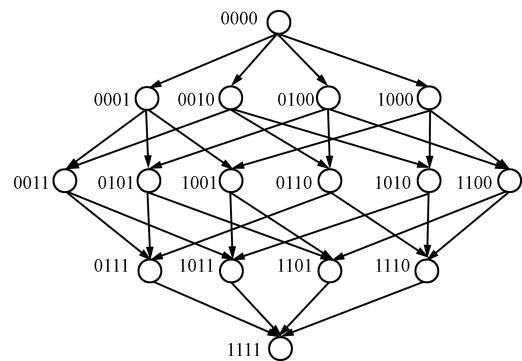


图 1  $n = 4$ , 核心节点为  $(0, 0, 0, 0)$  的汉明图  
Fig. 1 The Hamming-graph with the center node  $(0, 0, 0, 0)$ ,  $n = 4$

对于中心为  $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ , 半径为  $d$  的汉明球  $U(d)$ , 其对应的汉明图即为核心节点为  $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ , 从第 0 层一直到第  $d$  层节点都为真节点, 其余节点均为伪节点.

对于中心为  $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ , 半径为  $d$  的汉明球突  $M(d, m)$ , 其对应的汉明图即为核心节点

为  $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ , 从第 0 层一直到第  $d$  层节点都为真节点, 第  $d+1$  层有  $m$  个节点为真节点, 其余的节点都为伪节点.

**定义 6.** 设确定核心节点的汉明图  $HG = \langle V, E \rangle$  中有  $C_0$  个真节点, 取  $C_i = \sum_{m=1}^{C_0} x_i^m$ , 取权值  $w_i = 2C_i - C_0, i = 1, 2, \dots, n$ , 则称  $H(X^k) = \sum_{i=1}^n w_i x_i^k$  为节点  $X^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$  的加权高度.

**引理 1**<sup>[19]</sup>. 对于确定核心节点的汉明图  $HG = \langle V, E \rangle$ , 第  $d$  层节点的加权高度一定不大于第  $d-1$  层其父节点的加权高度.

**定理 1.** 对于以  $X^c$  为中心的汉明球突  $M(d, m)$ , 与中心  $X^c$  的汉明距离为  $d, d+1, d+2$  的 3 层节点中, 若真节点的加权高度大于任意伪节点的加权高度, 则该汉明球突线性可分.

**证明.** 对于汉明球突  $M(d, m)$ , 由定义 6 计算得到权值  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . 设与中心  $X^c$  汉明距离为  $d$  的节点集合为  $S(d)$ ,  $m$  个突点为  $K(d+1) = \{X^1, X^2, \dots, X^m\}$ , 第  $d+1$  层伪节点集合为  $L(d+1) = \{X | F(X) = 0, d_H(X, X^c) = d+1\}$ , 与中心  $X^c$  汉明距离为  $d+2$  的节点集合为  $S(d+2)$ . 由引理 1, 故只需比较第  $d$  层, 第  $d+1$  层真节点  $S(d)$  及  $K(d+1)$  与第  $d+1$  层, 第  $d+2$  层伪节点  $L(d+1)$  及  $S(d+2)$  的加权高度, 记  $t_{\min} = \min\{H(X) | X \in K(d+1) \cup S(d)\}$ ,  $f_{\max} = \max\{H(X) | X \in L(d+1) \cup S(d+2)\}$ , 由定理条件可知  $t_{\min} > f_{\max}$ , 再由几何学习算法<sup>[20]</sup>, 取分类超平面为  $\sum_{i=1}^n w_i x_i - (t_{\min} + f_{\max})/2 = 0$ , 故该汉明球突线性可分.  $\square$

汉明球突中, 存在一些是线性可分, 一些是线性不可分的, 并且对于相同中心、相同半径及具有同样突点个数的两个汉明球突, 随着突点不同, 其线性可分性也可能不同. 图 2 和图 3 均是中心为  $(0, 0, 0, 0)$ , 半径为 1 的汉明球突  $M(1, 2)$ , 图中实心节点为真节点, 空心节点为伪节点. 根据定理 1 可以判定, 图 2 为线性可分的汉明球突, 图 3 为线性不可分的汉明球突.

特别地, 当  $d = 0$  时的汉明球突, 从几何上讲, 即距离中心节点  $X^c$  汉明距离为 1 的任意个样本集合. 文献 [10] 证明了该类结构是线性可分的, 文献 [11] 给出了该类结构的逻辑意义, 故  $d = 0$  时的汉明球突即为笛卡尔球.

下面给出线性可分的汉明球突的判别定理.

**定理 2.** 若  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{-1, 1\}, i = 1, 2, \dots, n$ , 对于如下结构的二进神经元  $O(X, W, \theta)$ :

$$O = U\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta\right), \quad U(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

**证明.** 设  $Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta$ .

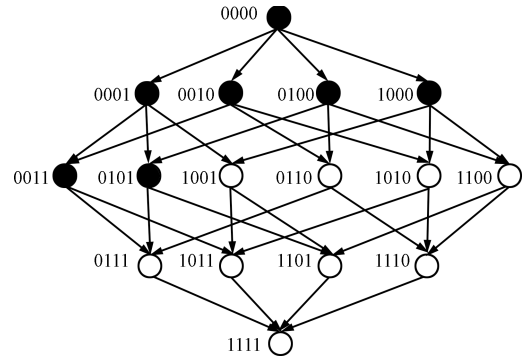


图 2 线性可分的汉明球突

Fig. 2 The linearly separable Hamming sphere dimple

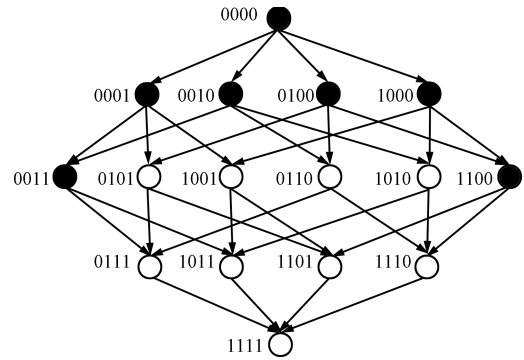


图 3 线性不可分的汉明球突

Fig. 3 The non-linearly separable Hamming sphere dimple

则  $O(X, W, \theta)$  表达线性可分的汉明球突  $M(d, m)$  的充要条件是  $\theta_1 < \theta \leq \theta_2$ .

其中

$$\begin{aligned} \theta_1 &= AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^H) \\ \theta_2 &= AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^L) \end{aligned} \quad (1a)$$

并且

$$\begin{aligned} \theta &\leq AS(W) - 2AS(W_{[d]}^H) \\ \theta &> AS(W) - 2AS(W_{[d+2]}^L) \end{aligned} \quad (1b)$$

其中, 该汉明球突  $M(d, m)$  的中心是  $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ ,  $x_i^c$  满足

$$x_i^c = \begin{cases} 1, & w_i > 0 \\ -1, & w_i < 0 \end{cases}$$

**充分性**

若

$$\theta \in (AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^H), AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^L))$$

将  $AS(W_{[d+1]})$  排序, 即为

$$AS(W_{[d+1]}^H) = AS(W_{[d+1]}^k) > AS(W_{[d+1]}^{k-1}) > \dots > AS(W_{[d+1]}^2) > AS(W_{[d+1]}^1) = AS(W_{[d+1]}^L)$$

进一步找出  $\theta$  所属区间范围, 若

$$\theta \in (AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^t), AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^{t-1}))$$

$t \in \{2, 3, \dots, k\}$  时, 设  $W_{[d+1]}$  中满足  $AS(W_{[d+1]}^1) = AS(W_{[d+1]}^1)$  共有  $s_1$  种情况, 设其所使用权集  $W$  中元素的角标的集合分别为  $W_1^1, W_2^1, \dots, W_{s_1}^1$ ; 类似地, 设  $W_{[d+1]}$  中满足  $AS(W_{[d+1]}^j) = AS(W_{[d+1]}^j)$ ,  $j = 2, 3, \dots, t-1$ , 分别共有  $s_j$  种情况, 设其所使用权集  $W$  中元素的角标的集合分别为  $W_1^2, W_2^2, \dots, W_{s_2}^2, \dots, W_1^{t-1}, W_2^{t-1}, \dots, W_{s_{t-1}}^{t-1}$ .

设  $X^c$  为中心, 对  $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n$  中的元素分为与中心节点  $X^c$  的汉明距离为小于  $d+1$ , 等于  $d+1$ , 大于  $d+1$  的 3 个部分分别证明:

1) 对  $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n$ ,  $d_H(X, X^c) = q$ ,  $q < d+1$  时, 则  $X$  与  $X^c$  有  $q$  位不同, 设为  $J = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$ , 则

$$\begin{aligned} Y(X) &= \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = \sum_{i \notin J} w_i x_i + \sum_{i \in J} w_i x_i - \theta = \\ &= \sum_{i \notin J} w_i x_i^c + \sum_{i \in J} w_i \bar{x}_i^c - \theta = \\ &= \sum_{i \notin J} w_i x_i^c - \sum_{i \in J} w_i x_i^c - \theta = \\ &= \sum_{i=1}^n w_i x_i^c - 2 \sum_{i \in J} w_i x_i^c - \theta = \\ &= AS(W) - 2 \sum_{i \in J} |w_i| - \theta \end{aligned}$$

由于  $\sum_{i \in J} |w_i| \leq AS(W_{[d]}^H)$ , 且  $\theta \leq AS(W) - 2AS(W_{[d]}^H)$ , 有

$$\begin{aligned} Y(X) &= \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = \\ &= AS(W) - 2 \sum_{i \in J} |w_i| - \theta \geq \\ &= AS(W) - 2AS(W_{[d]}^H) - \theta \geq 0 \end{aligned}$$

2) 设  $N = \{X \mid \forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n, d_H(X, X^c) = d+1\}$ , 将  $N$  分为两部分,  $A$  与  $B$ , 且  $N = A \cup B, A \cap B = \emptyset$ : 对于  $A$  中的样本  $X$ , 设其与  $X^c$  不同位置集合为  $W_l^j, j \in \{1, 2, \dots, t-1\}, l \in \{1, 2, \dots, \max(s_1, s_2, \dots, s_{t-1})\}$ ; 对于  $B$  中样本, 设其与  $X^c$  不同位置的集合为  $P$ .

若  $X \in A$ , 类似地, 有

$$\begin{aligned} Y(X) &= \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = \\ &= \sum_{i \notin W_l^j} w_i x_i + \sum_{i \in W_l^j} w_i x_i - \theta = \\ &= \sum_{i \notin W_l^j} w_i x_i^c + \sum_{i \in W_l^j} w_i \bar{x}_i^c - \theta = \\ &= AS(W) - 2 \sum_{i \in W_l^j} |w_i| - \theta \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \sum_{i \in W_l^j} |w_i| &\leq AS(W_{[d+1]}^{t-1}) < AS(W_{[d+1]}^t), \\ j &\in \{1, 2, \dots, t-1\}, \\ l &\in \{1, 2, \dots, \max(s_1, s_2, \dots, s_{t-1})\} \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \theta &\in (AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^t), \\ &AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^{t-1})) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} Y(X) &= AS(W) - 2 \sum_{i \in W_l^j} |w_i| - \theta \geq \\ &= AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^{t-1}) - \theta \geq 0 \end{aligned}$$

若  $X \in B$ ,

$$\begin{aligned} Y(X) &= \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = \\ &= \sum_{i \notin P} w_i x_i + \sum_{i \in P} w_i x_i - \theta = \\ &= \sum_{i \notin P} w_i x_i^c + \sum_{i \in P} w_i \bar{x}_i^c - \theta = \\ &= AS(W) - 2 \sum_{i \in P} |w_i| - \theta \end{aligned}$$

由于  $\sum_{i \in P} |w_i| \geq AS(W_{[d+1]}^t)$ , 及

$$\begin{aligned} \theta &\in (AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^t), \\ &AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^{t-1})) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} Y(X) &= AS(W) - 2 \sum_{i \in P} |w_i| - \theta \leq \\ &= AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^t) - \theta < 0 \end{aligned}$$

3) 若  $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n$ ,  $d_H(X, X^c) = q$ ,  $q > d + 1$  时, 则  $X$  与  $X^c$  有  $q$  位不同, 设为  $Q = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$ , 则

$$Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = AS(W) - 2 \sum_{i \in Q} |w_i| - \theta$$

由于  $\sum_{i \in Q} |w_i| \geq AS(W_{[d+2]}^L)$ , 且  $\theta > AS(W) - 2AS(W_{[d+2]}^L)$ , 故有

$$Y(X) = AS(W) - 2 \sum_{i \in Q} |w_i| - \theta \leq AS(W) - 2AS(W_{[d+2]}^L) - \theta < 0$$

综上: 若  $X \in U(d) \cup A$ , 则  $Y(X) \geq 0$ ; 若  $X \in B$ , 则  $Y(X) < 0$ ; 若  $d_H(X, X^c) > d + 1$ , 则  $Y(X) < 0$ . 所以  $O(X, W, \theta)$  表达线性可分的汉明球突  $M(d, m) = U(d) \cup A$ , 其中, 突点集即为集合  $A$ , 共有  $m = \sum_{i=1}^{t-1} s_i$  个突点, 故充分性得证.

**必要性**

若  $O(X, W, \theta)$  表达汉明球突  $M(d, m) = U(d) \cup K(d+1)$ , 则该汉明球突线性可分. 设汉明球突的中心为  $X^c$ , 对  $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n$  中的元素分为与中心节点  $X^c$  的汉明距离为等于  $d+1$ , 小于  $d+1$ , 大于  $d+1$  的 3 个部分分别证明:

1) 对于  $N = \{X \mid X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n, d_H(X, X^c) = d + 1\}$ , 将  $N$  分为两部分, 一部分为汉明球突的突点集  $K(d+1)$ , 另一部分记为  $L = N - K(d+1)$ .

由于汉明球突线性可分, 且用  $O(X, W, \theta)$  表达, 则有若  $X \in K(d+1)$ , 则  $Y(X) \geq 0$ , 即  $Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta \geq 0$ , 若  $X \in L$ , 则  $Y(X) < 0$ , 即  $Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta < 0$ , 进一步设

$$a = \min \left\{ Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta \mid X \in K(d+1) \right\} \quad (2)$$

$$b = \max \left\{ Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta \mid X \in L \right\} \quad (3)$$

并且有  $a > b$ .

记  $X^a = \{X \mid Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = a, X \in K(d+1)\}$ , 设集合  $X^a$  中元素个数为  $s$  个,

并设每个元素与中心  $X^c$  不同位置的集合分别为

$$\begin{aligned} A^1 &= \{r_1^1, r_2^1, \dots, r_d^1, r_{d+1}^1\}, \\ A^2 &= \{r_1^2, r_2^2, \dots, r_d^2, r_{d+1}^2\}, \\ &\vdots \\ A^s &= \{r_1^s, r_2^s, \dots, r_d^s, r_{d+1}^s\} \end{aligned}$$

记  $X^b = \{X \mid Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = b, X \in L\}$ , 设集合  $X^b$  中元素个数为  $k$  个, 并设每个元素与中心  $X^c$  不同位置的集合分别为

$$\begin{aligned} B^1 &= \{t_1^1, t_2^1, \dots, t_d^1, t_{d+1}^1\}, \\ B^2 &= \{t_1^2, t_2^2, \dots, t_d^2, t_{d+1}^2\}, \\ &\vdots \\ B^k &= \{t_1^k, t_2^k, \dots, t_d^k, t_{d+1}^k\} \end{aligned}$$

若  $X \in K(d+1)$ , 有

$$\begin{aligned} Y(X) &= \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = \\ &\sum_{X \text{ 与 } X^c \text{ 相同位置 } i} w_i x_i + \sum_{X \text{ 与 } X^c \text{ 不同位置 } i} w_i x_i - \theta = \\ &\sum_{X \text{ 与 } X^c \text{ 相同位置 } i} w_i x_i^c + \sum_{X \text{ 与 } X^c \text{ 不同位置 } i} w_i \bar{x}_i^c - \theta = \\ &\sum_{X \text{ 与 } X^c \text{ 相同位置 } i} w_i x_i^c - \sum_{X \text{ 与 } X^c \text{ 不同位置 } i} w_i x_i^c - \theta = \\ &\sum_{i=1}^n w_i x_i^c - 2 \sum_{X \text{ 与 } X^c \text{ 不同位置 } i} w_i x_i^c - \theta = \\ &AS(W) - 2 \sum_{X \text{ 与 } X^c \text{ 不同位置 } i} |w_i| - \theta \end{aligned}$$

再由式 (2) 可得

$$Y(X) \geq a = AS(W) - 2 \sum_{i \in A^j} |w_i| - \theta \geq 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, s\} \quad (4)$$

及

$$\sum_{i \in A^j} |w_i| = \max \left\{ \sum_{X \in K(d+1) \text{ 且与 } X^c \text{ 不同位置 } i} |w_i| \right\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, s\} \quad (5)$$

根据式 (4) 可得

$$\theta \leq AS(W) - 2 \sum_{i \in A^j} |w_i|, \quad j \in \{1, 2, \dots, s\} \quad (6)$$

若  $X \in L$ , 类似地, 有

$$Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = AS(W) - 2 \sum_{X \text{与} X^c \text{不同位置 } i} |w_i| - \theta$$

再由式 (3) 可得

$$Y(X) \leq b = AS(W) - 2 \sum_{i \in B^l} |w_i| - \theta < 0, \quad l \in \{1, 2, \dots, k\} \quad (7)$$

及

$$\sum_{i \in B^l} |w_i| = \min \left\{ \sum_{X \in L \text{且与} X^c \text{不同位置 } i} |w_i| \right\}, \quad l \in \{1, 2, \dots, k\} \quad (8)$$

根据式 (7) 可得

$$\theta > AS(W) - 2 \sum_{i \in B^l} |w_i|, \quad l \in \{1, 2, \dots, k\} \quad (9)$$

由式 (6) 和式 (9) 可得

$$AS(W) - 2 \sum_{i \in B^l} |w_i| < \theta \leq AS(W) - 2 \sum_{i \in A^j} |w_i|, \quad j \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad l \in \{1, 2, \dots, k\} \quad (10)$$

再由式 (5) 和式 (8) 及  $a > b$ , 对于任意  $j, l$  可得

$$\sum_{i \in B^l} |w_i| = \min \left\{ \sum_{X \in L \text{且与} X^c \text{不同位置 } i} |w_i| \right\} > \sum_{i \in A^j} |w_i| = \max \left\{ \sum_{X \in K(d+1) \text{且与} X^c \text{不同位置 } i} |w_i| \right\} \quad (11)$$

由式 (11), 再将  $AS(W_{[d+1]})$  排序, 即

$$AS(W_{[d+1]}^H) \geq \sum_{X \in L \text{且与} X^c \text{不同位置 } i} |w_i| \geq$$

$$\min \left\{ \sum_{X \in L \text{且与} X^c \text{不同位置 } i} |w_i| \right\} = \sum_{i \in B^l} |w_i| >$$

$$\sum_{i \in A^j} |w_i| = \max \left\{ \sum_{X \in K(d+1) \text{且与} X^c \text{不同位置 } i} |w_i| \right\} \geq$$

$$\sum_{X \in K(d+1) \text{且与} X^c \text{不同位置 } i} |w_i| \geq AS(W_{[d+1]}^L) \quad (12)$$

联合式 (10) 和式 (12), 进一步有

$$AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^H) < \theta \leq AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^L) \quad (13)$$

2) 对于  $U(d)$ , 若  $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U(d)$ , 则有  $d_H(X, X^c) = q, q < d + 1$ , 则  $X$  与  $X^c$  有  $q$  位不同, 设为  $J = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$ , 则

$$Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = \sum_{i \notin J} w_i x_i + \sum_{i \in J} w_i x_i - \theta = AS(W) - 2 \sum_{i \in J} |w_i| - \theta \geq 0$$

故  $\theta \leq AS(W) - 2 \sum_{i \in J} |w_i|$ , 又由于  $\sum_{i \in J} |w_i| \leq AS(W_{[d]}^H)$ , 故

$$\theta \leq AS(W) - 2AS(W_{[d]}^H) \quad (14)$$

3) 对于  $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n$ ,  $d_H(X, X^c) = q, q > d + 1$ , 则  $X$  与  $X^c$  有  $q$  位不同, 设为  $Q = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$ , 则

$$Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = \sum_{i \notin Q} w_i x_i + \sum_{i \in Q} w_i x_i - \theta = AS(W) - 2 \sum_{i \in Q} |w_i| - \theta < 0$$

故  $\theta > AS(W) - 2 \sum_{i \in Q} |w_i|$ , 又由于  $\sum_{i \in Q} |w_i| \geq AS(W_{[d+2]}^L)$ , 故

$$\theta > AS(W) - 2AS(W_{[d+2]}^L) \quad (15)$$

由式 (13)~(15), 故必要性得证.  $\square$

**推论 1.** 若  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n$ , 对于如下结构的二进神经元  $O(X, W, \theta)$ :

$$O = U \left( \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta \right), U(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

则  $O(X, W, \theta)$  表达线性可分的汉明球突  $M(d, m)$  的充要条件是  $\theta_1 < \theta \leq \theta_2$ . 其中

$$\theta_1 = \frac{1}{2} AS(W) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i - AS(W_{[d+1]}^H) \quad (16a)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} AS(W) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i - AS(W_{[d+1]}^L)$$

并且

$$\begin{aligned} \theta &\leq \frac{1}{2}AS(W) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i - AS(W_{[d]}^H) \\ \theta &> \frac{1}{2}AS(W) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i - AS(W_{[d+2]}^L) \end{aligned} \quad (16b)$$

其中, 该汉明球突  $M(d, m)$  的中心是  $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ ,  $x_i^c$  满足

$$x_i^c = \begin{cases} 1, & w_i > 0 \\ 0, & w_i < 0 \end{cases}$$

**证明.** 对于  $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n$ ,  $Y(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta$ , 设  $z_i = 2x_i - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 故  $z_i \in \{-1, 1\}$ ,  $x_i = (z_i + 1)/2$ .

$$\begin{aligned} Y(X) &= \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = \sum_{i=1}^n w_i \frac{z_i + 1}{2} - \theta = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{2} z_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i - \theta \end{aligned}$$

设  $W^* = \{\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \dots, \frac{w_n}{2}\}$ ,  $T = \theta - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i$ ,  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , 对于二进神经元  $S(Z, W^*, T)$ , 由定理 2 得证.  $\square$

下面给出在  $\{0, 1\}$  二元域上的二进神经元  $O(X, W, \theta)$  表达线性可分的汉明球突  $M(d, m)$  的判别步骤:

**步骤 1.** 初始化  $d = 0$ ;

**步骤 2.** 计算  $AS(W_{[d]}^H)$ ,  $AS(W_{[d+1]}^L)$ ,  $AS(W_{[d+1]}^H)$ ,  $AS(W_{[d+2]}^L)$ ;

**步骤 3.** 若满足式 (16), 则该二进神经元  $O(X, W, \theta)$  表达  $M(d, m)$ , 中心为

$$x_i^c = \begin{cases} 1, & w_i > 0 \\ 0, & w_i < 0 \end{cases}$$

从定理 2 的证明过程可确定突点位置, 即

$$1) \frac{1}{2}AS(W) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i - AS(W_{[d+1]}^H) < \theta \leq$$

$$\frac{1}{2}AS(W) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i - AS(W_{[d+1]}^L)$$

2) 将  $AS(W_{[d+1]})$  排序:

$$AS(W_{[d+1]}^H) = AS(W_{[d+1]}^k) > AS(W_{[d+1]}^{k-1}) > \dots > AS(W_{[d+1]}^2) > AS(W_{[d+1]}^1) = AS(W_{[d+1]}^L)$$

3) 精确阈值取值范围:

$$\begin{aligned} \theta &\in (AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^t), \\ &AS(W) - 2AS(W_{[d+1]}^{t-1})), \quad t \in \{2, 3, \dots, k\} \end{aligned}$$

4)  $AS(W_{[d+1]}^1), AS(W_{[d+1]}^2), \dots, AS(W_{[d+1]}^{t-1})$  中包含的权值位置取 1, 不包含的权值位置取 0, 即为所有的突点.

**步骤 4.** 若不满足式 (16), 如果  $d < n - 1$ , 则  $d = d + 1$ , 返回步骤 2 继续判别, 否则判别过程结束.

### 3 举例分析

**例 1.** 对于图 2 中的全部样本进行学习, 用随机初始权值  $W^0 = \{0.5060, 0.6691, 0.8909, 0.9593\}$  及阈值  $\theta^0 = 0.5472$ , 学习步长  $h = 0.05$ , 采用感知器学习算法在一个二进神经元中学习, 收敛得到的  $W = \{-0.1940, -0.1009, -0.1091, -0.0907\}$ ,  $\theta = -0.2028$ , 即从权值  $W$  得表 1. 其中,  $A = \frac{1}{2}AS(W) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 w_i = 0$ . 分析可得: 当  $d = 1$  时, 满足式 (16), 故为汉明球突, 并且中心在  $(0, 0, 0, 0)$ , 从阈值分析, 可得到突点即为  $(0, 0, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 0, 1)$ , 完全符合图 2 结构.

表 1 例 1 学习结果分析

Table 1 Analyzing the result of Example 1

	$AS(W_{[d+1]}^L)$	$AS(W_{[d+1]}^H)$	$\theta_1 = A - AS(W_{[d+1]}^H)$	$\theta_2 = A - AS(W_{[d+1]}^L)$
$d = 0$	0.0907	0.1940	-0.1940	-0.0907
$d = 1$	0.1916	0.3031	-0.3031	-0.1916
$d = 2$	0.3007	0.4040	-0.4040	-0.3007
$d = 3$	0.4947	0.4947	-0.4947	-0.4947

**例 2.**  $B_2^6$  空间  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ,  $D_1 = \{5, 9, 12, 13, 15, 17, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 44, 45, 52, 53, 56, 57, 60, 61, 63\}$ , 在  $B_2^6$  中  $D_1 = F^{-1}(1)$ ,  $D_1$  所对应的卡诺图如图 4.

选择随机初始权值  $W^0 = \{0.8147, 0.9058, 0.1270, 0.9134, 0.6324, 0.0975\}$  及阈值  $\theta^0 = 0.2785$ , 学习步长  $h = 0.05$ , 采用感知器学习算法在一个二进神经元中学习, 收敛得到  $W = \{0.3147, -0.5942, 0.5270, 0.5134, 0.4324, -0.3525\}$ ,  $\theta = 0.5785$ , 从权值  $W$  得表 2. 其中,  $A = \frac{1}{2}AS(W) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 w_i = 1.7875$ . 分析可得: 当  $d = 2$  时,  $\theta_1 < \theta \leq \theta_2$ , 且  $\theta \leq \frac{1}{2}AS(W) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 w_i - AS(W_{[2]}^H) = 0.6663$ ,  $\theta > \frac{1}{2}AS(W) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 w_i - AS(W_{[4]}^L) = 0.1745$ , 故  $D_1$  是一个汉明球突, 半径  $d = 2$ , 且中心是  $X^c = (1, 0, 1, 1, 1, 0)$ , 进一步可以确定突点为 3 个, 分别是  $(0, 0, 1, 0, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$  和  $(0, 0, 1, 1, 0, 1)$ .

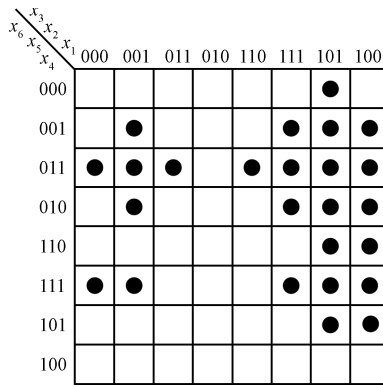
图 4  $D_1$  卡诺图Fig. 4 Karnaugh map of  $D_1$ 

表 2 例 2 学习结果分析

Table 2 Analyzing the result of Example 2

	$AS(W_{[d+1]}^L)$	$AS(W_{[d+1]}^H)$	$\theta_1 = A-$ $AS(W_{[d+1]}^H)$	$\theta_2 = A-$ $AS(W_{[d+1]}^L)$
$d = 0$	0.3147	0.5942	1.1933	1.4728
$d = 1$	0.6672	1.1212	0.6663	1.1203
$d = 2$	1.0996	1.6346	0.1529	0.6879
$d = 3$	1.6130	2.0670	-0.2795	0.1745
$d = 4$	2.1400	2.4195	-0.6320	-0.3525
$d = 5$	2.7342	2.7342	-0.9467	-0.9467

## 4 结论

在布尔空间中, 各种线性可分结构都存在各自的空间结构特性. 本文通过对二进制神经网络中已知线性可分结构的研究, 提出了一类新的线性可分结构系, 即线性可分的汉明球突. 首先, 指出其线性可分的判据; 其次, 建立了与二进制神经元的等价判别法; 最后, 通过实例验证了该方法的有效性. 该结果增加了一种具有清晰空间结构的线性可分结构系, 为二进制神经元的覆盖问题做出了有意义的工作. 事实上, 在  $B_2^n$  空间中除了已知的线性可分结构及本文提出的线性可分的汉明球突外, 还存在其他类型的线性可分结构, 这将是下一步的研究工作.

## References

- Lu Yang, Han Jiang-Hong, Gao Jun. Research on the minimal upper bound of the number of hidden nodes in binary neural networks. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2000, **13**(3): 254–257  
(陆阳, 韩江洪, 高隽. 二进制神经网络隐元数目最小上界研究. 模式识别与人工智能, 2000, **13**(3): 254–257)
- Chen F Y, Chen G R, He G L, Xu X B, He Q B. Universal perceptron and DNA-like learning algorithm for binary neural networks: LSBF and PBF implementations. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2009, **20**(10): 1645–1658
- Chen F Y, Chen G R, He Q B, He G L, Xu X B. Universal perceptron and DNA-like learning algorithm for binary neural networks: non-LSBF implementation. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2009, **20**(8): 1293–1301
- Lu Y, Yang J, Wang Q, Huang Z J. The upper bound of the minimal number of hidden neurons for the parity problem by binary neural networks. *Science China Information Sciences*, to be published
- Chua L O. CNN: a paradigm for complexity. *Visions of Non-linear Science in the 21st Century*. Singapore: World Scientific, 1999
- Chen F Y, He G L, Chen G R. Realization of boolean functions via CNN: mathematical theory, LSBF and template design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2006, **53**(10): 2203–2213
- Lu Yang, Han Jiang-Hong, Zhang Wei-Yong. Logical relation determination criteria and equivalence rule extraction on binary neural networks. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2001, **14**(2): 171–176  
(陆阳, 韩江洪, 张维勇. 二进制神经网络逻辑关系判据及等价性规则提取. 模式识别与人工智能, 2001, **14**(2): 171–176)
- Lu Yang, Wei Zhen, Gao Jun, Han Jiang-Hong. Logical meaning of Hamming sphere and its general judgement method in binary neural networks. *Journal of Computer Research and Development*, 2002, **39**(1): 79–86  
(陆阳, 魏臻, 高隽, 韩江洪. 二进制神经网络中汉明球的逻辑意义及一般判别方法. 计算机研究与发展, 2002, **39**(1): 79–86)
- Lu Yang, Han Jiang-Hong, Wei Zhen. A general judging and constructing method of SP functions in binary neural networks. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(2): 234–241
- Ma Xiao-Min, Yang Yi-Xian, Zhang Zhao-Zhi. A new framework and some results for threshold function. *Chinese Journal of Computers*, 2000, **23**(3): 225–230  
(马晓敏, 杨义先, 章照止. 一种新的阈值函数的分析框架及有关结论. 计算机学报, 2000, **23**(3): 225–230)
- Lu Yang, Han Jiang-Hong, Zhang Wei-Yong. Study of cartesian sphere in binary neural networks. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2004, **17**(3): 368–373  
(陆阳, 韩江洪, 张维勇. 二进制神经网络中笛卡尔球的研究. 模式识别与人工智能, 2004, **17**(3): 368–373)
- Wegener I. *The Complexity of Boolean Functions*. New York: Wiley, 1987
- Crounse K R, Fung E L, Chua L O. Efficient implementation of neighborhood logic for cellular automata via the cellular neural network universal machine. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1997, **44**(4): 355–361



- 14 Nemes L, Chua L O, Roska A T. Implementation of arbitrary boolean functions on a CNN universal machine. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 1998, **26**(6): 593–610
- 15 Haykin S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation (Second Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 1998
- 16 Negnevitsky M. *Artificial Intelligence: A Guide to Intelligent Systems (Second Edition)*. New Jersey: Addison-Wesley, 2004
- 17 Hassoun M H. *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. Massachusetts: The MIT Press, 1995
- 18 Gray D L, Michel A N. A training algorithm for binary feedforward neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1992, **3**(2): 176–194
- 19 Hua Qiang, Zheng Qi-Lun. The Hamming-graph learning algorithm of BNN. *Chinese Journal of Computer*, 2001, **24**(11): 1250–1255  
(华强, 郑启伦. 二进神经网络的汉明图学习算法. *计算机学报*, 2001, **24**(11): 1250–1255)
- 20 Kim J H, Park S K. The geometrical learning of binary neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1995, **6**(1): 237–247



杨娟 合肥工业大学计算机与信息学院博士研究生. 2009 年获得合肥工业大学数学学院硕士学位. 主要研究方向为人工智能和神经网络.

E-mail: yangjuan6985@163.com

(**YANG Juan** Ph.D. candidate at the School of Computer and Information, Heifei University of Technology.

She received her master degree from Heifei University of Technology in 2009. Her research interest covers artificial intelligence and neural networks.)



陆阳 合肥工业大学计算机与信息学院教授. 主要研究方向为人工智能, 计算机控制和传感器网络. 本文通信作者.

E-mail: luyang.hf@126.com

(**LU Yang** Professor at the School of Computer and Information, Heifei University of Technology. His research interest covers artificial intelligence, computer control, and sensor network. Corresponding author of this paper.)



黄镇谨 合肥工业大学计算机与信息学院博士研究生. 2005 年获得华南理工大学计算机学院硕士学位. 主要研究方向为人工智能和计算机控制.

E-mail: schzj@163.com

(**HUANG Zhen-Jin** Ph.D. candidate at the School of Computer and Information, Heifei University of Technol-

ogy. He received his master degree from South China University of Technology in 2005. His research interest covers artificial intelligence and computer control.)



王强 合肥工业大学计算机与信息学院博士研究生. 2008 年获得合肥工业大学计算机与信息学院硕士学位. 主要研究方向为软件冗余技术, 系统可靠性设计与分析.

E-mail: wangqiang.hfut@gmail.com

(**WANG Qiang** Ph.D. candidate at the School of Computer and Information, Heifei University of Technology. He received his master degree from Heifei University of Technology in 2008. His research interest covers software redundant technology, and system reliability design and analysis.)