

# 基于单领航者相对位置测量的多 AUV 协同导航系统定位性能分析

李闻白<sup>1</sup> 刘明雍<sup>1</sup> 李虎雄<sup>2,3</sup> 陈学永<sup>4,5</sup>

**摘要** 自主水下航行器 (Autonomous underwater vehicle, AUV) 的协同导航是解决水下导航定位问题的重要方法, 其中导航系统的定位误差增长特性是衡量其定位性能的关键指标. 本文针对单领航者相对位置测量的多 AUV 协同导航系统, 利用扩展卡尔曼滤波方法建立了导航系统的整体定位误差关于相对位置量测误差的传递方程. 在此基础上, 通过求解系统定位误差随时间演化的代数黎卡提方程, 得到了其在稳态情形下的方差上界估计. 理论分析表明, 单领航 AUV 协同导航系统的整体定位误差有界收敛且与初始化滤波方差无关, 具有良好的综合性能. 最后, 仿真实例验证了文中理论分析结果的正确性.

**关键词** 单领航者, 自主水下航行器, 协同导航, 相对位置测量, 扩展卡尔曼滤波, 方差上界估计

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2011.00724

## Localization Performance Analysis of Cooperative Navigation System for Multiple AUVs Based on Relative Position Measurements with a Single Leader

LI Wen-Bai<sup>1</sup> LIU Ming-Yong<sup>1</sup> LI Hu-Xiong<sup>2,3</sup> CHEN Xue-Yong<sup>4,5</sup>

**Abstract** The cooperative navigation of autonomous underwater vehicles (AUVs) is an important approach to solve the underwater navigation problems in which the localization error growth property is a key indicator. This paper deals with the performance analysis of the multi-AUV navigation system based on relative position measurements with a single leader. First, propagation equations are derived by using an extended Kalman filter. These equations can describe the system's global positioning error related to the measurement errors. Then, the upper bound of the covariance estimation in the steady state is obtained by solving an algebraic Riccati equation which characterizes the evolution of the system's positioning error. Theoretical analysis shows that the global positioning error of this navigation system can converge to an upper bound. Furthermore, the convergence is independent of the initial filter covariance, that is, the navigation system has a good comprehensive performance. Finally, simulation results validate the usefulness of the theoretical analysis.

**Key words** Single leader, autonomous underwater vehicle (AUV), cooperative navigation, relative position measurements, extended Kalman filter, upper bound of the covariance estimation

在水下环境中, 由于全球定位系统 (Global positioning system, GPS) 不再适用, 导航问题成为发展自主水下航行器 (Autonomous underwater vehicle, AUV) 所面临的重要挑战<sup>[1-2]</sup>. 相比于传统

的长基线 (Long baseline, LBL)、短基线 (Short baseline, SBL) 和超短基线 (Ultra-short baseline, USBL) 等导航方法, 利用多个 AUV 实现协同导航是目前发展水下定位与导航技术的新方向. 该方法无需事先布放海底基阵和水面船只等辅助设备, 能够有效降低 AUV 导航系统的硬件复杂度, 使用成本较低, 广泛适用于 AUV 在大范围海域执行各种任务的需求<sup>[3-5]</sup>.

基于单领航者相对位置测量的导航方法是一种主从式 (Leader-follower) 多 AUV 协同导航方法, 其原理如图 1 所示. 主 AUV (领航者, Leader) 装备有高精度的导航通讯设备 (如 GPS、磁罗盘、多普勒速度仪、深度计和水听器), 从 AUV (跟随者, Follower) 配备的传感器精度相对较低. 利用 AUV 间的水声通讯, 可以测量出各个采样时刻主、从 AUV 间的相对位置信息, 如相对距离  $r_{k-1}^{AB}$ ,  $r_k^{AB}$ ,  $r_{k+1}^{AB}$ , 相对方位  $\theta_{k-1}^{AB}$ ,  $\theta_k^{AB}$ ,  $\theta_{k+1}^{AB}$ . AUV 在各采样周期内的相对位移由自身的航位推算获得, 如  $\Delta p_{k-1,k}^A$ ,  $\Delta p_{k,k+1}^A$

收稿日期 2010-06-01 录用日期 2011-02-18  
Manuscript received June 1, 2010; accepted February 18, 2011  
国家自然科学基金 (50979093), 航空科学基金 (2008ZC53070), 新世纪优秀人才计划 (NCET-06-0877) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (50979093), Aviation Science Fund of China (2008ZC53070), and Program for New Century Excellent Talents in University (NECT-06-0877)  
1. 西北工业大学航海学院 西安 710072 2. 西北工业大学自动化学院 西安 710072 3. 温州大学瓯江学院 温州 325000 4. 西北工业大学机电学院 西安 710072 5. 中航光电科技股份有限公司 洛阳 471003  
1. School of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072 2. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072 3. Oujiang College, Wenzhou University, Wenzhou 325000 4. School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072 5. Avic China Aviation Optical-Electrical Technology Co., Ltd, Luoyang 471003

和  $\Delta p_{k-1,k}^B$ ,  $\Delta p_{k,k+1}^B$  (图 1). 此外, 每个从 AUV 可以与邻近的若干从 AUV 通讯, 实现相互间的信息共享与相对位置测量. 根据上述量测信息并结合 AUV 的运动学方程, 利用扩展卡尔曼滤波 (Extended Kalman filter, EKF) 方法就可以求取各从 AUV 在不同采样时刻的定位估计.

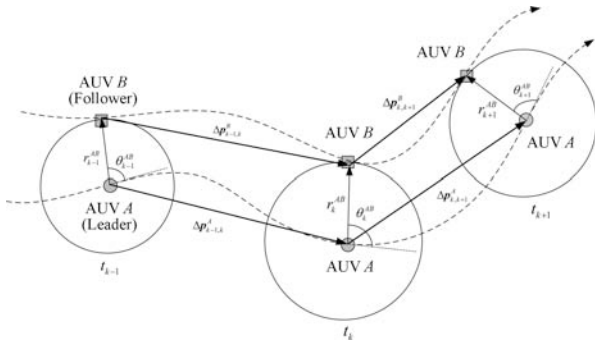


图 1 基于单领航者相对位置测量的多 AUV 协同导航系统  
Fig. 1 Cooperative navigation system of multiple AUVs based on relative position measurements with a single leader

但是, 考虑到水下环境的不确定性和水声通信的复杂性, 多 AUV 协同导航系统的定位性能受到系统内部和外部等多种因素的制约<sup>[3-5]</sup>. 内部因素是指由传感器精度、洋流漂移和欠驱动特性等引起的 AUV 间相对位置 (包括距离、方位等) 的量测误差; 外部因素主要指水声通信延迟、窄带宽等限制对诸 AUV 间的通讯、数据传输带来的影响, 即通讯受限问题. 针对通讯受限条件下的多 AUV 协同导航, Freitag<sup>[6]</sup> 和 Singh<sup>[7]</sup> 等提出的 OWTT 测距技术, Larsen<sup>[8]</sup> 等提出的带有延时量测数据的卡尔曼滤波方法等一系列成果有效提高了导航系统的数据传输效率和滤波估计精度, 这里不再详述. 本文将主要研究相对位置量测误差对单领航 AUV 协同导航系统定位性能的影响.

有关多 AUV 协同导航系统定位性能的研究, 已有的工作主要基于单固定信标 (Single fixed beacon) 的导航系统展开. Baccou<sup>[9-12]</sup> 等针对 AUV 与信标间相对位置测量中的常值洋流漂移问题, 通过 AUV 自身的适当机动对洋流影响进行了初步分析, 利用 Levenberg-Marquardt 算法得到了导航系统误差关于相对位置量测误差的 Cramér-Rao 下界. Gadre<sup>[13-17]</sup> 等从 AUV 导航系统的运动学和动力学特性入手, 分析了 AUV 的欠驱动特性对相对位置量测的影响, 建立了导航系统的定位误差关于相对位置量测误差的传递方程, 并详细讨论了 AUV 的路径可观测性与导航系统定位性能之间的关系. 针对主从式多 AUV 协同导航系统定位性能的研究较

少, 主要来自于 Kalwa<sup>[18-20]</sup> 等和 Bahr<sup>[21-22]</sup> 等的工作. 这些研究表明, 由于 AUV 受到洋流、欠驱动特性的影响产生漂移, 导致其相对位置测量值与实际情况并不吻合. Bahr 和 Leonard 工作组通过水面实验证实了上述相对位置量测误差对导航系统定位性能的影响, 并依据实验结果指出单领航 AUV 协同导航系统的整体定位误差可控<sup>[21]</sup>.

总的说来, 以上研究工作对多 AUV 协同导航系统的定位性能进行了有益的理论 and 实践探索, 但对基于单领航者 AUV 协同导航系统的研究尚处于起步阶段, 还有一些问题需要考虑. 例如, 导航系统的整体定位误差关于相对位置量测误差的传递关系、定位误差的方差上界估计、定位误差的收敛性等. 本文针对这些问题, 立足于严格的数学推演, 深入研究了单领航者相对位置测量的多 AUV 协同导航系统的定位性能. 本文的主要贡献在于:

1) 结合单领航 AUV 协同导航系统的运动学模型, 利用 EKF 方法建立了系统的整体定位误差关于相对位置量测误差的传递方程.

2) 通过分析、求解协同导航系统的定位误差随时间演化的代数黎卡提方程, 在系统达到稳态时建立了定位误差的方差上界估计.

3) 对单领航 AUV 协同导航系统进行了可观测性分析, 证明了系统的整体定位误差有界收敛.

4) 文中的分析方法同样适用于单固定信标的多 AUV 协同导航系统 (将单固定信标作为主 AUV 来考虑), 具有广泛的实用性.

本文组织如下: 第 1 节和第 2 节基于 EKF 方法, 分别给出了导航系统的状态估计和相对位置量测的误差传递方程; 第 3 节给出了导航系统定位误差的方差上界估计, 并对其收敛性进行了分析和证明; 第 4 节给出了相应的仿真结果; 第 5 节是本文的结论及对后续研究工作的展望.

## 1 状态估计的误差传播

由于 AUV 的深度值可以精确测量, 不失一般性, 假设由  $N$  个成员 (记为  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ ) 组成的 AUV 编队位于同一深度. 设  $(x, y)$  表示 AUV 在公共坐标系  $\{\Sigma: O-XY\}$  下的位置坐标,  $\phi$  为航向角,  $v$  为前向合成速度,  $\Delta t$  为传感器采样周期. 则由图 2 可知, AUV  $\mathcal{A}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) 的离散时间运动学方程为

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ y_i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i(k) \\ y_i(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_i(k) \cos \phi_i(k) \\ v_i(k) \sin \phi_i(k) \end{bmatrix} \Delta t \quad (1)$$

相应于式 (1) 的卡尔曼滤波方程为

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_i(k+1|k) \\ \hat{y}_i(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_i(k|k) \\ \hat{y}_i(k|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{m_i}(k) \cos \hat{\phi}_i(k) \\ v_{m_i}(k) \sin \hat{\phi}_i(k) \end{bmatrix} \Delta t \quad (2)$$

其中,  $v_{m_i}(k)$ ,  $\hat{\phi}_i(k)$  分别是  $\mathcal{A}_i$  在时刻  $k$  的量测速度与航向角估计.

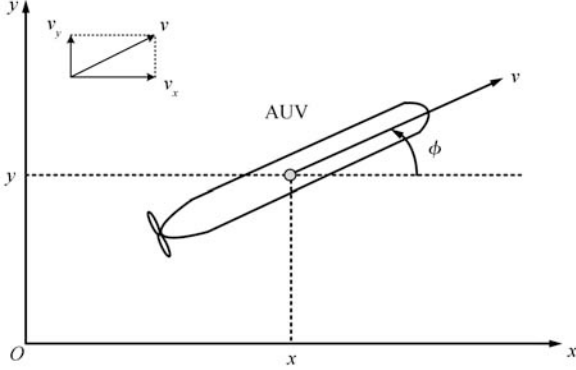


图 2 AUV 的运动学模型

Fig. 2 The kinematic model of AUV

将非线性运动方程 (1) 和 (2) 线性化后作差, 可得 AUV  $\mathcal{A}_i$  的定位估计误差传播方程

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_i(k+1|k) \\ \tilde{y}_i(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_i(k|k) \\ \tilde{y}_i(k|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t \cos \hat{\phi}_i(k) & -v_{m_i}(k) \Delta t \sin \hat{\phi}_i(k) \\ \Delta t \sin \hat{\phi}_i(k) & v_{m_i}(k) \Delta t \cos \hat{\phi}_i(k) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_{v_i}(k) \\ \tilde{\phi}_i(k) \end{bmatrix} \quad (3)$$

记

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i(k) &= [x_i(k), y_i(k)]^T \\ \hat{\mathbf{X}}_i(k) &= [\hat{x}_i(k), \hat{y}_i(k)]^T \\ \tilde{\mathbf{X}}_i(k) &= \mathbf{X}_i(k) - \hat{\mathbf{X}}_i(k) = [\tilde{x}_i(k), \tilde{y}_i(k)]^T \\ W_i(k) &= \begin{bmatrix} w_{v_i}(k) \\ \tilde{\phi}_i(k) \end{bmatrix} \\ G_i(k) &= \begin{bmatrix} \Delta t \cos \hat{\phi}_i(k) & -v_{m_i}(k) \Delta t \sin \hat{\phi}_i(k) \\ \Delta t \sin \hat{\phi}_i(k) & v_{m_i}(k) \Delta t \cos \hat{\phi}_i(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

可将式 (3) 重新写为

$$\tilde{\mathbf{X}}_i(k+1|k) = I_2 \tilde{\mathbf{X}}_i(k|k) + G_i(k) W_i(k) \quad (5)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{X}}_i(k)$  表示 AUV  $\mathcal{A}_i$  的定位估计误差,  $w_{v_i}(k)$  是影响速度量测的零均值高斯白噪声,  $\tilde{\phi}_i(k)$  是航向角估计误差, 服从零均值方差为  $\sigma_{\phi_i}^2$  的正态分布.

由式 (5) 可得 AUV  $\mathcal{A}_i$  的系统噪声方差矩阵

$$\begin{aligned} Q_i(k) &= E\{G_i(k)W_i(k)W_i^T(k)G_i^T(k)\} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \hat{\phi}_i(k) & -\sin \hat{\phi}_i(k) \\ \sin \hat{\phi}_i(k) & \cos \hat{\phi}_i(k) \end{bmatrix} \Delta t \begin{bmatrix} \sigma_{v_i}^2 & 0 \\ 0 & v_{m_i}^2(k) \sigma_{\phi_i}^2 \end{bmatrix} \times \\ &= \Delta t \begin{bmatrix} \cos \hat{\phi}_i(k) & \sin \hat{\phi}_i(k) \\ -\sin \hat{\phi}_i(k) & \cos \hat{\phi}_i(k) \end{bmatrix} = \\ &= C(\hat{\phi}_i(k)) \begin{bmatrix} \Delta t^2 \sigma_{v_i}^2 & 0 \\ 0 & \Delta t^2 v_{m_i}^2(k) \sigma_{\phi_i}^2 \end{bmatrix} C^T(\hat{\phi}_i(k)) \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $C(\phi_i(k))$  是关于航向角  $\phi_i(k)$  的旋转矩阵.

利用上述结论可以得到由  $N$  个 AUV 组成的导航系统整体的定位估计误差传播方程

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}(k+1|k) &= I_{2N} \tilde{\mathbf{X}}(k|k) + \\ &= \begin{bmatrix} G_1(k) & O_{2 \times 2} & \cdots & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & G_2(k) & \cdots & O_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} & \cdots & G_N(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1(k) \\ W_2(k) \\ \vdots \\ W_N(k) \end{bmatrix} = \\ &= I_{2N} \tilde{\mathbf{X}}(k|k) + G(k)W(k) \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k) &= [\mathbf{X}_1^T(k), \cdots, \mathbf{X}_N^T(k)]^T \\ \hat{\mathbf{X}}(k) &= [\hat{\mathbf{X}}_1^T(k), \cdots, \hat{\mathbf{X}}_N^T(k)]^T \\ \tilde{\mathbf{X}}(k) &= \mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}(k) = [\tilde{\mathbf{X}}_1^T(k), \cdots, \tilde{\mathbf{X}}_N^T(k)]^T \\ G(k) &= \text{diag}\{[G_1(k), \cdots, G_N(k)]\} \\ W(k) &= [W_1^T(k), \cdots, W_N^T(k)]^T \end{aligned} \quad (8)$$

$\tilde{\mathbf{X}}(k)$  是导航系统的整体定位误差估计向量. 系统的整体噪声方差阵为

$$Q(k) = E\{G(k)W(k)W^T(k)G^T(k)\} = \text{diag}\{[Q_1(k), \cdots, Q_N(k)]\} \quad (9)$$

因此, 系统状态估计误差的方差传播方程为

$$P(k+1|k) = P(k|k) + Q(k) \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} P(k|k) &= E\{\tilde{\mathbf{X}}(k|k)\tilde{\mathbf{X}}^T(k|k)\} \\ P(k+1|k) &= E\{\tilde{\mathbf{X}}(k+1|k)\tilde{\mathbf{X}}^T(k+1|k)\} \end{aligned} \quad (11)$$

分别是时刻  $k$  和  $k+1$  状态估计误差的方差矩阵.

## 2 相对位置量测的误差传播

在每个采样时刻, 假设 AUV  $\mathcal{A}_i$  可以获得自身关于邻近的  $M_i$  个 AUV 间的相对位置测量值, 记  $\mathcal{N}_i \subset \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N\} \setminus \{\mathcal{A}_i\}$  表示由这  $M_i$  个 AUV 构成的集合. 设  $\mathcal{T}_{ij}$  表示由  $\mathcal{A}_i$  测得的第  $j$  个相对位置测量值所对应的 AUV 成员, 即  $\mathcal{T}_{ij} \in \mathcal{N}_i, j = 1, \dots, M_i$ . 则 AUV  $\mathcal{A}_i$  与  $\mathcal{T}_{ij}$  之间的相对位置量测方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{ij}(k+1) &= C^T(\phi_i(k+1)) \times \\ &[\mathbf{X}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1) - \mathbf{X}_i(k+1)] + \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{Z}_{ij}}(k+1) \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{Z}_{ij}}(k+1)$  是相对位置量测过程中的高斯白噪声干扰.

利用式 (12) 可以得到量测误差方程为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_{ij}(k+1) &= \mathbf{Z}_{ij}(k+1) - \hat{\mathbf{Z}}_{ij}(k+1) = \\ &C^T(\phi_i(k+1))[\mathbf{X}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1) - \mathbf{X}_i(k+1)] - \\ &C^T(\hat{\phi}_i(k+1))[\hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1|k) - \hat{\mathbf{X}}_i(k+1|k)] + \\ &\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{Z}_{ij}}(k+1) = \\ &C^T(\phi_i(k+1))[\tilde{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1|k) - \tilde{\mathbf{X}}_i(k+1|k)] + \\ &(C^T(\phi_i(k+1)) - C^T(\hat{\phi}_i(k+1))) \times \\ &[\hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1|k) - \hat{\mathbf{X}}_i(k+1|k)] + \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{Z}_{ij}}(k+1) = \\ &\boldsymbol{\Upsilon}_1 + \boldsymbol{\Upsilon}_2 + \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{Z}_{ij}}(k+1) \end{aligned} \quad (13)$$

由于

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Upsilon}_1 &= C^T(\phi_i(k+1)) \times \\ &[\tilde{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1|k) - \tilde{\mathbf{X}}_i(k+1|k)] \doteq \\ &C^T(\hat{\phi}_i(k+1)) \times \\ &[\tilde{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1|k) - \tilde{\mathbf{X}}_i(k+1|k)] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Upsilon}_2 &= (C^T(\phi_i(k+1)) - C^T(\hat{\phi}_i(k+1))) \times \\ &[\hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1|k) - \hat{\mathbf{X}}_i(k+1|k)] \doteq \\ &-\begin{bmatrix} \sin \hat{\phi}_i(k+1) & -\cos \hat{\phi}_i(k+1) \\ \cos \hat{\phi}_i(k+1) & \sin \hat{\phi}_i(k+1) \end{bmatrix} \tilde{\phi}_i(k+1) \times \\ &[\hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1|k) - \hat{\mathbf{X}}_i(k+1|k)] = \\ &-C^T(\hat{\phi}_i(k+1))J\tilde{\phi}_i(k+1) \times \\ &[\hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1|k) - \hat{\mathbf{X}}_i(k+1|k)] \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\phi}_i(k+1) = \phi_i(k+1) - \hat{\phi}_i(k+1) \quad (16)$$

将式 (14)~(16) 代入式 (13), 可得

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_{ij}(k+1) &= C^T(\hat{\phi}_i(k+1)) \times \\ &[\tilde{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1|k) - \tilde{\mathbf{X}}_i(k+1|k)] - \\ &C^T(\hat{\phi}_i(k+1))J\tilde{\phi}_i(k+1) \times \\ &[\hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1|k) - \hat{\mathbf{X}}_i(k+1|k)] + \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{Z}_{ij}}(k+1) = \\ &C^T(\hat{\phi}_i(k+1)) \times \\ &\begin{bmatrix} O_{2 \times 2} & \cdots & \underbrace{-I_2}_{\mathcal{A}_i} & \cdots & \underbrace{I_2}_{\mathcal{T}_{ij}} & \cdots & O_{2 \times 2} \end{bmatrix} \times \\ &[\cdots \tilde{\mathbf{X}}_i^T(k+1|k) \cdots \tilde{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}^T(k+1|k) \cdots]^T + \\ &\begin{bmatrix} I_2 & -C^T(\hat{\phi}_i(k+1))J\widehat{\Delta p}_{ij}(k+1|k) \end{bmatrix} \times \\ &\begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{Z}_{ij}}(k+1) \\ \tilde{\phi}_i(k+1) \end{bmatrix} = \\ &H_{ij}(k+1)\tilde{\mathbf{X}}(k+1|k) + \Gamma_{ij}(k+1)\boldsymbol{\zeta}_{ij}(k+1) \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta p}_{ij}(k+1|k) &= \hat{\mathbf{X}}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1|k) - \hat{\mathbf{X}}_i(k+1|k) \\ \Gamma_{ij}(k+1) &= \begin{bmatrix} I_2 & -C^T(\hat{\phi}_i(k+1))J\widehat{\Delta p}_{ij}(k+1|k) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\zeta}_{ij}(k+1) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{Z}_{ij}}(k+1) \\ \tilde{\phi}_i(k+1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

并且相对位置量测矩阵可以写为

$$\begin{aligned} H_{ij}(k+1) &= C^T(\hat{\phi}_i(k+1))H_{o,ij} \\ H_{o,ij} &= \begin{bmatrix} O_{2 \times 2} & \cdots & \underbrace{-I_2}_{\mathcal{A}_i} & \cdots & \underbrace{I_2}_{\mathcal{T}_{ij}} & \cdots & O_{2 \times 2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

由式 (19) 可得 AUV  $\mathcal{A}_i$  与  $M_i$  个 AUV 成员之间的相对位置量测矩阵

$$\begin{aligned} H_i(k+1) &= \\ &\begin{bmatrix} C^T(\hat{\phi}_i(k+1))H_{o,i1} \\ C^T(\hat{\phi}_i(k+1))H_{o,i2} \\ \vdots \\ C^T(\hat{\phi}_i(k+1))H_{o,iM_i} \end{bmatrix} = \Phi_{\hat{\phi}_i}^T(k+1)H_{o,i} \end{aligned} \quad (20)$$

其中,  $H_{o,i}$  是由  $H_{o,ij}$  ( $j = 1, \dots, M_i$ ) 构成的常数矩阵,

$$\Phi_{\hat{\phi}_i}(k+1) = I_{M_i} \otimes C(\hat{\phi}_i(k+1)) \quad (21)$$

是由  $C(\hat{\phi}_i(k+1))$  构成的分块矩阵,  $\otimes$  表示矩阵的克罗内克乘积.

AUV  $\mathcal{A}_i$  与  $\mathcal{T}_{ij}$  之间量测误差的方差为

$$\begin{aligned} R_{jj}^i(k+1) &= E\{\Gamma_{ij}(k+1)\zeta_{ij}(k+1) \times \\ &\quad \zeta_{ij}^T(k+1)\Gamma_{ij}^T(k+1)\} = \\ &R_{Z_{ij}}(k+1) + R_{\tilde{\phi}_{ij}}(k+1) \end{aligned} \quad (22)$$

由式 (22) 可知, 量测误差由两部分组成, 其中  $R_{Z_{ij}}(k+1)$  是相对位置量测噪声  $\zeta_{Z_{ij}}(k+1)$  的方差,

$$\begin{aligned} R_{\tilde{\phi}_{ij}}(k+1) &= C^T(\hat{\phi}_i(k+1))J\widehat{\Delta p}_{ij}(k+1|k) \times \\ &E\{\tilde{\phi}_i^2(k+1)\widehat{\Delta p}_{ij}^T(k+1|k)J^TC(\hat{\phi}_i(k+1)) = \\ &\sigma_{\tilde{\phi}_i}^2 C^T(\hat{\phi}_i(k+1))J\widehat{\Delta p}_{ij}(k+1|k) \times \\ &\widehat{\Delta p}_{ij}^T(k+1|k)J^TC(\hat{\phi}_i(k+1)) \end{aligned} \quad (23)$$

是由航向角估计误差  $\tilde{\phi}_i(k+1)$  引入的方差. 可以看到, AUV  $\mathcal{A}_i$  和  $\mathcal{T}_{ij}$  之间的相对距离估计  $\hat{r}_{ij}(k+1|k) = \|\widehat{\Delta p}_{ij}(k+1|k)\|$  对航向角估计误差  $\tilde{\phi}_i(k+1)$  的方差  $\sigma_{\tilde{\phi}_i}^2$  具有放大效应.

AUV  $\mathcal{A}_i$  与  $\mathcal{T}_{ij}$  之间的每一组相对位置量测值  $Z_{ij}(k+1)$  由 AUV  $\mathcal{A}_i$  局部坐标系下的距离  $r_{ij}(k+1)$  和方位角  $\theta_{ij}(k+1)$  确定. 因此, 为了便于计算相对位置量测噪声  $\zeta_{Z_{ij}}(k+1)$  的方差  $R_{Z_{ij}}(k+1)$ , 可将量测方程 (12) 转化为 AUV  $\mathcal{A}_i$  的局部坐标表示形式. 下面首先建立关于 AUV  $\mathcal{A}_i$  的局部坐标系.

如图 3 所示, 以 AUV  $\mathcal{A}_i$  在  $k+1$  时刻的位置  $\mathbf{X}_i(k+1) = (x_i(k+1), y_i(k+1))^T$  为原点建立局部坐标系  $\{\Sigma_i : A - X_i Y_i\}$ , 其中  $X_i$  指向  $\mathcal{A}_i$  的运动方向,  $Y_i$  与  $X_i$  相互垂直. 由图中的几何关系可知, 局部坐标系下的相对位置量测量与公共参考系之间的转换关系为

$$\begin{aligned} r_{ij}(k+1) &= \|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \\ &\|\widehat{\Delta p}_{ij}(k+1)\| = \left(\widehat{\Delta p}_{ij}^T(k+1)\widehat{\Delta p}_{ij}(k+1)\right)^{\frac{1}{2}} \\ \theta_{ij}(k+1) &= \arctan\left(\frac{y_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1) - y_i(k+1)}{x_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1) - x_i(k+1)}\right) - \\ &\phi_i(k+1) \end{aligned} \quad (24)$$

至此, 可以写出 AUV  $\mathcal{A}_i$  与  $\mathcal{T}_{ij}$  之间的相对位置量测方程 (12) 在局部坐标系  $\{\Sigma_i : A - X_i Y_i\}$  下的表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{ij}(k+1) &= C^T(\phi_i(k+1)) \times \\ &[\mathbf{X}_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1) - \mathbf{X}_i(k+1)] + \zeta_{Z_{ij}}(k+1) = \end{aligned}$$

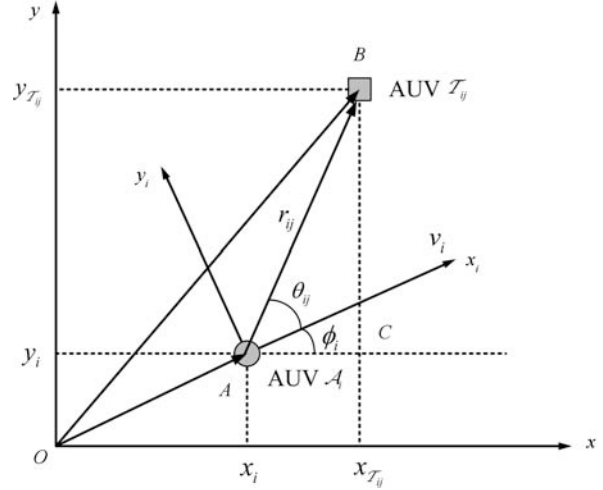


图 3 AUV  $\mathcal{A}_i$  的局部坐标系

Fig. 3 The local coordinate system of AUV  $\mathcal{A}_i$

$$\begin{aligned} &\left[ \begin{aligned} &(x_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1) - x_i(k+1)) \cos \phi_i(k+1) + \\ &-(x_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1) - x_i(k+1)) \sin \phi_i(k+1) + \\ &(y_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1) - y_i(k+1)) \sin \phi_i(k+1) \\ &(y_{\mathcal{T}_{ij}}(k+1) - y_i(k+1)) \cos \phi_i(k+1) \end{aligned} \right] + \\ &\zeta_{Z_{ij}}(k+1) = \\ &\left[ \begin{aligned} &r_{ij}(k+1) \cos \theta_{ij}(k+1) \\ &r_{ij}(k+1) \sin \theta_{ij}(k+1) \end{aligned} \right] + \zeta_{Z_{ij}}(k+1) \end{aligned} \quad (25)$$

将  $\zeta_{Z_{ij}}(k+1)$  线性化, 得到

$$\begin{aligned} \zeta_{Z_{ij}}(k+1) &= \\ &\left[ \begin{aligned} &\cos \hat{\theta}_{ij}(k+1) & -\hat{r}_{ij}(k+1) \sin \hat{\theta}_{ij}(k+1) \\ &\sin \hat{\theta}_{ij}(k+1) & \hat{r}_{ij}(k+1) \cos \hat{\theta}_{ij}(k+1) \end{aligned} \right] \times \\ &\left[ \begin{aligned} &\zeta_{r_{ij}}(k+1) \\ &\zeta_{\theta_{ij}}(k+1) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

其中,  $\hat{r}_{ij}$ ,  $\hat{\theta}_{ij}$  是相应于式 (24) 中对量测信息  $r_{ij}$ ,  $\theta_{ij}$  的估计,  $\zeta_{r_{ij}}$  是相对距离量测噪声,  $\zeta_{\theta_{ij}}$  是相对方位量测噪声, 两者均为具有零均值的高斯白噪声, 且互不相关. 注意到

$$\begin{aligned} C^T(\hat{\phi}_i(k+1))\zeta_{Z_{ij}}(k+1) &= \\ &\left[ \begin{aligned} &\widehat{\Delta p}_{ij}^T(k+1|k) \\ &\hat{r}_{ij}(k+1) \end{aligned} \right] J\widehat{\Delta p}_{ij}(k+1|k) \left[ \begin{aligned} &\zeta_{r_{ij}}(k+1) \\ &\zeta_{\theta_{ij}}(k+1) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

因此, 可将  $R_{Z_{ij}}(k+1)$  写为

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{z}_{ij}}(k+1) &= \mathbb{E}\{\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{z}_{ij}}(k+1)\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{z}_{ij}}^{\text{T}}(k+1)\} = \\
&C^{\text{T}}(\hat{\phi}_i(k+1)) \times \\
&\left[ \begin{array}{cc} \widehat{\Delta \mathbf{p}}_{ij}(k+1|k) & J\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{ij}(k+1|k) \end{array} \right] \times \\
&\mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} \zeta_{r_{ij}}(k+1) \\ \zeta_{\theta_{ij}}(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{r_{ij}}(k+1) \\ \zeta_{\theta_{ij}}(k+1) \end{bmatrix}^{\text{T}} \right\} \times \\
&\left[ \begin{array}{cc} \widehat{\Delta \mathbf{p}}_{ij}(k+1|k) & J\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{ij}(k+1|k) \end{array} \right]^{\text{T}} \times \\
&C(\hat{\phi}_i(k+1)) = C^{\text{T}}(\hat{\phi}_i(k+1)) \times \\
&\left( \frac{\sigma_{r_i}^2}{\hat{r}_{ij}^2(k+1)} \widehat{\Delta \mathbf{p}}_{ij}(k+1|k) \times \right. \\
&\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{ij}^{\text{T}}(k+1|k) + \sigma_{\theta_i}^2 J\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{ij}(k+1|k) \times \\
&\left. \widehat{\Delta \mathbf{p}}_{ij}^{\text{T}}(k+1|k) J^{\text{T}} \right) C(\hat{\phi}_i(k+1)) = \\
&C^{\text{T}}(\hat{\phi}_i(k+1)) \left( \sigma_{r_i}^2 I_2 + \left( \sigma_{\theta_i}^2 - \frac{\sigma_{r_i}^2}{\hat{r}_{ij}^2(k+1)} \right) \times \right. \\
&\left. J\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{ij}(k+1|k) \widehat{\Delta \mathbf{p}}_{ij}^{\text{T}}(k+1|k) J^{\text{T}} \right) \times \\
&C(\hat{\phi}_i(k+1)) \quad (28)
\end{aligned}$$

其中,  $\sigma_{r_i}^2$  和  $\sigma_{\theta_i}^2$  分别是  $\zeta_{r_{ij}}$  和  $\zeta_{\theta_{ij}}$  的方差, 即

$$\mathbb{E}\{\zeta_{r_{ij}}^2\} = \sigma_{r_i}^2, \quad \mathbb{E}\{\zeta_{\theta_{ij}}^2\} = \sigma_{\theta_i}^2, \quad j = 1, \dots, M_i \quad (29)$$

由于存在公共的误差分量  $\tilde{\phi}_i(k+1)$ , 因此由 AUV  $\mathcal{A}_i$  测得的  $M_i$  组相对位置量测量值具有相关性. 设  $R_{jl}^i(k+1)$  表示两组量测误差  $\tilde{\mathbf{z}}_{ij}(k+1)$  和  $\tilde{\mathbf{z}}_{il}(k+1)$  之间的相关矩阵, 则

$$\begin{aligned}
R_{jl}^i(k+1) &= \mathbb{E}\{\Gamma_{ij}(k+1)\boldsymbol{\zeta}_{ij}(k+1) \times \\
&\boldsymbol{\zeta}_{il}^{\text{T}}(k+1)\Gamma_{il}^{\text{T}}(k+1)\} = \\
&\sigma_{\phi_i}^2 C^{\text{T}}(\hat{\phi}_i(k+1)) J\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{ij}(k+1|k) \times \\
&\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{il}^{\text{T}}(k+1|k) J^{\text{T}} C(\hat{\phi}_i(k+1)) \quad (30)
\end{aligned}$$

联立式 (23), (28) 和 (30), 可以得到 AUV  $\mathcal{A}_i$  在时刻  $k+1$  关于  $M_i$  组相对位置测量值的方差矩阵

$$R_i(k+1) = \Phi_{\hat{\phi}_i}^{\text{T}}(k+1) R_{o,i}(k+1) \Phi_{\hat{\phi}_i}(k+1) \quad (31)$$

其中,  $R_{o,i}(k+1)$  见式 (32), 并且  $\mathbf{1}_{M_i}$  表示每个元素都是 1 的  $M_i$  阶方阵,

$$\begin{aligned}
D_i(k+1) &= \\
&\text{diag} \left\{ \left[ J\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{i1}(k+1|k), \dots, J\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{iM_i}(k+1|k) \right] \right\} \quad (33)
\end{aligned}$$

是依赖于 AUV 间相对位置估计的分块对角矩阵. 在式 (32) 中,  $R^1(k+1)$  是与相对距离量测误差有关的方差项,  $R^2(k+1)$  是与相对方位量测误差有关的方差项,  $R^3(k+1)$  是与航向角估计误差有关的方差项.

$$\begin{aligned}
R_{o,i}(k+1) &= \left[ \begin{array}{ccc} \sigma_{r_i}^2 I_2 + \left( \sigma_{\phi_i}^2 + \sigma_{\theta_i}^2 - \frac{\sigma_{r_i}^2}{\hat{r}_{i1}^2(k+1)} \right) J\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{i1}(k+1|k) \widehat{\Delta \mathbf{p}}_{i1}^{\text{T}}(k+1|k) J^{\text{T}} & \dots & \\ & \vdots & \ddots \\ & \sigma_{\phi_i}^2 J\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{iM_i}(k+1|k) \widehat{\Delta \mathbf{p}}_{i1}^{\text{T}}(k+1|k) J^{\text{T}} & \dots \\ \dots & \sigma_{\phi_i}^2 J\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{i1}(k+1|k) \widehat{\Delta \mathbf{p}}_{iM_i}^{\text{T}}(k+1|k) J^{\text{T}} & \\ \dots & \vdots & \\ \dots & \sigma_{r_i}^2 I_2 + \left( \sigma_{\phi_i}^2 + \sigma_{\theta_i}^2 - \frac{\sigma_{r_i}^2}{\hat{r}_{iM_i}^2(k+1)} \right) J\widehat{\Delta \mathbf{p}}_{iM_i}(k+1|k) \widehat{\Delta \mathbf{p}}_{iM_i}^{\text{T}}(k+1|k) J^{\text{T}} & \end{array} \right] = \\
&\sigma_{r_i}^2 I_{2M_i} + D_i(k+1) \left( \sigma_{\theta_i}^2 I_{M_i} + \sigma_{\phi_i}^2 \mathbf{1}_{M_i} - \text{diag} \left\{ \left[ \frac{\sigma_{r_i}^2}{\hat{r}_{i1}^2(k+1)}, \dots, \frac{\sigma_{r_i}^2}{\hat{r}_{iM_i}^2(k+1)} \right] \right\} \right) D_i^{\text{T}}(k+1) = \\
&\left( \sigma_{r_i}^2 I_{2M_i} - D_i(k+1) \text{diag} \left\{ \left[ \frac{\sigma_{r_i}^2}{\hat{r}_{i1}^2(k+1)}, \dots, \frac{\sigma_{r_i}^2}{\hat{r}_{iM_i}^2(k+1)} \right] \right\} D_i^{\text{T}}(k+1) \right) + \\
&\sigma_{\theta_i}^2 D_i(k+1) D_i^{\text{T}}(k+1) + \sigma_{\phi_i}^2 D_i(k+1) \mathbf{1}_{M_i} D_i^{\text{T}}(k+1) = \\
&R^1(k+1) + R^2(k+1) + R^3(k+1) \quad (32)
\end{aligned}$$

至此, 可以写出由  $N$  个 AUV 成员  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$  组成的导航系统整体的量测矩阵  $H(k+1)$  和与之相应的方差矩阵  $R(k+1)$ , 即

$$H(k+1) = \begin{bmatrix} \Phi_{\hat{\phi}_1}^T(k+1)H_{o,1} \\ \Phi_{\hat{\phi}_2}^T(k+1)H_{o,2} \\ \vdots \\ \Phi_{\hat{\phi}_N}^T(k+1)H_{o,N} \end{bmatrix} = \text{diag} \left\{ \left[ \Phi_{\hat{\phi}_1}^T(k+1), \dots, \Phi_{\hat{\phi}_N}^T(k+1) \right] \right\} \times \begin{bmatrix} H_{o,1}^T & \cdots & H_{o,N}^T \end{bmatrix}^T = \Phi^T(k+1)H_o \quad (34)$$

其中

$$\Phi(k+1) = \text{diag} \left\{ \left[ \Phi_{\hat{\phi}_1}(k+1), \dots, \Phi_{\hat{\phi}_N}(k+1) \right] \right\} \quad (35)$$

$H_o$  是由  $H_{o,i}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) 组成的分块列矩阵. 类似地, 量测误差的方差矩阵为

$$R(k+1) = \text{diag} \left\{ \left[ R_1(k+1), \dots, R_N(k+1) \right] \right\} = \text{diag} \left\{ \left[ \Phi_{\hat{\phi}_1}^T(k+1)R_{o,1}(k+1)\Phi_{\hat{\phi}_1}(k+1), \dots, \Phi_{\hat{\phi}_N}^T(k+1)R_{o,N}(k+1)\Phi_{\hat{\phi}_N}(k+1) \right] \right\} = \Phi^T(k+1)R_o(k+1)\Phi(k+1) \quad (36)$$

其中,  $R_o$  是由  $R_{o,i}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) 组成的分块对角矩阵.

由于主 AUV (Leader, 记为 AUV  $\mathcal{L}$ ) 可以获得自身的位置信息, 与之相应的量测方程为

$$\mathbf{Z}_{\mathcal{L}}(k+1) = I_2 \mathbf{X}_{\mathcal{L}}(k+1) + \boldsymbol{\zeta}_{\mathcal{L}}(k+1) \quad (37)$$

其中,  $\mathbf{X}_{\mathcal{L}}(k+1)$  是  $k+1$  时刻 AUV  $\mathcal{L}$  的位置量测值,  $\boldsymbol{\zeta}_{\mathcal{L}}$  是量测过程中的零均值高斯白噪声. 因此, AUV  $\mathcal{L}$  的量测矩阵可以写为

$$H_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} O_{2 \times 2} & \cdots & \underbrace{I_2}_{\mathcal{L}} & \cdots & O_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

量测误差的方差矩阵  $R_{\mathcal{L}}$  是依赖于定位传感器性能的常数矩阵. 为此, 在具有单领航者 AUV 的协同导航系统中, 量测矩阵 (34) 中的  $H_o$  应加入新的分量  $H_{\mathcal{L}}$ , 量测方差 (36) 中的  $R_o(k+1)$  也将随之加入  $R_{\mathcal{L}}$  构成分块对角矩阵

$$R_o(k+1) = \text{diag} \left\{ \left[ R_{o,1}(k+1), \dots, R_{o,N-1}(k+1), R_{\mathcal{L}} \right] \right\} \quad (39)$$

而  $\Phi(k+1)$  将重新写为

$$\Phi(k+1) = \text{diag} \left\{ \left[ \Phi_{\hat{\phi}_1}(k+1), \dots, \Phi_{\hat{\phi}_{N-1}}(k+1), I_2 \right] \right\} \quad (40)$$

综合以上讨论, 利用扩展卡尔曼滤波可以得到单领航 AUV 协同导航系统量测误差的方差更新方程

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k)H^T(k+1)(H(k+1)P(k+1|k) \times H^T(k+1) + R(k+1))^{-1}H(k+1) \times P(k+1|k) = P(k+1|k) - P(k+1|k)H_o^T \Phi(k+1) \times (\Phi^T(k+1)H_o P(k+1|k)H_o^T \Phi(k+1) + \Phi^T(k+1)R_o(k+1)\Phi(k+1))^{-1} \times \Phi^T(k+1)H_o P(k+1|k) = P(k+1|k) - P(k+1|k)H_o^T \times (H_o P(k+1|k)H_o^T + R_o(k+1))^{-1} \times H_o P(k+1|k) \quad (41)$$

其中,  $\Phi^{-1}(k+1) = \Phi^T(k+1)$ .

### 3 导航系统定位误差的方差上界估计

#### 3.1 方差演化的黎卡提方程

结合状态估计和量测误差的方差传播方程 (10) 和 (41), 可以得到导航系统定位误差的方差随离散时间演化的黎卡提方程

$$P(k+2|k+1) = P(k+1|k) - P(k+1|k)H_o^T \times (H_o P(k+1|k)H_o^T + R_o(k+1))^{-1} \times H_o P(k+1|k) + Q(k+1) \quad (42)$$

为简化记号, 令

$$P_k = P(k+1|k), \quad P_{k+1} = P(k+2|k+1) \quad (43)$$

将上式重新写为

$$P_{k+1} = P_k - P_k H_o^T (H_o P_k H_o^T + R_o(k+1))^{-1} \times H_o P_k + Q(k+1) \quad (44)$$

由于  $R_o(k+1)$  和  $Q(k+1)$  均随时间变化, 一般不能从式 (44) 中得到方差  $P_k$  随时间演化的封闭形式的解表达式. 为此, 下面转而考虑求取系统方差  $P_k$  的上界估计, 首先证明如下引理.

**引理 1 (单调性).** 如果矩阵  $R_u, Q_u$  满足  $R_u \geq R_o(k), Q_u \geq Q(k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 则对给定初始条件  $P_0^u = P_0$  的黎卡提方程

$$P_{k+1}^u = P_k^u - P_k^u H_o^T (H_o P_k^u H_o^T + R_u)^{-1} \times H_o P_k^u + Q_u \quad (45)$$

的解  $P_k^u$ , 有  $P_k^u \geq P_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 成立.

**证明.** 设  $R_1 \geq R_2, P \geq 0$  和  $Q_0 \geq 0$ , 利用线性矩阵不等式, 有

$$\begin{aligned} HPH^T + R_1 &\geq HPH^T + R_2 \\ PH^T(HPH^T + R_1)^{-1}HP &\leq \\ PH^T(HPH^T + R_2)^{-1}HP &\quad (46) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} P - PH^T(HPH^T + R_1)^{-1}HP + Q_0 &\geq \\ P - PH^T(HPH^T + R_2)^{-1}HP + Q_0 &\quad (47) \end{aligned}$$

结合式 (47), 对  $P_k^u, P_k$  运用数学归纳法即可证得结论成立.  $\square$

由引理 1 可知, 为估计导航系统整体误差的方差上界, 只需求解与式 (44) 相对应的常数系数黎卡提方程, 关键在于确定满足  $R_u \geq R_o(k), Q_u \geq Q(k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 的常数矩阵  $R_u, Q_u$ . 下面分别估计  $R_o(k)$  和  $Q(k)$  的上界.

注意到  $R_o(k)$  是由  $R_{o,i}(k)$  构成的分块对角矩阵, 结合式 (32) 可知, 估计  $R_o(k)$  的上界只需逐项考察  $R_{o,i}(k)$  的分量  $R^1(k), R^2(k)$  和  $R^3(k)$ .

$$\begin{aligned} R^1(k) &= \sigma_{r_i}^2 I_{2M_i} - D_i(k) \times \\ &\text{diag} \left\{ \left[ \frac{\sigma_{r_i}^2}{\hat{r}_{i1}^2(k)}, \dots, \frac{\sigma_{r_i}^2}{\hat{r}_{iM_i}^2(k)} \right] \right\} D_i^T(k) \leq \\ &\sigma_{r_i}^2 I_{2M_i} \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^2(k) &= \sigma_{\theta_i}^2 D_i(k) D_i^T(k) = \\ &\sigma_{\theta_i}^2 \text{diag} \left\{ [\hat{r}_{i1}^2(k) \Theta_{i1}(k), \dots, \hat{r}_{iM_i}^2(k) \Theta_{iM_i}(k)] \right\} \leq \\ &\sigma_{\theta_i}^2 \text{diag} \left\{ [\hat{r}_{i1}^2(k) I_2, \dots, \hat{r}_{iM_i}^2(k) I_2] \right\} \leq \\ &\sigma_{\theta_i}^2 r_0^2 I_{2M_i} \quad (49) \end{aligned}$$

其中, 对于  $j = 1, \dots, M_i$ , 有

$$\Theta_{ij}(k) = \begin{bmatrix} \sin^2 \hat{\theta}_{ij}(k) & \sin \hat{\theta}_{ij}(k) \cos \hat{\theta}_{ij}(k) \\ \sin \hat{\theta}_{ij}(k) \cos \hat{\theta}_{ij}(k) & \cos^2 \hat{\theta}_{ij}(k) \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} R^3(k) &= \sigma_{\phi_i}^2 D_i(k) \mathbf{1}_{M_i} D_i^T(k) \leq \\ &M_i \sigma_{\phi_i}^2 D_i(k) D_i^T(k) \leq \\ &M_i \sigma_{\phi_i}^2 r_0^2 I_{2M_i} \quad (51) \end{aligned}$$

其中,  $r_0$  是 AUV 间可获得的最大相对距离量测值, 取决于传感器的性能指标或 AUV 编队的航行区域. 联立式 (48), (49) 和 (51), 可得

$$R_{o,i}(k) = R^1(k) + R^2(k) + R^3(k) \leq R_i^u \quad (52)$$

其中

$$\begin{aligned} R_i^u &= (\sigma_{r_i}^2 + \sigma_{\theta_i}^2 r_0^2 + M_i \sigma_{\phi_i}^2 r_0^2) I_{2M_i} = \rho_i I_{2M_i} \\ \rho_i &= \sigma_{r_i}^2 + \sigma_{\theta_i}^2 r_0^2 + M_i \sigma_{\phi_i}^2 r_0^2 \quad (53) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} R_o(k) &= \text{diag} \{ [R_{o,1}(k), \dots, R_{o,N}(k)] \} \leq \\ &\text{diag} \{ [\rho_1 I_{2M_1}, \dots, \rho_N I_{2M_N}] \} = R_u \quad (54) \end{aligned}$$

为估计方差矩阵  $Q(k)$  的上界, 由于  $Q(k) = \text{diag} \{ [Q_1(k), \dots, Q_N(k)] \}$ , 其中对于  $i = 1, \dots, N$ , 有

$$\begin{aligned} Q_i(k) &= C(\hat{\phi}_i(k)) \times \\ &\begin{bmatrix} \Delta t^2 \sigma_{v_i}^2 & 0 \\ 0 & \Delta t^2 v_{m_i}^2(k) \sigma_{\phi_i}^2 \end{bmatrix} C^T(\hat{\phi}_i(k)) \quad (55) \end{aligned}$$

并且注意到  $C^{-1}(\hat{\phi}_i(k)) = C^T(\hat{\phi}_i(k))$ , 因此  $Q_i(k)$  的特征值为  $\Delta t^2 \sigma_{v_i}^2$  和  $\Delta t^2 v_{m_i}^2(k) \sigma_{\phi_i}^2$ . 考虑到 AUV  $\mathcal{A}_i$  的航速近似等于常值  $v_i$ , 令

$$\begin{aligned} q_i &= \max \{ \Delta t^2 \sigma_{v_i}^2, \Delta t^2 v_{m_i}^2(k) \sigma_{\phi_i}^2 \} \doteq \\ &\max \{ \Delta t^2 \sigma_{v_i}^2, \Delta t^2 v_i^2 \sigma_{\phi_i}^2 \} \quad (56) \end{aligned}$$

为  $Q_i(k)$  的最大特征值, 则

$$Q(k) \leq \text{diag} \{ [q_1 I_2, \dots, q_N I_2] \} = Q_u \quad (57)$$

### 3.2 稳态情形的方差上界

导航系统历经一定时间后进入稳态, 此时系统定位误差的方差上界估计为  $P_k^u, k \rightarrow \infty$ . 为求取该上界估计, 首先对式 (45) 进行适当的恒等变形.

利用分块矩阵的求逆公式, 可将式 (45) 重新写为

$$P_{k+1}^u = P_k^u (I_{2N} + H_o^T R_u^{-1} H_o P_k^u)^{-1} + Q_u \quad (58)$$

定义正规化方差矩阵

$$P_{n_k} = Q_u^{-\frac{1}{2}} P_k^u Q_u^{\frac{1}{2}} \quad (59)$$

可将上式简化为

$$P_{n_{k+1}} = P_{n_k} (I_{2N} + C_u P_{n_k})^{-1} + I_{2N} \quad (60)$$



其中

$$C_u = Q_u^{-\frac{1}{2}} H_o^T R_u^{-1} H_o Q_u^{\frac{1}{2}} \quad (61)$$

且半正定矩阵  $C_u$  包含了描述导航系统整体定位性能的绝大部分参数. 为进一步简化表达, 设  $C_u$  有如下的正交对角分解

$$C_u = U_u \text{diag} \{[\lambda_1, \dots, \lambda_{2N}]\} U_u^T = U_u \Lambda_u U_u^T \quad (62)$$

式中,  $\Lambda_u$  是由  $C_u$  的全体特征值  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 2N$ ) 构成的对角矩阵. 将上式代入式 (60), 并化简可得

$$P_{nn_{k+1}} = P_{nn_{k+1}} (I_{2N} + \Lambda_u P_{nn_{k+1}})^{-1} + I_{2N} \quad (63)$$

其中定义

$$P_{nn_k} = U_u^T P_{n_k} U_u \quad (64)$$

令式 (63) 两端的  $k \rightarrow \infty$ , 可得导航系统的定位误差在稳态时的方差上界估计方程

$$P_{nn_{ss}} = P_{nn_{ss}} (I_{2N} + \Lambda_u P_{nn_{ss}})^{-1} + I_{2N} \quad (65)$$

注意到式 (65) 是一离散的代数黎卡提方程, 且系数矩阵  $I_{2N}$ ,  $\Lambda_u$  均为对角矩阵, 因此容易获得满足上述方程的一个特解为

$$P_{ss}^u = Q_u^{\frac{1}{2}} U_u \Lambda_{ss}^u U_u^T Q_u^{\frac{1}{2}} \quad (66)$$

其中

$$\Lambda_{ss}^u = \text{diag} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\lambda_{2N}}} \right] \right\} \quad (67)$$

需要特别指出, 式 (66) 只是黎卡提方程 (65) 的一个形式解. 根据代数黎卡提方程的可解性理论<sup>[23]</sup>, 方程 (65) 的解的存在性和唯一性严格取决于矩阵  $C_u$  的非奇异性. 也就是说, 如果半正定矩阵  $C_u$  非奇异, 则式 (65) 的解存在且唯一, 此时式 (66) 就是其唯一确定的解. 反之, 如果  $C_u$  存在零特征值, 方程 (65) 的解存在但不唯一, 且部分解不能收敛到确定的常值.

因此, 问题的关键在于分析半正定矩阵  $C_u$  的奇异性, 这又取决于导航系统的量测矩阵  $H$  中的主体部分  $H_o$  的奇异性. 而事实上,  $H_o$  的奇异性直接决定了导航系统的可观测性 (AUV 在各采样时刻的定位估计能否经由量测数据计算得到), 这部分内容将在下一小节中具体展开讨论.

### 3.3 可观测性分析

导航系统的可观测性取决于系统量测矩阵  $H$  的奇异性, 非可观测系统的定位误差将随时间的推移而不断增长, 并最终使协同导航系统失去稳定<sup>[17]</sup>.

由上一节的讨论可知, 量测矩阵  $H$  的主体部分  $H_o$  中包含了下列两种形式的矩阵块

$$\begin{bmatrix} O_{2 \times 2} & \cdots & -I_2 & \cdots & I_2 & \cdots & O_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \otimes I_2 = H_{ij}^o \otimes I_2 \quad (68)$$

$$\begin{bmatrix} O_{2 \times 2} & \cdots & I_2 & \cdots & O_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \otimes I_2 = H_{\mathcal{L}}^o \otimes I_2 \quad (69)$$

因此,  $H_o$  可以表示为

$$H_o = H^o \otimes I_2 \quad (70)$$

其中,  $H^o$  是由适当数量的  $H_{\mathcal{L}}^o$ ,  $H_{ij}^o$  构成的分块列矩阵. 利用矩阵的初等变换易知  $H^o$  满秩, 即  $\text{rank } H^o = N$ . 由式 (70) 并结合矩阵克罗内克乘积的性质, 有

$$\text{rank } H_o = \text{rank } H^o \cdot \text{rank } I_2 = 2N \quad (71)$$

即  $H_o$  满秩, 故  $C_u = Q_u^{-\frac{1}{2}} H_o^T R_u^{-1} H_o Q_u^{\frac{1}{2}}$  非奇异,  $\Lambda_u > 0$ .

由此可知, 具有单领航者的多 AUV 协同导航系统可观测, 其稳态定位误差的方差上界收敛至唯一确定的常值式 (66), 这与 Bahr 和 Leonard 的水面实验结果相吻合<sup>[21]</sup>. 由  $P_{ss}^u$  的表达式可以看出, 导航系统的稳态定位误差上界主要取决于  $C_u$  的特征值, 即系统的定位性能依赖于对 AUV 的速度、航向角和相对位置的量测精度, 而与系统的初始方差  $P_0$  无关. 这一结论和系统的可观测性分析结果相一致.

值得注意的是, 如果在多 AUV 协同导航系统中剔除单领航者的作用 (即编队中的 AUV 成员均无法获取其在某一公共参考坐标系内的绝对位置, 仅依赖于相互间的相对位置测量信息进行协同导航), 导航系统将不再可观测. 此时, 系统量测矩阵  $H$  的主体部分  $H_o$  仅包含有式 (68) 一种结构, 而显然

$$\begin{aligned} H^o \mathbf{1}_{N \times 1} &= O_{N \times 1} \Rightarrow \\ H_o (\mathbf{1}_{N \times 1} \otimes I_2) &= O_{2N \times 2} \Rightarrow \\ H (\mathbf{1}_{N \times 1} \otimes I_2) &= O_{2N \times 2} \end{aligned} \quad (72)$$

因此  $H$  奇异, 且系统的不可观测子空间的一组基底为

$$V = \mathbf{1}_{N \times 1} \otimes I_2 \quad (73)$$

此时  $C_u$  奇异, 结合式 (73) 可知其存在两个零特征值.

上述结果表明, 仅依赖于 AUV 间的相对位置测量实现定位估计的协同导航系统不可观测, 其定位误差特性类似于航位推算导航系统, 将随时间的推移而不断增长. 由此可见, 领航者 AUV 对提高多 AUV 协同导航系统的定位性能起着至关重要的作用.

#### 4 仿真结果

为检验单领航 AUV 协同导航系统的定位性能, 进行仿真分析研究. 如图 4 所示, AUV 1 (领航者, Leader) 由坐标原点出发沿直线航行; AUV 2, AUV 3 (跟随者, Follower) 的航程分为两段, 首先按斜线航行一段距离, 然后与 AUV 1 保持平行航行. 在两段航程中, AUV 2 的航向角分别为  $60^\circ$ ,  $0^\circ$ , AUV 3 的航向角分别为  $45^\circ$ ,  $0^\circ$ . 主、从 AUV 的航速均为  $1\text{ m/s}$ , 其中主 AUV 的速度信息由多普勒速度仪测量, 取  $\sigma_{v,L}^2 = (0.1\text{ m/s})^2$  的零均值高斯白噪声; 从 AUV 的速度信息则通过测量自身推进器的转速获得<sup>[10-11]</sup>, 因而误差较大, 取  $\sigma_{v,F}^2 = (0.45\text{ m/s})^2$  的零均值高斯白噪声. 主、从 AUV 的航向角信息由不同精度的陀螺罗经测量, 取  $\sigma_{\phi,L}^2 = (0.5^\circ)^2$  和  $\sigma_{\phi,F}^2 = (2^\circ)^2$  的零均值高斯白噪声. AUV 间的相对距离信息通过彼此之间的水声通信测量, 在水声传播速度恒定时可以达到较高的测量精度<sup>[17]</sup>. 假设水声传播速度为定值  $c = 1500\text{ m/s}$ , 选取主、从 AUV 间的相对位置量测噪声为  $\sigma_{r,LF}^2 = (0.1\text{ m})^2$  和  $\sigma_{\theta,LF}^2 = (3^\circ)^2$  的零均值高斯白噪声, 从 AUV 之间的相对位置量测噪声为  $\sigma_{r,FF}^2 = (0.65\text{ m})^2$  和  $\sigma_{\theta,FF}^2 = (5^\circ)^2$  的零均值高斯白噪声. 在上述方差表达式中, 下标“L”和“F”分别指主 AUV 和从 AUV.

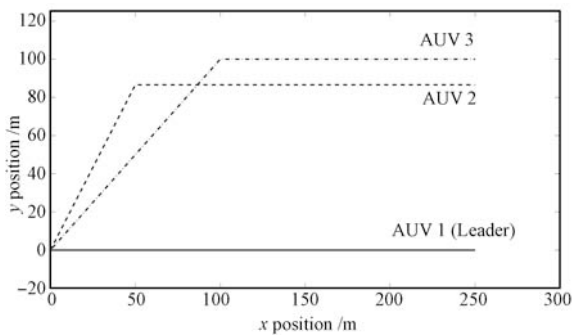
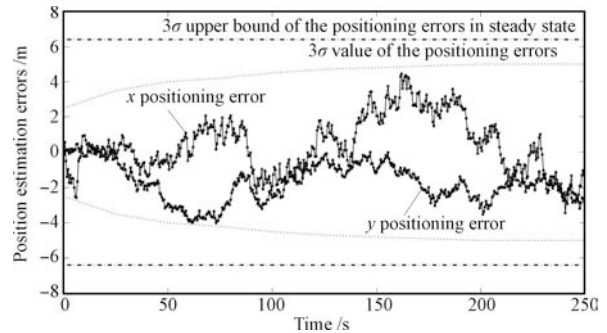


图 4 AUV 的仿真运动路径

Fig. 4 Simulated trajectories of AUVs

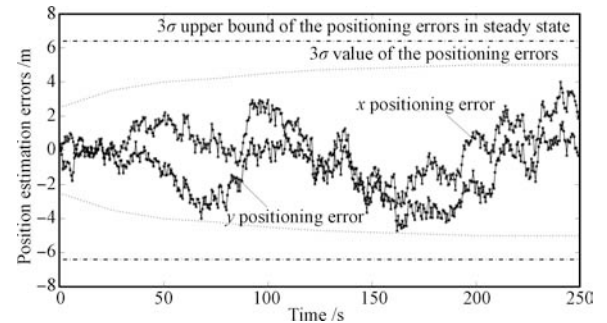
图 5 分别给出了 AUV 2, AUV 3 的定位估计误差和误差的  $\pm 3\sigma$  方差界. 图中的点划线表示单领航者导航系统进入稳态后定位误差的  $\pm 3\sigma$  方差上界, 是由式 (66) 确定的常值; 图中的虚线是根据扩展卡尔曼滤波方程计算得到的 AUV 定位误差估计

的  $\pm 3\sigma$  方差包络线, 其包围而成的区域以很大的可信度反映了定位误差的变化范围. 可以看到, 全航程中 AUV 2, AUV 3 在  $x, y$  方向的定位误差中值约为  $2\text{ m} \sim 3\text{ m}$ , 系统的滤波方差历经约  $150\text{ s}$  后趋于平稳. 由此可知, 基于单领航者相对位置测量的多 AUV 协同导航系统具有较高的定位精度和快速的收敛性, 且整体定位误差有界收敛.



(a) AUV 2 的定位结果

(a) Positioning results of AUV 2



(b) AUV 3 的定位结果

(b) Positioning results of AUV 3

图 5 AUV 的 EKF 定位估计误差和误差的  $\pm 3\sigma$  方差界  
Fig. 5 Position estimation errors and their  $\pm 3\sigma$  variance bounds of AUVs by EKF

为进一步验证单领航 AUV 协同导航系统的定位性能, 将其与 AUV 2, AUV 3 的航位推算定位结果做对比仿真分析. 在同等仿真条件下, 图 6 分别给出了 AUV 2, AUV 3 在  $x, y$  方向的航位推算定位误差结果. 可以看到, 在各自的第 1 段航程中 (斜向航行阶段, 对应于图 6(a) 中 AUV 2 的  $0\text{ s} \sim 100\text{ s}$  和图 6(b) 中 AUV 3 的  $0\text{ s} \sim 140\text{ s}$ ), 航位推算定位误差随时间逐步增长, AUV 2, AUV 3 在单一方向的误差峰值约为  $20\text{ m}$  和  $30\text{ m}$ . 在第 2 段航程中 (历经一次转向),  $x$  方向的定位误差显著增长,  $y$  方向的定位误差增速趋缓 (这一阶段由于真实路径中的  $y$  值保持不变, 因而  $y$  方向的误差波动较小), 两者均随时间增长趋于发散, 并最终导致航位推算定位方法失效.

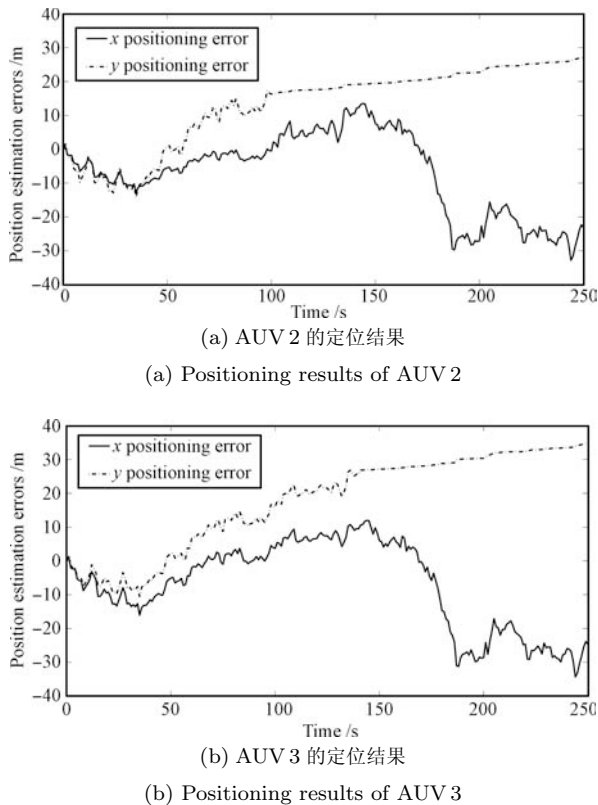


图 6 AUV 的航位推算定位误差

Fig. 6 Positioning errors of AUVs by dead reckoning

出现上述情况的原因是:

1) 就其本身而言, 航位推算方法存在漂移误差累积, 并随时间的增长趋于发散;

2) AUV 转向机动时, 用于航位推算的运动学模型与 AUV 的真实动力学模型之间存在失配, 再加上从 AUV 配备的传感器精度较低, 因而导致其转向后的定位误差快速增长.

需要指出的是, AUV 转向过程中的失配问题在 EKF 协同导航方法中也是存在的. 然而, 与航位推算方法不同, 在单领航 AUV 协同导航方法中, 由于可以获得主 AUV 的绝对位置信息以及主、从 AUV 之间较为精确的相对位置量测信息, 故 EKF 滤波算法能够有效抑制各从 AUV 的定位误差发散, 从而使系统的整体定位误差有界收敛. 这也进一步验证了单领航 AUV 协同导航方法的有效性.

## 5 结论和后续工作

本文深入研究了基于单领航者相对位置测量的多 AUV 协同导航系统的定位性能. 理论分析表明, 上述导航系统可观测, 其稳态情形下定位误差的方差上界依赖于对 AUV 的速度、航向角和相对位置的量测精度, 而与系统的初始滤波方差无关, 并最终收敛至唯一确定的常值. 仿真结果显示, 基于单领

航者相对位置测量的多 AUV 协同导航系统的定位精度较高, 整体定位误差有界收敛, 具有良好的综合性能, 从而验证了文中理论分析结果的正确性.

在后续工作中, 将针对以下两方面问题做进一步深入研究:

1) 洋流漂移问题. 洋流表现出多种不确定特征 (如定常已知、定常未知、时变已知和时变未知等), 不同的洋流特性对单领航者协同导航方法性能的影响是多样的, 至今缺少统一的研究手段. 文中方法可直接用于分析定常已知的洋流漂移问题, 只需将 AUV 的运动学方程 (1) 重新写为

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ y_i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i(k) \\ y_i(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_i(k) \cos \phi_i(k) + u_x \\ v_i(k) \sin \phi_i(k) + u_y \end{bmatrix} \Delta t \quad (74)$$

其中,  $u_x$ ,  $u_y$  为常值洋流分量. 对于定常未知的洋流, 可以首先利用主、从 AUV 间的适当机动求取未知洋流分量  $u_x$ ,  $u_y$  的估计, 之后将问题转化为定常已知的洋流情形加以解决. 由此可见, 文中的分析方法推广了 Baccou<sup>[9-12]</sup> 等的研究工作. 至于时变已知、时变未知洋流的一般情形, 文中的分析方法将不再适用, 此时 AUV  $\mathcal{A}_i$  的状态向量  $\mathbf{X}_i(k) = [x_i(k), y_i(k), u_x(k), u_y(k)]^T$  中包含了时变洋流分量  $u_x(k)$ ,  $u_y(k)$ , 仅依赖于 AUV 间的相对位置量测信息是不足以对其进行求解和加以分析的. 值得注意的是, 最近 Petrich<sup>[24-25]</sup> 等提出了基于局部流场分解的方法来研究时变洋流的漂移问题, 取得了一些有益的研究结果. 在后续工作中, 拟结合上述新方法, 在最一般的洋流条件下对单领航者 AUV 协同导航系统的定位性能做进一步研究.

2) AUV 的欠驱动问题. 由于靠尾推和鳍舵控制的欠驱动 AUV 不满足 Brockett 约束, 不能转化为无漂系统, 其运动学模型不能表征转弯时的侧滑运动, 因此经由量测得到的位置与其实际位置是不吻合的<sup>[26-27]</sup>. 常规的方法是假设 AUV 不进行大的机动 (如突然转向或加速等), 以使得 AUV 具有较小的攻角和侧滑角. 从理论上讲, 如能采用 AUV 的动力学模型精确描述其运动状态, 则上述存在的问题是可以解决的. 但是, Gadre<sup>[17]</sup> 和 Kalwa<sup>[19]</sup> 等均指出, 这将使得系统的复杂性大为增加, 从而降低了系统的稳定性; 另一方面, 在 AUV 定位估计的解算更新过程中, EKF 滤波器将反复计算带有高阶导数的雅可比矩阵, 从而会引入新的计算误差且破坏系统状态更新的实时性, 因此这一做法在实际中并不可取. 针对上述问题, 我们的想法是将 AUV 的运动学模型与动力学模型做适当结合, 利用无迹卡尔曼滤波 (Unscented Kalman filter, UKF) 的研究成果<sup>[28-29]</sup>, 通过增加 Sigma 采样点来逼近非线性环

节, 设计适合单领航者 AUV 协同导航系统的 UKF 导航算法 (避免了 EKF 中复杂的雅可比矩阵计算和线性化假设的局限), 以此为基础进一步深入分析、研究和提高单领航者 AUV 协同导航系统的定位性能, 这将是后续工作中的又一重点问题。

## References

- Kinsey J, Eustice R, Whitcomb L. A survey of underwater vehicle navigation: recent advances and new challenges. In: Proceedings of the 7th IFAC Conference on Maneuvering and Control of Marine Craft. Lisbon, Portugal: IFAC, 2006. 1–12
- Eustice R, Whitcomb L, Singh H, Grund M. Recent advances in synchronous-clock one-way-travel-time acoustic navigation. In: Proceedings of the OCEANS. Boston, USA: IEEE, 2006. 1–6
- Stutters L, Liu H, Tiltman C, Brown D J. Navigation technologies for autonomous underwater vehicles. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, 2008, **38**(4): 581–589
- Chanserasekhar V, Seah W K G, Choo Y S, Ee H V. Localization in underwater sensor networks: survey and challenges. In: Proceedings of the 1st ACM International Workshop on Underwater Networks. New York, USA: ACM, 2006. 33–40
- Liu Ming-Yong, Li Wen-Bai, Pei Xuan. Convex optimization algorithms for cooperative localization in autonomous underwater vehicles. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(5): 704–710
- Freitag L, Grund M, Singh H, Partan J, Koski P, Ball K. The WHOI micro-modem: an acoustic communications and navigation system for multiple platforms. In: Proceedings of the MTS/IEEE OCEANS. Washington D. C., USA: IEEE, 2005. 1086–1092
- Singh S, Grund M, Bingham B, Eustice R, Singh H, Freitag L. Underwater acoustic navigation with the WHOI micro-modem. In: Proceedings of the OCEANS. Boston, USA: IEEE, 2006. 1–4
- Larsen T D, Andersen N A, Ravn O, Poulsen N K. Incorporation of time delayed measurements in a discrete-time Kalman filter. In: Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control. Florida, USA: IEEE, 1998. 3972–3977
- Baccou P, Jouvencel B, Creuze V. Single beacon acoustic for AUV navigation. In: Proceedings of the 10th International Conference on Advanced Robotics. Budapest, Hungary: IEEE, 2001. 413–418
- Baccou P, Jouvencel B, Creuze V, Rabaud D. Cooperative positioning and navigation for multiple AUV operations. In: Proceedings of the MTS/IEEE Conference and Exhibition OCEANS. Honolulu, USA: IEEE, 2001. 1816–1821
- Baccou P, Jouvencel B. Simulation results, post-processing experimentation and comparison results for navigation, homing and multiple vehicle operations with a new positioning method using a transponder. In: Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robotics and Systems. Las Vegas, USA: IEEE, 2003. 811–817
- Vaganay J, Baccou P, Jouvencel B. Homing by acoustic ranging to a single beacon. In: Proceedings of the MTS/IEEE Conference and Exhibition OCEANS. Providence, USA: IEEE, 2000. 1457–1462
- Gadre A, Stilwell D J. Toward underwater navigation based on range measurements from a single location. In: Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. New Orleans, USA: IEEE, 2004. 4472–4477
- Gadre A, Stilwell D J. Underwater navigation in the presence of unknown currents based on range measurements from a single location. In: Proceedings of the American Control Conference. Minneapolis, USA: IEEE, 2005. 656–661
- Gadre A, Stilwell D J. A complete solution to underwater navigation in the presence of unknown currents based on range measurements from a single location. In: Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robotics and Systems. Edmonton, Canada: IEEE, 2005. 1420–1425
- Gadre A, Mach J, Stilwell D, Wick C. Design of a prototype miniature autonomous underwater vehicle. In: Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robotics and Systems. Las Vegas, USA: IEEE, 2003. 842–846
- Gadre A. Observability Analysis in Navigation Systems with an Underwater Vehicle Application [Ph.D. dissertation], Virginia Polytechnic Institute and State University, USA, 2007
- Kalwa J. The GREX-project: coordination and control of cooperating heterogeneous unmanned systems in uncertain environments. In: Proceedings of the EUROPE OCEANS. Biloxi, USA: IEEE, 2009. 1–9
- Engel R, Kalwa J. Relative positioning of multiple underwater vehicles in the GREX project. In: Proceedings of the EUROPE OCEANS. Bremen, Germany: IEEE, 2009. 1–7
- Engel R, Kalwa J. Coordinated navigation of multiple underwater vehicles. In: Proceedings of the 17th International Offshore and Polar Engineering Conference. Lisbon, Portugal: ISOPE, 2007. 1066–1073
- Bahr A, Leonard J, Fallon M. Cooperative localization for autonomous underwater vehicles. *International Journal of Robotics Research*, 2009, **28**(6): 714–728
- Bahr A. Cooperative Localization for Autonomous Underwater Vehicles [Ph.D. dissertation], Massachusetts Institute of Technology and Woods Hole Oceanographic Institution, USA, 2009
- Chen Gong-Ning. *Matrix Theory and Applications (Second Edition)*. Beijing: Science Press, 2007. 140–190 (陈公宁. 矩阵理论与应用 (第二版). 北京: 科学出版社, 2007. 140–190)
- Petrich J, Woolsey C, Stilwell D. Planar flow model identification for improved navigation of small AUVs. *Ocean Engineering*, 2009, **36**(1): 119–131

- 25 Petrich J, Woolsey C, Stilwell D. Identification of a low-complexity flow field model for AUV applications. In: Proceedings of the MTS/IEEE OCEANS. Washington D. C., USA: IEEE, 2005. 1595–1602
- 26 Li Dai-Jin, Luo Kai, Zhang Yu-Wen, Dang Jian-Jun. Studies on fixed-depth control of supercavitating vehicles. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 421–426
- 27 Li Jia-Wang, Song Bao-Wei, Shao Cheng. Tracking control of autonomous underwater vehicles with internal moving-mass. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(10): 1319–1323
- 28 Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 2005, **92**(3): 401–422
- 29 Zhao Lin, Wang Xiao-Xu, Sun Ming, Ding Ji-Cheng, Yan Chao. Adaptive UKF filtering algorithm based on maximum a posterior estimation and exponential weighting. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 1007–1019  
(赵琳, 王小旭, 孙明, 丁继成, 闫超. 基于极大后验估计和指数加权的自适应 UKF 滤波算法. 自动化学报, 2010, **36**(7): 1007–1019)



**李闻白** 西北工业大学航海学院博士研究生. 2006 年获西北工业大学应用数学系学士学位. 主要研究方向为自主水下航行器的导航与控制. 本文通信作者.  
E-mail: liwenbai@163.com

(**LI Wen-Bai** Ph.D. candidate at the School of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University.

He received his bachelor degree from Northwestern Polytechnical University in 2006. His research interest covers navigation and control of autonomous underwater vehicles. Corresponding author of this paper.)



**刘明雍** 西北工业大学航海学院教授. 1992 年获西北工业大学自动化系学士学位. 主要研究方向为自主水下航行器的导航与控制.

E-mail: liumingyong@nwpu.edu.cn

(**LIU Ming-Yong** Professor at the School of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University. He

received his bachelor degree from Northwestern Polytechnical University in 1992. His research interest covers navigation and control of autonomous underwater vehicles.)



**李虎雄** 西北工业大学自动化学院博士研究生, 温州大学瓯江学院副教授. 主要研究方向为网络通信与信息安全.

E-mail: jsj\_lhx@wzu.edu.cn

(**LI Hu-Xiong** Ph.D. candidate at the School of Automation, Northwestern Polytechnical University and associate professor at Oujiang College,

Wenzhou University. His research interest covers network communication and information security.)



**陈学永** 西北工业大学机电学院博士研究生, 中航光电科技股份有限公司总工程师. 主要研究方向为惯性导航与机械电子. E-mail: chenxueyong@jonhon.cn

(**CHEN Xue-Yong** Ph.D. candidate at the School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University and chief engineer at Avic

China Aviation Optical-Electrical Technology Co., Ltd.. His research interest covers inertial navigation and mechatronics.)