

基于多面体终端域的 Hammerstein-Wiener 非线性预测控制

李妍¹ 毛志忠¹ 王琰² 袁平¹ 贾明兴¹

摘要 许多实际系统都可以表示成一种中间为线性动态子系统、输入输出端为非线性静态子系统的 Hammerstein-Wiener 型非线性模型。针对输入和输出受约束的 Hammerstein-Wiener 型非线性系统, 提出一种基于多面体终端域的预测控制综合算法。离线设计时, 通过构造一系列多面体不变集, 扩大了终端域; 在多面体不变集内, 设计非线性控制律, 减少了常规线性控制律设计的保守性。在线计算时, 通过求解有限个线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMIs) 优化问题, 不仅可以满足实时性要求, 而且能够改善控制性能。仿真结果表明了采用多面体不变集的优越性。

关键词 Hammerstein-Wiener 非线性模型, 模型预测控制, 多面体终端域, 稳定性, 线性矩阵不等式

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.00629

Predictive Control of Hammerstein-Wiener Nonlinearity Based on Polytopic Terminal Region

LI Yan¹ MAO Zhi-Zhong¹ WANG Yan² YUAN Ping¹ JIA Ming-Xing¹

Abstract Many actual systems are often represented as the Hammerstein-Wiener nonlinear models, where a linear dynamic subsystem is surrounded by two static nonlinear subsystems at its input and output. For Hammerstein-Wiener nonlinear systems with the input and output constraints, a predictive control synthesis algorithm based on polytopic terminal region is proposed. At the offline stage, by constructing a series of the polytopic invariant sets, the terminal region is enlarged; in the polytopic invariant set, the nonlinear controller is designed, then the conservation of conventional linear control law design is reduced. At the online stage, by solving a finite number of linear matrix inequality optimization problems, not only the real-time demand can be satisfied, but also the control performance can be improved. Simulation results show the advantages of adopting polyhedron invariant set.

Key words Hammerstein-Wiener nonlinear models, model predictive control (MPC), polytopic terminal region, stability, linear matrix inequalities (LMIs)

许多工业过程都能表示成中间为线性动态环节、输入输出端为非线性静态环节的 Hammerstein-Wiener 非线性模型。对于此类带约束和强非线性的实际系统, 传统线性预测控制很难达到满意的控制效果, 所以人们提出了非线性预测控制 (Nonlinear model predictive control, NMPC)^[1]。其大体上分为两步法 NMPC 和整体法 NMPC 两类。

在两步法中^[2-7], 一般先对线性子系统设计中问量模型预测控制 (Model predictive control, MPC), 然后求解非线性代数方程并反算出实际控制量。但非线性方程的求解不可避免地引入计算误差^[3-4], 且

约束系统的输入往往与所要求的输入存在较大偏差, 从而反解出的实际控制量可能违反系统的约束, 影响闭环系统的稳定性和最优性; 另外, 在两步法优化过程中, 忽略对实际输入的加权, 可能导致系统输入的变化过大, 影响系统的平稳运行。

在整体法中^[8-9], 一般将非线性函数和线性子系统一起纳入目标函数, 直接优化求解控制量。其中, 线性部分采用状态空间描述, 非线性部分转化为多面体描述。尽管整体法能统一处理各种实际约束, 但由于系统需要满足稳定性约束, 所以通常具有较大的在线计算量。如果能将一部分在线计算转化为相应的离线计算, 在线计算量将大幅度降低。基于上述思想, 许多学者提出离线设计、在线综合的预测控制算法^[10-17]。文献 [10] 提出一种高效的鲁棒预测控制方法。通过离线设计固定的状态反馈控制矩阵, 在线优化自由补偿量, 有效地减少了在线计算量。但在整个优化过程中, 终端域是固定不变的。文献 [11-14] 设计了鲁棒约束预测控制器的综合方法, 有效地降低了在线计算负担; 又由于其终端约束集自初始时刻起即为时变的, 所以此类方法还能获得

收稿日期 2010-05-25 录用日期 2010-09-21
Manuscript received May 25, 2010; accepted September 21, 2010

国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2007AA041401, 2007AA04Z194) 资助

Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2007AA041401, 2007AA04Z194)

1. 东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110004 2. 辽阳市发展和改革委员会 辽阳 111000

1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004 2. Liaoyang Municipal Development and Reform Commission, Liaoyang 111000

较大的初始可行域和更优的控制性能. 文献 [15–17] 首先离线确定一系列椭圆不变集及与其相对应的线性状态反馈控制律; 然后在线选择当前状态所处的最小椭圆集对应的控制律. 与采用单个不变集相比, 文献 [15–17] 采用了不变集序列, 通过增加离线计算的渐近稳定不变集个数, 可以选择比采用单个不变集更优的控制律, 最终得到比采用单个不变集更好的在线控制性能. 但是, 以上方法设计的鲁棒预测控制器都是建立在椭圆集的基础上. 在处理实际约束时, 采用椭圆集有较大的保守性; 和椭圆集相比, 多面体集不仅更符合实际约束的限制, 而且设计灵活, 可以获得更大的渐近稳定不变集^[18–22].

综上, 针对具有约束的 Hammerstein-Wiener 型非线性系统, 本文提出一种基于多面体终端域的预测控制综合算法. 由于传统的椭圆集^[8–17] 在处理约束时具有保守性, 所以本文通过采用多面体集, 有效地扩大了稳定终端域; 另外, 由于常规线性状态反馈控制律^[8–17] 具有保守性, 所以本文在多面体集内, 设计非线性控制律, 减少常规线性控制律设计的保守性. 在线综合时, 通过求解有限个线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMIs) 优化问题, 在满足实时性的条件下, 能获得较好的控制效果.

符号说明: $\|\mathbf{x}\|_W^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x}$; 若 H 和 R 为对称

矩阵, 则 $\begin{bmatrix} H & * \\ T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & T^T \\ T & R \end{bmatrix}$.

1 系统描述

Hammerstein-Wiener 非线性模型如图 1 所示.

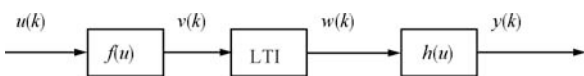


图 1 Hammerstein-Wiener 型非线性模型

Fig. 1 Hammerstein-Wiener nonlinear models

图 1 中, 执行机构非线性 $f(\mathbf{u})$ 可以表示为

$$\mathbf{v}(k) = f(\mathbf{u}(k)) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ 为输入信号, $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^m$ 为执行机构输出信号. 输入非线性函数 $f(\mathbf{u})$ 是连续单调可逆的.

中间线性时不变环节 (Linear time invariant, LTI) 为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{w}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^p$ 为中间 LTI 环节的输出信号.

输出过程非线性 $h(\mathbf{w})$ 可以表示为

$$\mathbf{y}(k) = h(\mathbf{w}(k)) \quad (3)$$

其中, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$ 为输出信号, 输出非线性函数 $h(\mathbf{w})$ 是连续单调可逆的.

非线性系统的输入输出约束为

$$\underline{\theta}_u \leq \mathbf{u}(k+i) \leq \bar{\theta}_u, \quad \forall i \geq 0 \quad (4)$$

$$\underline{\theta}_y \leq \mathbf{y}(k+i) \leq \bar{\theta}_y, \quad \forall i \geq 0 \quad (5)$$

其中, $\underline{\theta}_u = [\underline{\theta}_{u_1}, \dots, \underline{\theta}_{u_m}]^T$, $\bar{\theta}_u = [\bar{\theta}_{u_1}, \dots, \bar{\theta}_{u_m}]^T$, $\underline{\theta}_y = [\underline{\theta}_{y_1}, \dots, \underline{\theta}_{y_p}]^T$, $\bar{\theta}_y = [\bar{\theta}_{y_1}, \dots, \bar{\theta}_{y_p}]^T$.

因为输入非线性 $f(\mathbf{u})$ 连续单调可逆, 所以输入信号 \mathbf{u} 在式 (4) 内变化时, 由式 (1), 可得信号 \mathbf{v} 的变化范围:

$$\underline{\theta}_v \leq \mathbf{v}(k+i) = f(\mathbf{u}(k+i)) \leq \bar{\theta}_v, \quad \forall i \geq 0 \quad (6)$$

其中, $\underline{\theta}_v = [\underline{\theta}_{v_1}, \dots, \underline{\theta}_{v_m}]^T$, $\bar{\theta}_v = [\bar{\theta}_{v_1}, \dots, \bar{\theta}_{v_m}]^T$.

同理, 由于输出非线性 $h(\mathbf{w})$ 连续单调可逆, 所以输出信号 \mathbf{y} 在式 (5) 内变化时, 由式 (3), 可得信号 \mathbf{w} 的变化范围为

$$\underline{\theta}_w \leq \mathbf{w}(k+i) = h^{-1}(\mathbf{y}(k+i)) \leq \bar{\theta}_w, \quad \forall i \geq 0 \quad (7)$$

其中, $\underline{\theta}_w = [\underline{\theta}_{w_1}, \dots, \underline{\theta}_{w_p}]^T$, $\bar{\theta}_w = [\bar{\theta}_{w_1}, \dots, \bar{\theta}_{w_p}]^T$.

对于有约束的 Hammerstein-Wiener 型非线性系统, 构造如下多面体描述包含原非线性系统.

由式 (1), 输入非线性逆函数可以写为

$$\mathbf{u}(k) = f^{-1}(\mathbf{v}(k)) = g(\mathbf{v}(k)) \quad (8)$$

在平衡点邻域内, 输入非线性逆函数 (8) 的多面体描述为^[9, 23]

$$\mathbf{u}(k) = G(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}(k) \quad (9)$$

$$\text{其中, } G(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} & \frac{\partial u_1}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial v_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial v_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial v_1} & \frac{\partial u_m}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial v_m} \end{bmatrix}$$

为输入非线性逆偏微分矩阵, $G(\mathbf{v}) \in \Omega_G = Co\{G_1, \dots, G_{2^{m^2}}\}$. $G(\mathbf{v})$ 的第 r_1 行、第 r_2 列的最大值或最小值为 $G_{\max}^{r_1, r_2} = \max\{\frac{\partial u_{r_1}}{\partial v_{r_2}}\} \geq \frac{\partial u_{r_1}}{\partial v_{r_2}} \geq \min\{\frac{\partial u_{r_1}}{\partial v_{r_2}}\} = G_{\min}^{r_1, r_2}$, $\forall r_1, r_2 = 1, 2, \dots, m$. 由每个偏微分元素的最大值或最小值构成的输入非线性逆偏微分矩阵总数为 2^{m^2} , 即多面体描述 (9) 的顶点数为 2^{m^2} , 存在 2^{m^2} 个非负系数 c_{t_1} , 满足 $G(\mathbf{v}) = \sum_{t_1=1}^{2^{m^2}} c_{t_1} G_{t_1}$, $\sum_{t_1=1}^{2^{m^2}} c_{t_1} = 1$.

同理, 输出非线性函数 (3) 的多面体描述为

$$\mathbf{y}(k) = H(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}(k) \quad (10)$$

$$\text{其中, } H(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial w_1} & \frac{\partial y_1}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial w_p} \\ \frac{\partial y_2}{\partial w_1} & \frac{\partial y_2}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial w_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_p}{\partial w_1} & \frac{\partial y_p}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial y_p}{\partial w_p} \end{bmatrix}$$

为输出非线性偏微分矩阵, $H(\mathbf{w}) \in \Omega_H = \text{Co}\{H_1, \dots, H_{2^{p^2}}\}$. $H(\mathbf{w})$ 的第 s_1 行、第 s_2 列的最大值或最小值为 $H_{\max}^{s_1, s_2} = \max\{\frac{\partial y_{s_1}}{\partial w_{s_2}}\} \geq \frac{\partial y_{s_1}}{\partial w_{s_2}} \geq \min\{\frac{\partial y_{s_1}}{\partial w_{s_2}}\} = H_{\min}^{s_1, s_2}$, $\forall s_1, s_2 = 1, 2, \dots, p$. 由每个偏微分元素的最大值或最小值构成的输出非线性偏微分矩阵总数为 2^{p^2} , 即多面体描述 (10) 的顶点数为 2^{p^2} , 存在 2^{p^2} 个非负系数 d_{t_2} , 满足 $H(\mathbf{w}) = \sum_{t_2=1}^{2^{p^2}} d_{t_2} H_{t_2}$, $\sum_{t_2=1}^{2^{p^2}} d_{t_2} = 1$.

综上, Hammerstein-Wiener 型非线性系统的多面体描述为式 (2), (9) 和 (10), 其输入输出约束为式 (6) 和 (7).

2 模型预测控制综合方法

为了减少在线计算量和改善控制性能, 下面提出一种基于多面体终端域的预测控制综合方法. 离线设计时, 通过构造一系列多面体不变集, 扩大稳定终端域的范围; 在线综合时, 通过求解有限个变时域 LMI 优化问题, 获得较好的控制性能.

假设系统平衡点为 $(\mathbf{u}^{\text{eq}}, \mathbf{v}^{\text{eq}}, \mathbf{x}^{\text{eq}}, \mathbf{w}^{\text{eq}}, \mathbf{y}^{\text{eq}}) = (0, 0, 0, 0, 0)$, 即 $f(0) = 0, h(0) = 0$. 若平衡点不在原点, 可将系统进行状态转移, 使转换后系统的原点相应于被要求的平衡点. 于是, 带输入输出约束的二次型优化问题为^[9]

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(k+i|k), G(\mathbf{v}) \in \Omega_G, H(\mathbf{w}) \in \Omega_H, i \geq 0} J(k) = & \\ \sum_{i=0}^{\infty} \left[\|\mathbf{y}(k+i|k)\|_{R_y}^2 + \|\mathbf{u}(k+i|k)\|_{R_u}^2 \right] & \\ \text{s.t. (6), (7)} & \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $R_y \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 为正定误差加权阵, $R_u \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 为正定控制加权阵, 初始时刻 $\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}(k)$.

构造任意顶点数的多面体集

$$\Psi = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|V \cdot \mathbf{x}\|_{\infty} \leq 1\} \quad (12)$$

其中, V 为多面体集 Ψ 的系数矩阵.

引理 1. 给定 $\gamma > 0$, 如果状态 $\mathbf{x}_0 \in \Psi$, 满足可行约束 (6) 和 (7) 和稳定性约束 (13),

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{x}(k+i|k)) = \|V \cdot \mathbf{x}(k+1+i|k)\|_{\infty}^2 - & \\ \|V \cdot \mathbf{x}(k+i|k)\|_{\infty}^2 \leq -\frac{1}{\gamma} \|\mathbf{y}(k+i|k)\|_{R_y}^2 - & \\ \frac{1}{\gamma} \|\mathbf{u}(k+i|k)\|_{R_u}^2, \forall i \geq N & \end{aligned} \quad (13)$$

那么, 最小化原始问题 (11) 等价于最小化其上界:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(k+i|k), G(\mathbf{v}) \in \Omega_G, H(\mathbf{w}) \in \Omega_H, 0 \leq i \leq N-1} \bar{J}(k) = & \\ \sum_{i=0}^{N-1} \left[\|\mathbf{y}(k+i|k)\|_{R_y}^2 + \|\mathbf{u}(k+i|k)\|_{R_u}^2 \right] + & \\ \gamma \|V \cdot \mathbf{x}(k+N|k)\|_{\infty}^2 & \\ \text{s.t. (6), (7)} & \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $\gamma > 0$ 为性能指标的上界.

证明. 选取 Lyapunov 函数为

$$L(\mathbf{x}(k+i|k)) = \|V \cdot \mathbf{x}(k+i|k)\|_{\infty}^2, \quad i \geq N \quad (15)$$

其中, $\|V \cdot \mathbf{x}(k+i|k)\|_{\infty}^2$ 表示 V 与 $\mathbf{x}(k+i|k)$ 相乘所得列向量先取无穷范数, 然后再平方.

对于状态 $\mathbf{x}_0 \in \Psi$, 由于 Lyapunov 函数 (15) 正定, 其导数 (13) 负定, 所以在多面体集 Ψ 内, 系统满足 Lyapunov 稳定性.

将式 (13) 从 $i = N$ 到 $i = \infty$ 求和, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=N}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+i|k)\|_{R_y}^2 + \|\mathbf{u}(k+i|k)\|_{R_u}^2 \leq & \\ \gamma \|V \cdot \mathbf{x}(k+N|k)\|_{\infty}^2 & \end{aligned} \quad (16)$$

由式 (16), 得原始优化问题 (11) 上界的优化问题 (14). \square

2.1 离线计算多面体不变集序列

在处理线性不等式约束 (6) 和 (7) 时, 因为通常使用的椭圆集^[8-17] 有较大保守性, 所以这里采用更符合实际约束的多面体集, 扩大稳定终端域的范围; 在多面体不变集内, 由于通常采用的线性状态反馈控制律^[8-17] 也有较大保守性, 所以这里采用非线性控制律, 减少常规线性控制律设计的保守性.

在多面体不变集 Ψ 内, 通过对每个顶点 $\{\boldsymbol{\lambda}_l, l = 1, 2, \dots, n_l\}$ 所对应的控制量 $\{\boldsymbol{\kappa}_l, l = 1, 2, \dots, n_l\}$ 进行线性插值, 得到非线性控制律

$$\mathbf{k}_{n_l}(\mathbf{x}) = \|V \cdot \mathbf{x}\|_{\infty} \sum_{l=1}^{n_l} f_l \boldsymbol{\kappa}_l \quad (17)$$

其中, 参数 $\{f_l, \forall l = 1, 2, \dots, n_l\}$ 满足如下约束^[24]

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \|V \cdot \mathbf{x}\|_{\infty} \sum_{l=1}^{n_l} f_l \boldsymbol{\lambda}_l \\ \sum_{l=1}^{n_l} f_l = 1, f_l \geq 0 \end{cases} \quad (18)$$

如果多面体描述系统 (2), (9) 和 (10) 每个顶点都满足 Lyapunov 稳定性条件, 那么系统 Lyapunov 稳定. 于是, Lyapunov 稳定性条件 (13) 转化为

$$\begin{aligned} & \|V \cdot (A\mathbf{x}(k+i|k) + B\mathbf{v}(k+i|k))\|_{\infty}^2 - \\ & \|V \cdot \mathbf{x}(k+i|k)\|_{\infty}^2 \leq \\ & -\frac{1}{\gamma} \|H_j C \mathbf{x}(k+i|k)\|_{R_y}^2 - \\ & \frac{1}{\gamma} \|G_j \mathbf{v}(k+i|k)\|_{R_u}^2 \\ & \forall j = 1, 2, \dots, 2^{m^2+p^2}, i \geq N \quad (19) \end{aligned}$$

其中, 输入多面体描述顶点数为 2^{m^2} , 输出多面体描述顶点数为 2^{p^2} , 即多面体描述系统顶点数为 $2^{m^2+p^2}$.

将式 (17) 和 (18) 代入式 (19), 得 Lyapunov 稳定性条件为

$$\begin{aligned} & \|V \cdot (A\boldsymbol{\lambda}_l + B\boldsymbol{\kappa}_l)\|_{\infty}^2 - 1 \leq \\ & -\frac{1}{\gamma} \|H_j C \boldsymbol{\lambda}_l\|_{R_y}^2 - \frac{1}{\gamma} \|G_j \boldsymbol{\kappa}_l\|_{R_u}^2 \\ & \forall j = 1, 2, \dots, 2^{m^2+p^2}, l = 1, 2, \dots, n_l \quad (20) \end{aligned}$$

设多面体集 Ψ_0 的顶点为 $\{\boldsymbol{\lambda}_l^{(0)}, (\boldsymbol{\lambda}_h^{(0)})_{h \neq l}\}$. 如果直接求解满足约束 (6), (7) 和 (20) 的“最大”多面体集 Ψ_1 的顶点, 非常困难; 但如果固定 Ψ_1 其他顶点 $\{(\boldsymbol{\lambda}_h^{(0)})_{h \neq l}\}$, 仅仅求解其中某个顶点 $\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)}$, 则要简单得多. 此时, 求解“最大”多面体集 Ψ_1 等价于最大化 $vol(\Psi_1 - \Psi_0)$ ^[22]:

$$vol(\Psi_1 - \Psi_0) = \frac{(\sum_g \det(X_{l,g}) - X_{l,g}^{-1} \boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)})}{n!} \quad (21)$$

其中, $X_{l,g}$ 为第 g 个空间矩阵, 对应于 Ψ_0 中包含顶点 $\boldsymbol{\lambda}_l^{(0)}$ 的第 g 个边界平面; $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$.

$X_{l,g}$ 和顶点 $\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)}$ 不相关, 故最大化 $vol(\Psi_1 - \Psi_0)$ 等价于最小化 $b_l^T \boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)}$, $\forall b_l = \sum_{g=1} X_{l,g}^{-T} \mathbf{1}$.

定理 1. 给定性能上界 $\gamma^{(0)}$ 和渐稳多面体集 Ψ_0 . 其中, 多面体集 $\Psi_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|V^{(0)} \cdot \mathbf{x}\|_{\infty} \leq 1\}$ 满足可行约束 (6), (7) 和稳定约束 (20). 由式 (22) ~ (25), 更新多面体集 Ψ_0 的第 l 个顶点 $\boldsymbol{\lambda}_l^{(0)}$, 可得多面体集 Ψ_1 的第 l 个顶点 $\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)}$. 其中, 多面体集 Ψ_1 是性能上界为 $\gamma^{(0)}$ 的所有多面体集中“最大”的一个.

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)}, \boldsymbol{\kappa}_l^{(-1)}} b_l^T \boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)} \quad (22)$$

s.t.

$$\begin{aligned} & \|V^{(0)} \cdot (A\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)} + B\boldsymbol{\kappa}_l^{(-1)})\|_{\infty}^2 + \frac{1}{\gamma^{(0)}} \times \\ & \|H_j C \boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)}\|_{R_y}^2 + \frac{1}{\gamma^{(0)}} \|G_j \boldsymbol{\kappa}_l^{(-1)}\|_{R_u}^2 \leq 1 \\ & \forall j = 1, 2, \dots, 2^{m^2+p^2} \quad (23) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\theta}_v \leq \boldsymbol{\kappa}_l^{(-1)} \leq \bar{\boldsymbol{\theta}}_v \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\theta}_L \leq C \boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)} \leq \bar{\boldsymbol{\theta}}_L \quad (25)$$

证明. 由 Lyapunov 稳定性条件 (20), 得

$$\begin{aligned} & \|V^{(-1)} \cdot (A\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)} + B\boldsymbol{\kappa}_l^{(-1)})\|_{\infty}^2 + \frac{1}{\gamma^{(0)}} \times \\ & \|H_j C \boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)}\|_{R_y}^2 + \frac{1}{\gamma^{(0)}} \|G_j \boldsymbol{\kappa}_l^{(-1)}\|_{R_u}^2 \leq 1 \\ & \forall j = 1, 2, \dots, 2^{m^2+p^2} \quad (26) \end{aligned}$$

对于多面体集 $\Psi_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|V^{(0)} \cdot \mathbf{x}\|_{\infty} \leq 1\}$ 和 $\Psi_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|V^{(-1)} \cdot \mathbf{x}\|_{\infty} \leq 1\}$, 由于状态满足 $\mathbf{x} \in \Psi_0$, 且 $\Psi_0 \subset \Psi_1$, 故

$$\begin{aligned} & \|V^{(-1)} \cdot (A\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)} + B\boldsymbol{\kappa}_l^{(-1)})\|_{\infty}^2 \leq \\ & \|V^{(0)} \cdot (A\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)} + B\boldsymbol{\kappa}_l^{(-1)})\|_{\infty}^2 \quad (27) \end{aligned}$$

由式 (26) 和 (27), 得最终 Lyapunov 稳定性条件 (23).

另外, 与多面体集 Ψ_1 的顶点 $\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)}$ 对应的控制量 $\boldsymbol{\kappa}_l^{(-1)}$ 满足约束 (24); 顶点 $\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)}$ 满足约束 (25). \square

定理 1 给出了“最大”多面体集 Ψ_1 的单个顶点 $\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)}$ 更新方法, 逐个更新多面体集 Ψ_1 所有顶点, 得上界为 $\gamma^{(0)}$ 的“最大”多面体集 Ψ_1 . 如算法 1 所示.

算法 1. 求解最大多面体集 Ψ_1 .

步骤 1. 给定初始性能上界 $\gamma^{(0)}$ 和渐近稳定的初始多面体集 $\Psi_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|V^{(0)} \cdot \mathbf{x}\|_{\infty} \leq 1\}$. 其中, 初始多面体集 Ψ_0 满足可行性约束 (6), (7) 和稳定性约束 (20), 令 $l = 1$.

步骤 2. 求解 LMI 优化问题 (22) ~ (25), 得到性能上界为 $\gamma^{(0)}$ 的“最大”多面体不变集 Ψ_1 的顶点 $\boldsymbol{\lambda}_l^{(-1)}$, 以及其对应的控制变量 $\boldsymbol{\kappa}_l^{(-1)}$.

步骤 3. 若 $l = n_l$, 则停止; 否则令 $l = l + 1$, 返回步骤 2.

注 1. 算法 1 可以求解上界为 $\gamma^{(0)}$ 的最大多面体不变集 Ψ_1 , 但其计算较为复杂. 若在固定多面体

形状的前提下, 多面体不变集 Ψ_1 的计算简单得多. 假设多面体集 Ψ_0 的顶点为 $\lambda_l^{(0)}$, 则与多面体集 Ψ_0 形状相同的多面体集 Ψ_1 的顶点 $\lambda_l^{(-1)}$ 可以表示为 $\rho\lambda_l^{(0)}$. 于是, 计算多面体集 Ψ_1 可以简化为求解如下优化问题:

$$\begin{aligned} & \max_{\rho, \kappa_l^{(-1)}} |\rho|, \quad \forall l = 1, 2, \dots, n_l \\ \text{s.t.} & \quad (23) \sim (25) \end{aligned} \quad (28)$$

算法 2. 离线构造多面体不变集序列, $\Psi_{j_\Psi} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|V^{(-j_\Psi)} \cdot \mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$, $j_\Psi = 1, 2, \dots, M$.

步骤 1. 给定渐近稳定的初始多面体集 $\Psi_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|V^{(0)}\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$. 其中, 多面体集 Ψ_0 满足可行性约束 (6), (7) 和稳定性约束 (20). 并给定一系列递增的终端性能上界 $0 < \gamma^{(0)} < \gamma^{(-1)} < \dots < \gamma^{-(M-1)}$, 令 $j_\Psi = 1$.

步骤 2. 将算法 1 中 $\{(\lambda_l^{(-1)}, \kappa_l^{(-1)})_{l=1}^{n_l}\}$ 替换为 $\{(\lambda_l^{(-j_\Psi)}, \kappa_l^{(-j_\Psi)})_{l=1}^{n_l}\}$, 初始多面体集 Ψ_0 替换为 $\Psi_{j_\Psi-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|V^{-(j_\Psi-1)} \cdot \mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$, 初始性能上界 $\gamma^{(0)}$ 替换为 $\gamma^{-(j_\Psi-1)}$. 然后, 用算法 1 求 $\{(\lambda_l^{(-j_\Psi)}, \kappa_l^{(-j_\Psi)})_{l=1}^{n_l}\}$, 从而计算多面体集 Ψ_{j_Ψ} 的系数 $V^{(-j_\Psi)}$.

步骤 3. 若 $j_\Psi = M + 1$, 则停止; 否则令 $j_\Psi = j_\Psi + 1$, 返回步骤 2.

2.2 在线求解 Min-max 优化问题

对于多面体描述系统 (2), (9) 和 (10), 输入输出信号的预测值为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k|k) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+N-1|k) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} G(\mathbf{v}(k|k)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & G(\mathbf{v}(k+N-1|k)) \end{bmatrix} \times \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k|k) \\ \vdots \\ \mathbf{v}(k+N-1|k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}(k|k) \\ \vdots \\ \mathbf{w}(k+N-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ CB & \ddots & & & \vdots \\ CAB & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-2}B & \dots & CAB & CB & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k|k) \\ \vdots \\ \mathbf{v}(k+N-1|k) \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(k|k) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+N-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(\mathbf{w}(k|k)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & H(\mathbf{w}(k+N-1|k)) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k|k) \\ \vdots \\ \mathbf{w}(k+N-1|k) \end{bmatrix} \quad (31)$$

即

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{G}(\tilde{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{v}} \quad (32)$$

$$\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{C}_A\mathbf{x}(k) + \tilde{C}_B\tilde{\mathbf{v}} \quad (33)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{H}(\tilde{\mathbf{w}})\tilde{\mathbf{w}} \quad (34)$$

其中, $\mathbf{x}(k)$ 为初始状态; $\tilde{G}(\tilde{\mathbf{v}})$, \tilde{C}_A , \tilde{C}_B 和 $\tilde{H}(\tilde{\mathbf{w}})$ 分别对应式 (29)~(31) 中的矩阵, 且 $\tilde{G}(\tilde{\mathbf{v}}) \in \tilde{\Omega}_{\tilde{G}} = Co\{\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_{2^{m^2N}}\}$, $\tilde{H}(\tilde{\mathbf{w}}) \in \tilde{\Omega}_{\tilde{H}} = Co\{\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{2^{p^2N}}\}$. 于是, 整个多面体描述系统 (32)~(34) 的顶点数为 $2^{m^2N} \cdot 2^{p^2N}$.

上述多面体描述系统 (32)~(34), 包含在如下的线性微分包含中:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{G}_f\tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{w}} = \tilde{C}_A\mathbf{x}(k) + \tilde{C}_B\tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{H}_f\tilde{\mathbf{w}} \end{cases} \quad (35)$$

$$\forall f = 1, 2, \dots, 2^{(m^2+p^2)N}$$

由式 (14) 和 (15), 得时域 N 内二次性能指标上界为

$$\eta_1 \geq \left\| \tilde{C}_A \mathbf{x}(k) + \tilde{C}_B \tilde{\mathbf{v}} \right\|_{\tilde{H}_f^T \tilde{R}_y \tilde{H}_f}^2 + \left\| \tilde{\mathbf{v}} \right\|_{\tilde{G}_f^T \tilde{R}_u \tilde{G}_f}^2, \quad \forall f = 1, 2, \dots, 2^{(m^2+p^2)N} \quad (36)$$

由 Schur 补引理^[25], 得到式 (36) 的 LMI 形式^[26]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_u^{-1} & * & * \\ 0 & \tilde{R}_y^{-1} & * \\ [\tilde{G}_f \tilde{\mathbf{v}}]^T & [\tilde{H}_f(\tilde{C}_A \mathbf{x}(k) + \tilde{C}_B \tilde{\mathbf{v}})]^T & \eta_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall f = 1, 2, \dots, 2^{(m^2+p^2)N} \quad (37)$$

由式 (2), 可以求得状态的预测值:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1|k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+N|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ AB & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A^{N-1}B & \cdots & AB & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k|k) \\ \vdots \\ \mathbf{v}(k+N-1|k) \end{bmatrix} \quad (38)$$

即

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}(k+N|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{A}_N \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ \tilde{B}_N \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \quad (39)$$

其中, $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}(k+1|k)^T, \dots, \mathbf{x}(k+N-1|k)^T]^T$; \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{A}_N 和 \tilde{B}_N 分别对应式 (38) 中的矩阵.

由式 (14) 和 (39), 得时域 N 外二次性能指标上界为

$$\left[\left\| \sqrt{\gamma} \cdot V \cdot (\tilde{A}_N \mathbf{x}(k) + \tilde{B}_N \tilde{\mathbf{v}}) \right\|_{\infty} \quad * \right. \left. \begin{matrix} \eta_2 \\ 1 \end{matrix} \right] \geq 0 \quad (40)$$

由式 (12) 和 (39), 终端状态满足如下不等式

$$\left\| V \cdot (\tilde{A}_N \mathbf{x}(k) + \tilde{B}_N \tilde{\mathbf{v}}) \right\|_{\infty} \leq 1 \quad (41)$$

在时域 N 内, 输入约束 (6) 可以表示为

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{\mathbf{v}}} \leq \tilde{\mathbf{v}} \leq \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{\mathbf{v}}} \quad (42)$$

其中, $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(k+i|k), \forall i = 1, 2, \dots, N-1$; $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{\mathbf{v}}}$ 是由 $\boldsymbol{\theta}_{\tilde{\mathbf{v}}}$ 组成的相应维数列向量; $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{\mathbf{v}}}$ 是由 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{\mathbf{v}}}$ 组成的相应维数列向量.

将式 (33) 代入式 (7), 得到时域 N 内的输出约束:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{\mathbf{w}}} \leq \tilde{C}_A \mathbf{x}(k) + \tilde{C}_B \tilde{\mathbf{v}} \leq \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{\mathbf{w}}} \quad (43)$$

其中, $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}(k+i|k), \forall i = 1, 2, \dots, N-1$; $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ 是由 $\boldsymbol{\theta}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ 组成的相应维数列向量; $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ 是由 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ 组成的相应维数列向量.

算法 3. 在线计算自由控制量 $\tilde{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}(k|k)^T, \dots, \mathbf{v}(k+N-1|k)^T]^T$.

步骤 1. 由算法 2 离线构造多面体不变集序列 $\Psi_{j_{\Psi}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|V^{(-j_{\Psi})} \cdot \mathbf{x}\|_{\infty} \leq 1\}, \forall j_{\Psi} = 1, 2, \dots, M$; 对于初始状态 $\mathbf{x}(k)$, 由式 (39), 得到终端状态表达式 $\mathbf{x}(k+N|k) = \tilde{A}_N \mathbf{x}(k) + \tilde{B}_N \tilde{\mathbf{v}}$.

步骤 2. 若 $N > 1$, 则采用时域逐渐递减的方法, 由式 (44) 在线求解有限个 LMI 优化问题, 得到控制量 $\tilde{\mathbf{v}}$, 并应用第一个控制量 $\mathbf{v}(k|k)$; 若时域递减为 $N = 1$, 则改为采用时域固定的方法, 然后由式 (44) 在线计算控制量 $\mathbf{v}(k|k)$, 并应用 $\mathbf{v}(k|k)$. 即:

若 $N > 1$, 则求解如下 $M - m_k + 1$ 个 LMI 优化问题

$$\begin{aligned} \min_{j_{\Psi_k}, \tilde{\mathbf{v}}, \eta_1, \eta_2} \quad & \eta_1 + \eta_2 \\ \text{s.t.} \quad & (37), (42), (43), (45), (46) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\left[\left\| \sqrt{\gamma}^{-(j_{\Psi_k}-1)} V^{(-j_{\Psi_k})} \cdot (\tilde{A}_N \mathbf{x}(k) + \tilde{B}_N \tilde{\mathbf{v}}) \right\|_{\infty} \quad * \right. \left. \begin{matrix} \eta_2 \\ 1 \end{matrix} \right] \geq 0 \quad (45)$$

$$\left\| V^{(-j_{\Psi_k})} \cdot (\tilde{A}_N \mathbf{x}(k) + \tilde{B}_N \tilde{\mathbf{v}}) \right\|_{\infty} \leq 1 \quad (46)$$

上面优化问题中, 终端状态满足约束 $\mathbf{x}(k+N|k) \in \Psi_{j_{\Psi_k}}, \forall j_{\Psi_k} = m_k, m_k+1, \dots, M, 1 \leq m_k \leq M$. 最终选择包含终端状态 $\mathbf{x}(k+N|k)$ 的所有多面体集 $\{\Psi_{j_{\Psi_k}}\}_{j_{\Psi_k}=m_k}^M$ 中“最小”的渐近稳定多面体集 Ψ_{m_k} 作为终端集 (即在包含终端状态 $\mathbf{x}(k+N|k)$ 的所有多面体集 $\{\Psi_{j_{\Psi_k}}\}_{j_{\Psi_k}=m_k}^M$ 中, 选择下标最小的那个多面体集 Ψ_{m_k} 作为终端集).

应用 $\mathbf{v}(k|k)$, 令 $N = N - 1$;

否则, 若 $N = 1$, 求解式 (44), 应用 $\mathbf{v}(k|k)$.

步骤 3. 令 $k = k + 1$, 重复步骤 2, 状态将稳定到平衡点.

由于 LMI 优化问题 (44) 的最大求解次数仅与离线计算的渐近稳定多面体集个数相关, 因此可以根据实时性要求, 配置离线计算的多面体集个数, 使得在满足实时性的同时, 优化问题 (44) 能获得较好的在线性能.

3 稳定性分析

定理 2. 如果预测控制综合算法 (算法 3) 在初始时刻存在可行解, 则在其后的任意时刻都存在可行解, 保证闭环系统渐近稳定.

证明. 在初始状态, 求解时域为 N 的优化问题 (44), 得到 k 时刻的可行解 $\tilde{\mathbf{v}}^*(k) = [\mathbf{v}^*(k|k)^T, \dots, \mathbf{v}^*(k+N-1|k)^T]^T$ 和 η_1^* , 终端状态满足约束 $\mathbf{x}(k+N|k) \in \Psi_{j_\Psi} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|V^{(-j_\Psi)} \cdot \mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$.

在 $k+1$ 时刻, 控制时域递减为 $N-1$, 可行解可以表示为 $\tilde{\mathbf{v}}(k+1) = [\mathbf{v}^*(k+1|k)^T, \dots, \mathbf{v}^*(k+N-1|k)^T]^T$, $\eta_1 = \eta_1^* - \|C\mathbf{x}^*(k)\|_{H(\mathbf{w})^T R_{\mathbf{y}} H(\mathbf{w})} - \|\mathbf{v}^*(k|k)\|_{G(\mathbf{v})^T R_{\mathbf{u}} G(\mathbf{v})}$.

若控制时域递减为 $N=1$, 则改为采用固定时域的预测控制, 保证始终有一个自由控制变量. 假设 k 时刻的控制时域已经减小到 $N=1$, 可行解为 η_1^* 和 $\mathbf{v}^*(k|k)$, 则与其相对应的性能指标为

$$\begin{aligned} \bar{J}^*(k) = & \|C\mathbf{x}^*(k)\|_{H(\mathbf{w})^T R_{\mathbf{y}} H(\mathbf{w})}^2 + \\ & \|\mathbf{v}^*(k|k)\|_{G(\mathbf{v})^T R_{\mathbf{u}} G(\mathbf{v})}^2 + \\ & \gamma^{-(j_\Psi-1)} \|V^{(-j_\Psi)} \cdot \mathbf{x}^*(k+1|k)\|_\infty^2 \end{aligned} \quad (47)$$

在 $k+1$ 时刻, 固定时域 MPC 的状态可行解可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k+1) = & \mathbf{x}^*(k+1|k) = \\ & A\mathbf{x}^*(k) + B\mathbf{v}^*(k|k) \end{aligned} \quad (48)$$

在 $k+1$ 时刻, 固定时域 MPC 的控制律可行解可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k+1|k+1) = & \mathbf{k}_{nl}^{(-j_\Psi)}(\mathbf{x}^*(k+1|k)) = \\ & \|V^{(-j_\Psi)} \cdot \mathbf{x}^*(k+1|k)\|_\infty \sum_{l=1}^{n_l} f_l^{(-j_\Psi)} \boldsymbol{\kappa}_l^{(-j_\Psi)} \end{aligned} \quad (49)$$

其中, 参数 $\{f_l^{(-j_\Psi)}, l=1, 2, \dots, n_l\}$ 满足如下约束

$$\begin{cases} \mathbf{x}^*(k+1|k) = \\ \quad \|V^{(-j_\Psi)} \cdot \mathbf{x}^*(k+1|k)\|_\infty \sum_{l=1}^{n_l} f_l^{(-j_\Psi)} \boldsymbol{\lambda}_l^{(-j_\Psi)} \\ \sum_{l=1}^{n_l} f_l^{(-j_\Psi)} = 1, f_l^{(-j_\Psi)} \geq 0 \end{cases} \quad (50)$$

由式 (48) 和 (49), 得 $k+1$ 时刻, 时域 N 内性能上界可行解为

$$\begin{aligned} \eta_1 = & \|C\mathbf{x}^*(k+1|k)\|_{H(\mathbf{w})^T R_{\mathbf{y}} H(\mathbf{w})}^2 + \\ & \|\mathbf{k}_{nl}^{(-j_\Psi)}(\mathbf{x}^*(k+1|k))\|_{G(\mathbf{v})^T R_{\mathbf{u}} G(\mathbf{v})}^2 \end{aligned} \quad (51)$$

在控制律 (49) 作用下, 终端状态满足约束 $\mathbf{x}(k+2|k+1) \in \Psi_{j_\Psi} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|V^{(-j_\Psi)} \cdot \mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$.

由式 (14) 和 (15), 得

$$\begin{aligned} \bar{J}(k+1) = & \|C\mathbf{x}^*(k+1|k)\|_{H(\mathbf{w})^T R_{\mathbf{y}} H(\mathbf{w})}^2 + \\ & \|\mathbf{k}_{nl}^{(-j_\Psi)}(\mathbf{x}^*(k+1|k))\|_{G(\mathbf{v})^T R_{\mathbf{u}} G(\mathbf{v})}^2 + \end{aligned} \quad (52)$$

$$\gamma^{-(j_\Psi-1)} \|V^{(-j_\Psi)} \cdot (\mathbf{x}(k+2|k+1))\|_\infty^2$$

由式 (13), 得

$$\begin{aligned} \gamma^{-(j_\Psi-1)} \|V^{(-j_\Psi)} \cdot (\mathbf{x}^*(k+2|k))\|_\infty^2 \leq & \\ \gamma^{-(j_\Psi-1)} \|V^{(-j_\Psi)} \cdot (\mathbf{x}^*(k+1|k))\|_\infty^2 - & \\ \|C\mathbf{x}^*(k+1|k)\|_{H(\mathbf{w})^T R_{\mathbf{y}} H(\mathbf{w})}^2 - & \\ \|\mathbf{k}_{nl}^{(-j_\Psi)}(\mathbf{x}^*(k+1|k))\|_{G(\mathbf{v})^T R_{\mathbf{u}} G(\mathbf{v})}^2 & \end{aligned} \quad (53)$$

由式 (47), (52) 和 (53), 得

$$\begin{aligned} \bar{J}(k+1) - \bar{J}^*(k) \leq & -\|C\mathbf{x}^*(k)\|_{H(\mathbf{w})^T R_{\mathbf{y}} H(\mathbf{w})}^2 - \\ & \|\mathbf{v}^*(k|k)\|_{G(\mathbf{v})^T R_{\mathbf{u}} G(\mathbf{v})}^2 < 0 \end{aligned} \quad (54)$$

另外, 通过求解优化问题 (44), 可得 $k+1$ 时刻的全局最优性能指标 $\bar{J}^*(k+1)$. 其满足不等式约束:

$$\bar{J}^*(k+1) \leq \bar{J}(k+1) \quad (55)$$

由式 (54) 和 (55), 得

$$\bar{J}^*(k+1) < \bar{J}^*(k) \quad (56)$$

因为 Lyapunov 函数递减, 所以预测控制综合算法可使闭环系统渐近稳定. \square

4 仿真

电弧炉电极调节系统是一个 Hammerstein-Wiener 型非线性系统, 如图 2 所示. 整个电弧炉电极调节系统由液压和电弧两部分组成^[27]. 其中, 液压由死区非线性环节和三阶线性环节串联; 电弧主回路为电弧弧长映射到电弧电流的静态非线性环节.

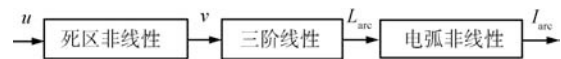


图 2 电弧炉电极调节系统

Fig. 2 Electric arc furnace electrode regulator system

图 2 中, 死区非线性为

$$v = \begin{cases} m_r(u - b_r), & u \geq b_r \\ 0, & b_l < u < b_r \\ m_l(u - b_l), & u \leq b_l \end{cases} \quad (57)$$

其中, v 为伺服阀开度; $u \in \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^1$ 为控制器输出; m_r 和 m_l 为死区斜率; b_r 和 b_l 为死区断点.

死区参数为 $m_l = m_r = 1$, $b_r = 2$, $b_l = -2$.

由式 (57), 死区逆函数为

$$u = \begin{cases} \frac{v + m_r b_r (1 - e^{-10^3 v^2})}{m_r}, & v > 0 \\ 0, & v = 0 \\ \frac{v + m_l b_l (1 - e^{-10^3 v^2})}{m_l}, & v < 0 \end{cases} \quad (58)$$

图 2 中, 液压线性环节可以表示为^[28-29]

$$q_L = k_q v - k_c p_L \quad (59)$$

$$q_L = a_p \frac{dL_{\text{arc}}}{dt} + \frac{v_e}{\beta_e} \frac{dp_L}{dt} + c_{\text{et}} p_L \quad (60)$$

$$a_p p_L = m_0 \frac{d^2 L_{\text{arc}}}{dt^2} \quad (61)$$

其中, q_L 为负载流量, k_q 为流量增益, k_c 为流量-压力系数, p_L 为负载压力, a_p 为电极升降柱塞缸的有效面积, L_{arc} 为活塞位移, v_e 为液压缸的等效容积, β_e 为液压体积弹性模量, c_{et} 为等效泄漏系数, m_0 为阀控缸的负载质量.

液压线性环节参数为 $a_p = 0.0157 \text{ m}^2$, $m_0 = 3036.4 \text{ kg}$, $\beta_e = 2.36 \times 10^8 \text{ Pa}$, $v_e = 0.05666 \text{ m}^3$, $k_c = 1.68 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{Pa/s}$, $c_{\text{et}} = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}^3/\text{Pa/s}$, $k_q = 3.009 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$.

由式 (59)~(61), 液压线性环节的离散方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k) \\ L_{\text{arc}}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (62)$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T = [\dot{L}_{\text{arc}}, p_L, L_{\text{arc}}]^T$; 系数矩阵

$$\text{为 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3.46 \times 10^{-2} & 1.96 \times 10^{-7} & 0 \\ -2.48 \times 10^6 & -3.00 \times 10^{-1} & 0 \\ 5.91 \times 10^{-2} & 1.58 \times 10^{-8} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.98 \times 10^{-1} \\ 4.74 \times 10^5 \\ 7.81 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [0 \ 0 \ 1]; \text{ 采样周期为}$$

$T_s = 0.1 \text{ s}$.

在忽略电极烧蚀和电弧弧长扰动的前提下, 电弧弧长与活塞位移是相同的; 当电弧炉变压器的二次侧电压一定时, 电弧电流有效值与电弧弧长近似成反比. 于是, 图 2 中电弧非线性可以表示为^[30]

$$I_{\text{arc}} = k_1 L_{\text{arc}}^{k_2} \quad (63)$$

其中, $I_{\text{arc}} \in \mathbf{R}^p = \mathbf{R}^1$ 为电弧电流有效值, L_{arc} 为电弧弧长.

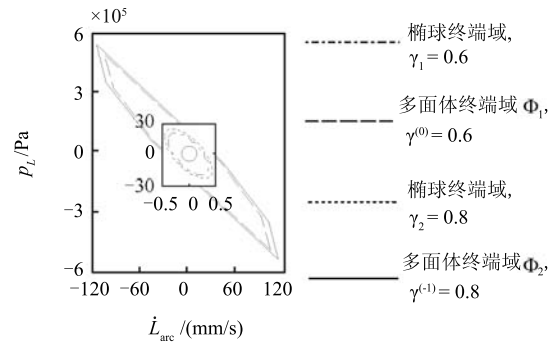
电弧非线性参数为 $k_1 = 2.3$, $k_2 = -1$.

综上, 图 2 中的电弧炉电极调节系统可以表示为式 (57), (62) 和 (63).

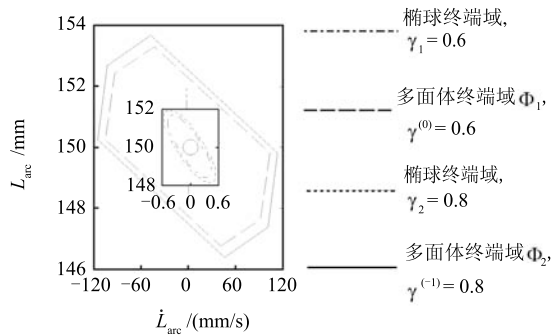
实际系统的平衡点为 $u^{\text{eq}} = 0$, $v^{\text{eq}} = 0$, $\dot{L}_{\text{arc}}^{\text{eq}} = 0 \text{ mm/s}$, $p_L^{\text{eq}} = 0 \text{ kPa}$, $L_{\text{arc}}^{\text{eq}} = 150 \text{ mm}$, $I_{\text{arc}}^{\text{eq}} = 15.3 \text{ kA}$. 这里采用状态转移, 使转化后系统的平衡点为原点. 在电弧炉冶炼过程中, 电弧弧长存在扰动, 电弧弧长的变化范围为 $50 \text{ mm} \sim 250 \text{ mm}$. 假设初始状态为 $\dot{L}_{\text{arc}} = 0 \text{ mm/s}$, $p_L = 0 \text{ Pa}$, $L_{\text{arc}} = 100 \text{ mm}$. 优化目标中权值为 $R_u = 5 \times 10^{-4}$, $R_y = 1 \times 10^{-2}$, 初始控制时域为 $N = 3$. 控制输入约束为 $u \in [-10, 10] \text{ (V)}$, 电弧电流输出约束为 $I_{\text{arc}} \in [9.2, 46] \text{ (kA)}$. 死区逆非线性的多面体描述为 $u = G(v) \cdot v$, $G(v) \in \text{Co}\{1, 54.63\}$; 电弧非线性的多面体描述为 $I_{\text{arc}} = H(L_{\text{arc}}) \cdot L_{\text{arc}}$, $H(L_{\text{arc}}) \in \text{Co}\{-920, -36.8\}$.

采用预测控制综合算法控制电弧炉电极调节系统. 首先, 由算法 2 离线构造一系列多面体不变域 $\Psi_{j_\Psi} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|V^{(-j_\Psi)} \cdot \mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$, $\forall j_\Psi = 1, 2, \dots, M$, 选择多面体不变集个数为 $M = 2$; 然后, 由算法 3 在线求解有限个变时域 LMI 优化问题.

比较多面体终端域和传统椭球终端域^[15]的大小, 如图 3 所示.



(a) 终端域在 $\dot{L}_{\text{arc}} o p_L$ 面上的投影
(a) The projections of terminal regions on the plane $\dot{L}_{\text{arc}} o p_L$



(b) 终端域在 $\dot{L}_{\text{arc}} o L_{\text{arc}}$ 面上的投影
(b) The projections of terminal regions on the plane $\dot{L}_{\text{arc}} o L_{\text{arc}}$

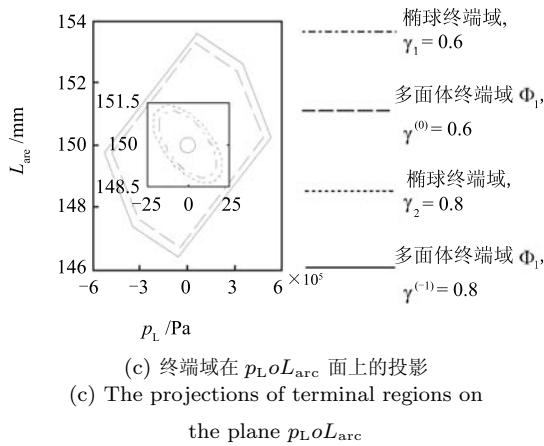


图 3 两种方法的终端域比较

Fig. 3 Comparison of terminal regions with two methods

由图 3 可知, 随着性能上界的增加 $\gamma^{(0)} \leq \gamma^{(-1)}$, 终端域是扩大的; 而且, 在性能上界相同时, 多面体终端域要比传统椭球终端域^[15] 大得多. 其主要原因如下: 1) 在处理线性不等式形式的系统约束时, 采用椭球不变集有较大保守性, 采用多面体不变集可以减少这种保守性, 从而扩大终端域; 2) 在多面体不变集内, 设计非线性控制律, 而不是通常采用的线性状态反馈控制律, 减少控制律设计的保守性, 稳定终端域的范围变大.

比较多面体终端域方法和传统椭球终端域方法^[15], 计算所得的电弧电流响应曲线, 如图 4 所示.

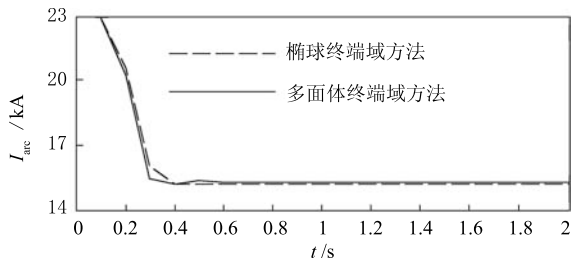


图 4 两种方法的电弧电流响应曲线比较

Fig. 4 Comparison of arc current response curves with two methods

由图 4 可知, 本文方法有效地改善了非线性系统的控制性能. 不仅加快了响应速度, 而且提高了系统的控制精度.

5 结论

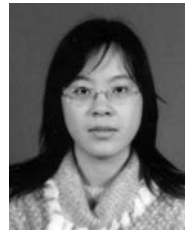
本文针对含有约束的 Hammerstein-Wiener 型非线性系统, 利用离线设计在线综合的思想, 提出一种基于多面体终端域的预测控制综合方法. 由于构造了一系列的多面体不变集, 而不是传统的椭球不变集, 所以扩大了稳定终端域的范围; 另外, 在多面体不变集内, 因为设计了非线性控制律, 代替了通常

的线性反馈控制律, 所以减少了常规线性控制律设计的保守性. 最终在满足实时性的同时, 提高了系统的控制性能.

References

- Henson M A. Nonlinear model predictive control: current status and future directions. *Computers and Chemical Engineering*, 1998, **23**(2): 187–202
- Ding Bao-Cang, Xi Yu-Geng, Li Shao-Yuan. Stability analysis on predictive control of discrete-time systems with input nonlinearity. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(6): 827–834
- Xu Xiang-Yuan, Mao Zong-Yuan. The analysis and research of predictive control based on Hammerstein model. *Control Theory and Applications*, 2000, **17**(4): 529–532 (徐湘元, 毛宗源. 基于 Hammerstein 模型预测控制的分析与研究. *控制理论与应用*, 2000, **17**(4): 529–532)
- Ding Bao-Cang, Li Shao-Yuan. Design and analysis of Hammerstein nonlinear control systems with constraints. *Control and Decision*, 2003, **18**(1): 24–28 (丁宝苍, 李少远. 具有约束的 Hammerstein 非线性控制系统的设计与分析. *控制与决策*, 2003, **18**(1): 24–28)
- Ding B C, Xi Y G. A two-step predictive control design for input saturated Hammerstein systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, **16**(7): 353–367
- Zhang H T, Li H X, Chen G R. Dual-mode predictive control algorithm for constrained Hammerstein systems. *International Journal of Control*, 2008, **81**(10): 1609–1625
- Niu Yong-Xiao, Ding Bao-Cang, Sun He-Xu. Robust stability of two-step predictive control for systems with input nonlinearities. *Control and Decision*, 2006, **21**(4): 457–461 (牛永肖, 丁宝苍, 孙鹤旭. 输入非线性系统的两步法预测控制的鲁棒稳定性. *控制与决策*, 2006, **21**(4): 457–461)
- Bloemen H H J, Van D B T J J, Verbruggen H B. Model-based predictive control for Hammerstein systems. In: *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia: IEEE, 2000. 4963–4968
- Bloemen H H J, Boom T J J V D, Verbruggen H B. Model-based predictive control for Hammerstein-Wiener systems. *International Journal of Control*, 2001, **74**(5): 482–495
- Kouvaritakis B, Rossiter J A, Schuurmans J. Efficient robust predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(8): 1545–1549
- Wan Z, Kothare M V. Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set. *Systems and Control Letters*, 2003, **48**(5): 375–383
- Pluymers B, Suykens J A K, Moor B D. Min-max feedback MPC using a time-varying terminal constraint set and comments on “efficient robust constrained model predictive control with a time-varying terminal constraint set”. *Systems and Control Letters*, 2005, **54**(12): 1143–1148
- Wan Z, Pluymers B, Kothare M V, Moor B D. Comments on: “Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set” by Wan and Kothare. *Systems and Control Letter*, 2006, **55**(7): 618–621

- 14 Zheng Peng-Yuan, Xi Yu-Geng, Li De-Wei. Improved synthesis approach of robust constrained model predictive controller. *Control and Decision*, 2008, **23**(9): 1040–1044
(郑鹏远, 席裕庚, 李德伟. 一种改进的鲁棒约束预测控制器的综合设计方法. 控制与决策, 2008, **23**(9): 1040–1044)
- 15 Wan Z Y, Kothare M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 2003, **39**(5): 837–846
- 16 Ding Bao-Cang, Yang Peng. Synthesizing off-line robust model predictive controller based on nominal performance cost. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(2): 304–310
(丁宝苍, 杨鹏. 基于标称性能指标的离线鲁棒预测控制器综合. 自动化学报. 2006, **32**(2): 304–310)
- 17 Ding Bao-Cang, Zou Tao, Li Shao-Yuan. Varying-horizon off-line robust predictive control for time-varying uncertain systems. *Control Theory and Applications*, 2006, **23**(2): 240–244
(丁宝苍, 邹涛, 李少远. 时变不确定系统的变时域离线鲁棒预测控制. 控制理论与应用, 2006, **23**(2): 240–244)
- 18 Lee Y I, Kouvaritakis B. Robust receding horizon predictive control for systems with uncertain dynamics and input saturation. *Automatica*, 2000, **36**(10): 1497–1504
- 19 Lee Y I, Kouvaritakis B. A linear programming approach to constrained robust predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(9): 1765–1770
- 20 Lee Y I, Kouvaritakis B. Superposition in efficient robust constrained predictive control. *Automatica*, 2002, **38**(5): 875–878
- 21 Cannon M, Deshmukh V, Kouvaritakis B. Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets. *Automatica*, 2003, **39**(8): 1487–1494
- 22 Cannon M, Kouvaritakis B, Deshmukh V. Enlargement of polytopic terminal region in NMPC by interpolation and partial invariance. *Automatica*, 2004, **40**(2): 311–317
- 23 Zou Zhi-Qiang, Xu Li-Hong, Yuan Meng. A nonlinear model predictive control based on polytopic description system. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2006, **34**(6): 813–817
(邹志强, 徐立鸿, 袁梦. 一种基于多面体描述系统的非线性预测控制. 同济大学学报(自然科学版), 2006, **34**(6): 813–817)
- 24 Zou Zhi-Qiang. Robust Control Research of Parameter Time-Varying Linear System with Polytopic Uncertainty [Ph. D. dissertation], Tongji University, China, 2006
(邹志强. 参数时变多面体不确定线性系统的鲁棒控制研究 [博士学位论文], 同济大学, 中国, 2006)
- 25 Zhang F Z. *The Schur Complement and Its Applications*. New York: Springer, 2005
- 26 Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J, Chilali M. *LMI Control Toolbox for Use with Matlab*. Natick: The Math Works, 1995
- 27 Jin Wei-Qiang, Li Ji-Shun. The design of electrode regulation system for electric arc furnace. *Industrial Heating*, 2008, **37**(2): 45–47
(金伟强, 李济顺. 电炉炉电极调节系统的设计. 工业加热, 2008, **37**(2): 45–47)
- 28 Wu Le-Bin, Wang Xuan-Yin, Li Qiang. Fuzzy-immune PID control of a 6-DOF parallel platform for docking simulation. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2008, **42**(3): 387–391
(吴乐彬, 王宣银, 李强. 对接模拟并联六自由度平台的模糊免疫PID控制. 浙江大学学报(工学版), 2008, **42**(3): 387–391)
- 29 Zhang Y W, Gui W H. Compensation for secondary uncertainty in electro-hydraulic servo system by gain adaptive sliding mode variable structure control. *Journal of Central South University of Technology*, 2008, **15**(2): 256–263
- 30 Wang Yan. Study and Application of Electric Arc Model for AC Electric Arc Furnace [Ph. D. dissertation], Northeastern University, China, 2009
(王琰. 交流电炉电弧模型研究及其应用 [博士学位论文], 东北大学, 中国, 2009)



李妍 东北大学博士研究生. 主要研究方向为非线性系统建模、优化与控制. 本文通信作者. E-mail: neu_ly@yahoo.cn
(LI Yan Ph. D. candidate at Northeastern University. Her research interest covers nonlinear system model, and optimization and control. Corresponding author of this paper.)



毛志忠 东北大学教授. 主要研究方向为复杂系统建模、优化与控制. E-mail: maozhizhong@ise.neu.edu.cn
(MAO Zhi-Zhong Professor at Northeastern University. His research interest covers complex system modeling, and optimization and control.)



王琰 2009年获得东北大学博士学位. 主要研究方向为非线性系统建模与控制. E-mail: neu_wy100@yahoo.com.cn
(WANG Yan Received his Ph. D. degree at Northeastern University in 2009. His research interest covers nonlinear system modeling and control.)



袁平 东北大学副教授. 主要研究方向为建模、软测量及智能控制. E-mail: yuanping1@ise.neu.edu.cn
(YUAN Ping Associate professor at Northeastern University. His research interest covers modeling, soft measurement, and intelligent control.)



贾明兴 东北大学副教授. 主要研究方向为控制系统故障诊断和智能控制. E-mail: jiamingxing@ise.neu.edu.cn
(JIA Ming-Xing Associate professor at Northeastern University. His research interest covers fault detection and intelligent control.)